分析力学（上卷）

Analytical Mechanics（Ⅰ）

梅凤翔　编著

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

VISIT…

LANZAROTE Caliente.com

分析力学（下卷）

Analytical Mechanics（Ⅱ）

梅凤翔　编著

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

分析力学(上卷)

Analytical Mechanics(Ⅰ)

梅凤翔　编著

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

分析力学（下卷）

Analytical Mechanics（Ⅱ）

梅凤翔　编著

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

本书全面系统地论述分析静力学和分析动力学，包括约束及其分类，广义坐标与准坐标，虚位移与自由度，理想约束，虚位移原理，运动学基础，d'Alembert-Lagrange 原理，Lagrange 方程，Lagrange 方程的应用（Ⅰ）、（Ⅱ）、（Ⅲ），Hamilton 方程，Hamilton 方程的积分，非完整系统，Birkhoff 系统，场积分方法，势积分方法，Jacobi 最终乘子法，Noether 对称性方法，Lie 对称性方法，形式不变性方法，Lagrange 对称性方法与 Birkhoff 对称性方法，力学系统与梯度系统，动力学逆问题，力学的变分原理等。

本书可作为高等学校力学、数学、物理学，以及工程专业高年级本科生和研究生的教学参考书，亦可供有关教师、力学工作者和科技人员参考使用。

版权专有　侵权必究

图书在版编目（CIP）数据

分析力学：全 2 册 / 梅凤翔编著. — 北京：北京理工大学出版社，2013.7

ISBN 978-7-5640-7877-5

Ⅰ. ①分… Ⅱ. ①梅… Ⅲ. ①分析力学-研究 Ⅳ. ①O316

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2013）第 145348 号

出版发行 /北京理工大学出版社有限责任公司
社　　址 /北京市海淀区中关村南大街 5 号
邮　　编 /100081
电　　话 /（010）68914775（总编室）
　　　　　82562903（教材售后服务热线）
　　　　　68948351（其他图书服务热线）
网　　址 /http://www.bitpress.com.cn
经　　销 /全国各地新华书店
印　　刷 /保定市中画美凯印刷有限公司
开　　本 /710 毫米×1000 毫米　1/16
印　　张 /42.5　　　　　　　　　　　　　责任编辑/王玲玲
字　　数 /784 千字　　　　　　　　　　　文案编辑/王玲玲
版　　次 /2013 年 7 月第 1 版　2013 年 7 月第 1 次印刷　　责任校对/周瑞红
定　　价 /98.00 元（上、下卷）　　　　　责任印刷/王美丽

图书出现印装质量问题，请拨打售后服务热线，本社负责调换

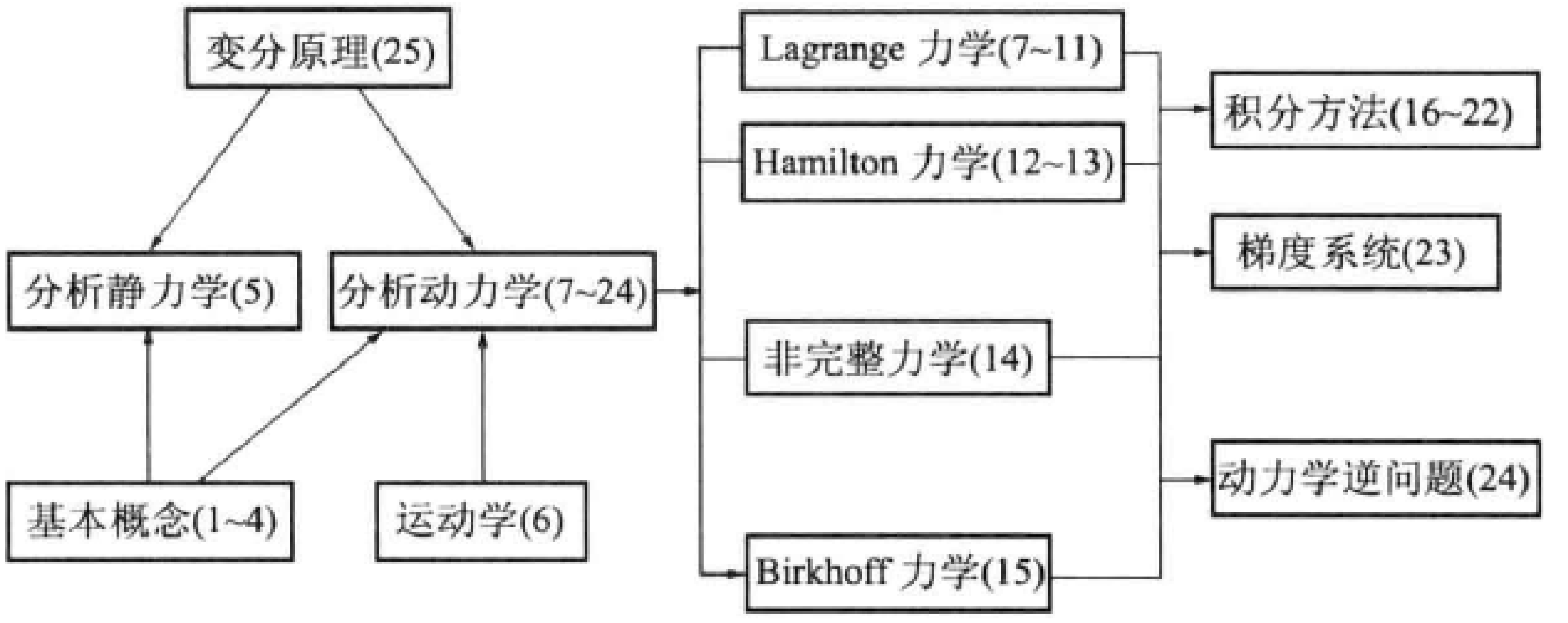
前言

近年拜读 d'Alembert 和 Lagrange 的著作，对分析力学的起源与发展有了进一步的认识。因此，想写一本篇幅不太长的分析力学，希望既能将以前出的几本书的基本内容纳入，又能将近年对 d'Alembert，Lagrange 原著的体会以及近年的新结果写进去。不同于以前出版的几部书，本书首先更侧重于问题的源头以及重要结论的经过史。例如，理想约束定义的形成、d'Alembert 原理的原述及其发展、虚位移原理的形成及其发展、Lagrange 原著附录中的 Lagrange 方程等。其次，有新增章节，如第 22 章和第 23 章等。再次，在理论力学与分析力学的连接上做了些努力。最后，考虑到不同读者的需求，在材料组织上，形成前 13 章的基础部分以及后 12 章的提高部分。

全书共 25 章。第 1 章为约束及其分类，第 2 章为广义坐标与准坐标，第 3 章为虚位移与自由度，第 4 章为理想约束。这 4 章是分析力学的基本概念。在第 3 章提到 Lagrange 的虚速度，给出实位移是虚位移之一的条件。在第 4 章介绍了从无摩擦约束到理想约束的形成，并区分了双面理想约束和单面理想约束。第 5 章为虚位移原理，它是分析静力学的基础。在这一章介绍了从 Lagrange到 Appell，再到俄罗斯学者和我国学者的有关论述；原理的证明及不充分性；原理给出的平衡条件；保守系统的平衡稳定性等。第 6 章为运动学基础。第 7 章为 d'Alembert-Lagrange 原理，它是分析动力学的基础。在这一章介绍了 d'Alembert 原理的原述以及后人的理解、Lagrange 和 Appell 对动力学普遍方程的表述。第 8 章为 Lagrange 方程，从 Lagrange 原著的附录开始，导出第一类和第二类 Lagrange 方程并给出方程的基本应用，在 Lagrange 方程的不变性中给出 Lagrange 对称性这一近代提法。第 9～11 章为 Lagrange 方程的应用，介绍了准坐标下的 Lagrange 方程、耗散函数的 Lagrange 方程、初始运动问题、打击运动的 Lagrange 方程、运动稳定性和小振动理论、刚体定点转动问题的分析动力学、相对运动动力学的 Lagrange 方程、变质量系统的Lagrange方程、事件空间中的 Lagrange 方程、可控力学系统的 Lagrange 方程、机电系统的 Lagrange 方程、Lagrange 力学逆问题等 12 个专题。第 7～11 章构成 Lagrange 力学的基本框架。第 12 章为 Hamilton 方程，第 13 章为 Hamilton 方程的积

分。这两章构成 Hamilton 力学的基本框架,其中较详细介绍了Hamilton方程的各种导出方法。第 14 章为非完整系统,介绍了非完整力学的基本内容,特别是关于 Lindelöf 方程和 Четаев 条件的讨论。第 15 章为 Birkhoff 系统,介绍了 Birkhoff 力学的基本内容,并给出 Pfaff-Birkhoff 原理的推广形式。第 16 章为场积分方法,第 17 章为势积分方法,第 18 章为 Jacobi 最终乘子法,第 19 章为 Noether 对称性方法,第 20 章为 Lie 对称性方法,第 21 章为形式不变性方法,第 22 章为 Lagrange 对称性方法与 Birkhoff 对称性方法。这 7 章讨论各类约束力学系统,包括完整系统、非完整系统、Birkhoff系统等的各种积分方法,其中第 22 章是近年的新结果。第 23 章为力学系统与梯度系统,讨论约束力学系统的梯度化,并用梯度系统的性质来研究力学系统的积分和稳定性。这一章也是新近结果。第 24 章为动力学逆问题,介绍各类约束力学系统的各种动力学逆问题的提法和解法。第 25 章为力学的变分原理,介绍各类微分变分原理和积分变分原理。

本书结构如下图所示。



本书写作过程中得到了北京理工大学宇航学院和数学学院的同事们的关心和支持。本书的出版得到国家自然科学基金(10932002,11272050)的资助。作者在此一并表示感谢。

限于作者水平,书中难免有疏漏,敬请读者指正。

作　者
2013 年春

目　录(上卷)

1　约束及其分类 …… 1
§1.1　约束 …… 1
1.1.1　约束的定义 …… 1
1.1.2　约束方程 …… 1
1.1.3　约束的分类 …… 3
§1.2　完整约束与非完整约束 …… 3
1.2.1　几何约束 …… 3
1.2.2　微分约束 …… 3
1.2.3　微分约束的可积性定理 …… 3
1.2.4　完整约束 …… 5
1.2.5　非完整约束 …… 6
§1.3　定常约束与非定常约束 …… 6
1.3.1　定常约束 …… 6
1.3.2　非定常约束 …… 6
§1.4　单面约束与双面约束 …… 7
1.4.1　双面约束 …… 7
1.4.2　单面约束 …… 7
思考题 …… 8
习题 …… 8
参考文献 …… 10

2　广义坐标与准坐标 …… 12
§2.1　广义坐标 …… 12
2.1.1　广义坐标的定义 …… 12
2.1.2　广义坐标的形成 …… 12
2.1.3　广义坐标的意义 …… 12
§2.2　广义速度和广义加速度 …… 15
2.2.1　广义速度 …… 15

2.2.2 广义加速度 …… 15
2.2.3 非完整约束在广义坐标和广义速度下的表达 …… 16
§2.3 多余坐标 …… 18
2.3.1 多余坐标的概念 …… 18
2.3.2 多余坐标的意义 …… 19
§2.4 准速度与准坐标 …… 19
2.4.1 准速度 …… 19
2.4.2 准坐标 …… 20
思考题 …… 21
习题 …… 21
参考文献 …… 22

3 虚位移与自由度 …… 24
§3.1 虚位移 …… 24
3.1.1 Lagrange 的虚速度 …… 24
3.1.2 虚位移与可能位移 …… 24
3.1.3 虚位移与实位移 …… 25
§3.2 约束加在虚位移上的限制 …… 25
3.2.1 完整约束情形 …… 25
3.2.2 线性非完整约束情形 …… 26
3.2.3 非线性非完整约束情形 …… 27
§3.3 自由度 …… 28
3.3.1 自由度的定义 …… 28
3.3.2 算例 …… 28
思考题 …… 29
习题 …… 30
参考文献 …… 31

4 理想约束 …… 32
§4.1 力的功 …… 32
4.1.1 功的简史 …… 32
4.1.2 力的分类 …… 32
4.1.3 力的实功 …… 33
4.1.4 力的虚功 …… 33
4.1.5 约束力的功 …… 33
§4.2 理想约束 …… 34

4.2.1　由无摩擦约束到理想约束 …… 34
4.2.2　理想约束的定义 …… 34
4.2.3　理想约束假定的重要性与可能性 …… 35
4.2.4　理想约束的例子 …… 35
思考题 …… 37
习题 …… 37
参考文献 …… 38

5　**虚位移原理** …… 39
§5.1　虚位移原理的简史 …… 39
5.1.1　Lagrange 的有关论述 …… 39
5.1.2　Appell 的有关论述 …… 40
5.1.3　俄罗斯学者的有关论述 …… 40
5.1.4　我国学者的论述 …… 41
5.1.5　注释 …… 41
§5.2　虚位移原理的表述 …… 42
5.2.1　一般表述 …… 42
5.2.2　特殊表述 …… 42
5.2.3　更一般表述 …… 42
§5.3　虚位移原理的证明 …… 43
5.3.1　Appell 的证明 …… 43
5.3.2　Суслов 的证明 …… 44
5.3.3　虚位移原理可以不去证明 …… 44
§5.4　虚位移原理给出的平衡方程 …… 44
5.4.1　虚位移原理的简单应用 …… 44
5.4.2　虚位移原理导出的一般平衡条件 …… 46
5.4.3　Lagrange 乘子 …… 47
§5.5　单面约束 …… 49
5.5.1　由等式确定的约束,允许不等式表征的位移 …… 49
5.5.2　不等式表示为有限形式的约束 …… 52
§5.6　虚位移原理的应用举例 …… 53
§5.7　保守系统的平衡稳定性 …… 62
5.7.1　Lagrange 关于平衡稳定性的论述 …… 63
5.7.2　Appell 的有关论述 …… 63
5.7.3　Ляпунов 和 Четаев 的工作 …… 63
5.7.4　关于平衡位置的不稳定性 …… 64

5.7.5 力函数的极值特性 …… 65
5.7.6 算例 …… 66
思考题 …… 73
习题 …… 73
参考文献 …… 78

6 **运动学基础** …… 80
§6.1 点的运动学 …… 80
6.1.1 点的运动的矢量描述 …… 80
6.1.2 点的运动的坐标描述 …… 81
§6.2 刚体运动学 …… 88
6.2.1 刚体的平移 …… 88
6.2.2 刚体的定轴转动 …… 88
6.2.3 刚体的平面运动 …… 88
6.2.4 刚体的一般运动 …… 90
§6.3 点的复合运动 …… 95
6.3.1 绝对运动,相对运动,牵连运动 …… 95
6.3.2 变矢量的绝对导数与相对导数 …… 95
6.3.3 速度合成定理 …… 95
6.3.4 加速度合成定理 …… 96
§6.4 刚体的复合运动 …… 96
6.4.1 刚体平面运动的角速度合成定理 …… 97
6.4.2 刚体平面运动分解为两个转动 …… 97
思考题 …… 100
习题 …… 100
参考文献 …… 101

7 **d'Alembert-Lagrange 原理** …… 102
§7.1 d'Alembert 原理 …… 102
7.1.1 d'Alembert 的原述 …… 102
7.1.2 后人对 d'Alembert 原理的理解 …… 103
7.1.3 d'Alembert 原理的表述 …… 105
§7.2 d'Alembert-Lagrange 原理 …… 105
7.2.1 原理的建立 …… 106
7.2.2 原理的表述 …… 107
7.2.3 原理的应用 …… 108

7.2.4　原理的直角坐标表达 …… 108
§7.3　d'Alembert-Lagrange 原理的广义坐标表达 …… 109
7.3.1　Euler-Lagrange 形式 …… 109
7.3.2　Nielsen 形式 …… 110
7.3.3　Appell 形式 …… 111
思考题 …… 113
习题 …… 113
参考文献 …… 115

8　Lagrange 方程 …… 116
§8.1　Lagrange 方程的由来 …… 116
8.1.1　第一类 Lagrange 方程 …… 116
8.1.2　第二类 Lagrange 方程 …… 116
§8.2　Lagrange 方程的导出 …… 117
8.2.1　第二类 Lagrange 方程的导出 …… 117
8.2.2　第一类 Lagrange 方程的导出 …… 117
§8.3　Lagrange 方程的结构 …… 118
8.3.1　系统动能的结构 …… 118
8.3.2　广义力的计算 …… 122
8.3.3　Lagrange 方程的显式 …… 123
8.3.4　应用举例 …… 124
§8.4　有势力情形的 Lagrange 方程 …… 132
8.4.1　有势力情形的 Lagrange 方程 …… 133
8.4.2　有广义力函数情形的 Lagrange 方程 …… 133
8.4.3　Lagrange 方程的不变性 …… 134
8.4.4　应用举例 …… 136
§8.5　Lagrange 方程的经典积分及降阶法 …… 144
8.5.1　运动方程的第一积分 …… 144
8.5.2　循环坐标和循环积分 …… 145
8.5.3　能量积分 …… 146
8.5.4　一般完整系统的能量积分 …… 146
8.5.5　利用循环积分的 Routh 降阶法 …… 147
8.5.6　利用能量积分的 Whittaker 降阶法 …… 148
8.5.7　应用举例 …… 150
§8.6　变量可分离的 Lagrange 方程和 Liouville 方程 …… 155
8.6.1　分离变量与局部能量积分 …… 155

8.6.2 Liouville 方程 …… 156
8.6.3 应用举例 …… 158
思考题 …… 159
习题 …… 160
参考文献 …… 165

9 **Lagrange 方程的应用(Ⅰ)** …… 166
§9.1 准坐标下的 Lagrange 方程 …… 166
9.1.1 准速度与准坐标 …… 166
9.1.2 准坐标下 Lagrange 方程的导出 …… 167
9.1.3 应用举例 …… 168
§9.2 耗散函数的 Lagrange 方程 …… 171
9.2.1 Лурье 耗散函数 …… 171
9.2.2 有耗散函数的 Lagrange 方程 …… 171
9.2.3 耗散函数的力学意义 …… 172
9.2.4 应用举例 …… 172
§9.3 初始运动问题 …… 173
9.3.1 Lagrange 方程的初始运动问题 …… 173
9.3.2 应用举例 …… 173
§9.4 打击运动的 Lagrange 方程 …… 177
9.4.1 给定打击冲量的情形 …… 177
9.4.2 瞬时加上约束的情形 …… 179
9.4.3 应用举例 …… 180
思考题 …… 183
习题 …… 183
参考文献 …… 185

10 **Lagrange 方程的应用(Ⅱ)** …… 187
§10.1 运动稳定性和小振动理论 …… 187
10.1.1 平衡条件及平衡位置的稳定性 …… 187
10.1.2 运动稳定性的一些概念和结论 …… 188
10.1.3 保守系统的小振动 …… 191
10.1.4 新约束对振动系统周期的影响 …… 193
10.1.5 应用举例 …… 195
§10.2 刚体定点转动问题的分析动力学 …… 202
10.2.1 简史 …… 202

10.2.2　Euler-Poisson 方程及三种经典可积情形 …… 202
10.2.3　Харламов 方程及其降阶问题 …… 205
10.2.4　Euler-Poisson 方程的若干特殊可积情形 …… 208
§10.3　相对运动动力学的 Lagrange 方程 …… 211
10.3.1　被载体相对运动微分方程的一般形式 …… 211
10.3.2　被载体相对运动微分方程的几种特殊形式 …… 214
10.3.3　能量方程 …… 214
10.3.4　相对平衡 …… 215
10.3.5　应用举例 …… 216
§10.4　变质量系统的 Lagrange 方程 …… 218
10.4.1　变质量力学系统的 d'Alembert-Lagrange 原理 …… 218
10.4.2　变质量力学系统的 Lagrange 方程 …… 220
10.4.3　应用举例 …… 221
思考题 …… 222
习题 …… 223
参考文献 …… 224

11　**Lagrange 方程的应用(Ⅲ)** …… 226
§11.1　事件空间中的 Lagrange 方程 …… 226
11.1.1　事件空间中的 Hamilton 原理 …… 226
11.1.2　事件空间中的 d'Alembert-Lagrange 原理 …… 227
11.1.3　事件空间中的参数方程 …… 228
11.1.4　应用举例 …… 229
§11.2　可控力学系统的 Lagrange 方程 …… 230
11.2.1　带参数约束系统的 Lagrange 方程 …… 230
11.2.2　包含伺服约束系统的 Lagrange 方程 …… 231
11.2.3　有约束的受迫控制问题的 Lagrange 方程 …… 233
11.2.4　应用举例 …… 235
§11.3　机电系统的 Lagrange 方程 …… 237
11.3.1　基本概念和电路方程 …… 237
11.3.2　Lagrange-Maxwell 方程 …… 239
11.3.3　应用举例 …… 241
§11.4　Lagrange 力学逆问题 …… 244
11.4.1　问题的提出 …… 244
11.4.2　函数 L 存在的条件 …… 244
11.4.3　函数 L 的构造方法 …… 245

11.4.4 应用举例 …… 247
思考题 …… 250
习题 …… 251
参考文献 …… 252

12 **Hamilton 方程** …… 253
§12.1 Legendre 变换与正则方程 …… 253
12.1.1 Legendre 变换 …… 253
12.1.2 Hamilton 正则方程 …… 254
12.1.3 研究正则方程的意义 …… 256
12.1.4 关于正则方程的导出 …… 256
12.1.5 应用举例 …… 261
§12.2 正则方程的经典积分与降阶法 …… 263
12.2.1 正则方程的能量积分和循环积分 …… 263
12.2.2 利用能量积分的 Whittaker 降阶法 …… 265
12.2.3 应用举例 …… 265
§12.3 正则方程的逆变型和协变型 …… 266
12.3.1 正则方程的逆变型 …… 266
12.3.2 正则方程的协变型 …… 266
12.3.3 应用举例 …… 267
思考题 …… 269
习题 …… 269
参考文献 …… 271

13 **Hamilton 方程的积分** …… 272
§13.1 Poisson 方法 …… 272
13.1.1 对第一积分的 Poisson 条件 …… 272
13.1.2 Poisson 括号及其性质 …… 272
13.1.3 经典 Poisson 积分方法及其推广 …… 273
13.1.4 应用举例 …… 275
§13.2 Jacobi 方法 …… 277
13.2.1 预备知识 …… 277
13.2.2 Hamilton-Jacobi 方程和 Jacobi 定理 …… 278
13.2.3 Liouville 情形 …… 279
13.2.4 应用举例 …… 281
§13.3 正则变换 …… 287

13.3.1　正则变换及其群性 …… 287
13.3.2　母函数 …… 289
13.3.3　Mathieu 变换和点变换 …… 292
13.3.4　无限小正则变换 …… 293
13.3.5　应用举例 …… 294
§13.4　积分不变量 …… 296
13.4.1　Poincaré 一阶线性相对积分不变量 …… 296
13.4.2　高阶积分不变量 …… 297
13.4.3　正则变换与积分不变量 …… 301
13.4.4　关于积分不变量的唯一性定理 …… 302
13.4.5　Poincaré-Cartan 积分不变量 …… 302
13.4.6　应用举例 …… 303
思考题 …… 306
习题 …… 306
参考文献 …… 307

目　录(下卷)

14　**非完整系统** …… 309
§14.1　基本概念 …… 309
14.1.1　约束对虚位移的限制 …… 309
14.1.2　微分运算 d 与变分运算 δ 的交换关系 …… 310
14.1.3　d,δ 交换关系,满足约束的可能轨道与 Четаев 条件三者的协调性 …… 312
§14.2　运动微分方程 …… 313
14.2.1　d'Alembert-Lagrange 原理的各种表达 …… 313
14.2.2　带乘子的方程 …… 313
14.2.3　Чаплыгин 方程 …… 314
14.2.4　Boltzmann-Hamel 方程 …… 316
14.2.5　Appell 方程 …… 318
14.2.6　关于 Lindelöf 方程 …… 319
§14.3　积分方法 …… 322
14.3.1　非完整系统的循环积分及其降阶法 …… 322
14.3.2　非完整系统的能量积分及其降阶法 …… 324
14.3.3　Jacobi 方法 …… 329
§14.4　专门问题 …… 332
14.4.1　非完整系统平衡状态附近的小振动 …… 332
14.4.2　相对运动动力学 …… 336
14.4.3　打击运动 …… 339
14.4.4　变质量系统 …… 343
思考题 …… 345
习题 …… 346
参考文献 …… 346

15　**Birkhoff 系统** …… 348
§15.1　Pfaff-Birkhoff 原理 …… 348
15.1.1　Birkhoff 的贡献 …… 348

15.1.2 Santilli 的总结 …… 349
15.1.3 Pfaff-Birkhoff 原理 …… 349
15.1.4 Pfaff-Birkhoff 原理的推广 …… 350
§15.2 Birkhoff 方程 …… 350
15.2.1 Birkhoff 方程的导出 …… 350
15.2.2 Birkhoff 方程的形式 …… 352
15.2.3 Birkhoff 方程的性质 …… 353
15.2.4 广义 Birkhoff 方程 …… 355
§15.3 Birkhoff 函数的构造 …… 356
15.3.1 Santilli 第一方法 …… 356
15.3.2 Santilli 第二方法 …… 356
15.3.3 Hojman 方法 …… 357
15.3.4 自治系统 Birkhoff 函数的构造 …… 357
15.3.5 构造 Birkhoff 表示的困难 …… 359
§15.4 Birkhoff 方程的积分 …… 362
15.4.1 经典积分及降阶法 …… 362
15.4.2 Poisson 方法 …… 367
15.4.3 变换理论 …… 370
15.4.4 积分不变量 …… 373
§15.5 专门问题 …… 374
15.5.1 完整系统的 Birkhoff 动力学 …… 374
15.5.2 非完整系统的 Birkhoff 动力学 …… 376
15.5.3 约束 Birkhoff 系统 …… 379
15.5.4 平衡稳定性 …… 382
思考题 …… 385
习题 …… 385
参考文献 …… 387

16 **场积分方法** …… 388
§16.1 求解常微分方程的场方法 …… 388
16.1.1 场方法 …… 388
16.1.2 应用 …… 390
§16.2 完整系统的场方法 …… 391
16.2.1 运动微分方程 …… 391
16.2.2 场方法的应用 …… 391
§16.3 非完整系统的场方法 …… 393

16.3.1 运动微分方程 …… 393
16.3.2 应用举例 …… 395
§16.4 Birkhoff 系统的场方法 …… 400
16.4.1 运动微分方程 …… 400
16.4.2 应用举例 …… 400
思考题 …… 403
习题 …… 403
参考文献 …… 404

17 势积分方法 …… 405
§17.1 势积分方法介绍 …… 405
17.1.1 势积分方法 …… 405
17.1.2 势积分方法的简单应用 …… 407
§17.2 完整系统的势积分方法 …… 408
17.2.1 系统的运动微分方程 …… 408
17.2.2 应用举例 …… 408
§17.3 非完整系统的势积分方法 …… 412
17.3.1 系统的运动微分方程 …… 412
17.3.2 应用举例 …… 413
§17.4 Birkhoff 系统的势积分方法 …… 415
17.4.1 系统的运动微分方程 …… 415
17.4.2 应用举例 …… 416
思考题 …… 418
习题 …… 418
参考文献 …… 419

18 Jacobi 最终乘子法 …… 420
§18.1 一般微分方程组的 Jacobi 最终乘子 …… 420
18.1.1 最终乘子 …… 420
18.1.2 由两个乘子导出积分 …… 421
18.1.3 对 Lagrange 力学逆问题的应用 …… 421
18.1.4 应用举例 …… 422
§18.2 Hamilton 系统的最终乘子 …… 423
18.2.1 最终乘子对 Hamilton 系统的应用 …… 423
18.2.2 二自由度情形 …… 424
18.2.3 应用举例 …… 426

§18.3 广义 Hamilton 系统的最终乘子 …… 427
18.3.1 系统的最终乘子 …… 427
18.3.2 应用举例 …… 428
§18.4 Birkhoff 系统的最终乘子 …… 431
18.4.1 系统的最终乘子 …… 431
18.4.2 广义 Birkhoff 方程的最终乘子 …… 433
18.4.3 应用举例 …… 434
思考题 …… 438
习题 …… 438
参考文献 …… 439

19 Noether 对称性方法 …… 440
§19.1 Lagrange 系统 …… 440
19.1.1 运动微分方程 …… 440
19.1.2 Noether 对称性 …… 441
19.1.3 Noether 守恒量 …… 443
19.1.4 应用举例 …… 443
§19.2 Hamilton 系统 …… 445
19.2.1 运动微分方程 …… 446
19.2.2 Noether 对称性 …… 446
19.2.3 Noether 守恒量 …… 448
19.2.4 应用举例 …… 449
§19.3 一般完整系统 …… 450
19.3.1 运动微分方程 …… 450
19.3.2 Noether 对称性 …… 450
19.3.3 Noether 守恒量 …… 451
19.3.4 应用举例 …… 451
§19.4 Четаев 型非完整系统 …… 452
19.4.1 运动微分方程 …… 452
19.4.2 Noether 对称性 …… 453
19.4.3 Noether 守恒量 …… 454
19.4.4 应用举例 …… 454
§19.5 Birkhoff 系统 …… 457
19.5.1 运动微分方程 …… 457
19.5.2 Noether 对称性 …… 458
19.5.3 Noether 守恒量 …… 460

19.5.4 应用举例 …… 460
§19.6 弱 Noether 对称性与守恒量 …… 462
19.6.1 Lagrange 系统 …… 462
19.6.2 Hamilton 系统 …… 464
19.6.3 一般完整系统 …… 465
19.6.4 Четаев 型非完整系统 …… 466
19.6.5 Birkhoff 系统 …… 467
思考题 …… 468
习题 …… 469
参考文献 …… 470

20 **Lie 对称性方法** …… 472
§20.1 Lagrange 系统 …… 472
20.1.1 运动微分方程 …… 472
20.1.2 Lie 对称性 …… 472
20.1.3 Hojman 型守恒量 …… 473
20.1.4 Noether 守恒量 …… 474
20.1.5 应用举例 …… 475
§20.2 Hamilton 系统 …… 476
20.2.1 运动微分方程 …… 476
20.2.2 Lie 对称性 …… 477
20.2.3 Hojman 型守恒量 …… 478
20.2.4 Noether 守恒量 …… 478
20.2.5 应用举例 …… 478
§20.3 一般完整系统 …… 480
20.3.1 运动微分方程 …… 480
20.3.2 Lie 对称性 …… 480
20.3.3 Hojman 型守恒量 …… 481
20.3.4 Noether 守恒量 …… 481
20.3.5 应用举例 …… 481
§20.4 Четаев 型非完整系统 …… 484
20.4.1 运动微分方程 …… 484
20.4.2 Lie 对称性 …… 485
20.4.3 Hojman 型守恒量 …… 485
20.4.4 Noether 守恒量 …… 486
20.4.5 应用举例 …… 487

§20.5 Birkhoff 系统 …… 488
20.5.1 运动微分方程 …… 488
20.5.2 Lie 对称性 …… 489
20.5.3 Hojman 型守恒量 …… 490
20.5.4 Noether 守恒量 …… 491
20.5.5 应用举例 …… 492
§20.6 广义 Hamilton 系统 …… 493
20.6.1 运动微分方程 …… 493
20.6.2 Lie 对称性 …… 494
20.6.3 Hojman 型守恒量 …… 494
20.6.4 Noether 守恒量 …… 495
20.6.5 应用举例 …… 496
思考题 …… 497
习题 …… 497
参考文献 …… 498

21 **形式不变性方法** …… 500
§21.1 Lagrange 系统 …… 500
21.1.1 运动微分方程 …… 500
21.1.2 形式不变性 …… 500
21.1.3 新型守恒量 …… 501
21.1.4 Noether 守恒量 …… 502
21.1.5 Hojman 型守恒量 …… 502
21.1.6 应用举例 …… 503
§21.2 Hamilton 系统 …… 505
21.2.1 运动微分方程 …… 505
21.2.2 形式不变性 …… 505
21.2.3 新型守恒量 …… 506
21.2.4 Noether 守恒量 …… 506
21.2.5 Hojman 型守恒量 …… 507
21.2.6 应用举例 …… 507
§21.3 一般完整系统 …… 509
21.3.1 运动微分方程 …… 509
21.3.2 形式不变性 …… 510
21.3.3 新型守恒量 …… 510
21.3.4 Noether 守恒量 …… 511

21.3.5　Hojman 型守恒量 …… 511
21.3.6　应用举例 …… 512
§21.4　Четаев 型非完整系统 …… 514
21.4.1　运动微分方程 …… 514
21.4.2　形式不变性 …… 515
21.4.3　新型守恒量 …… 516
21.4.4　Noether 守恒量 …… 516
21.4.5　Hojman 型守恒量 …… 517
21.4.6　应用举例 …… 517
§21.5　Birkhoff 系统 …… 521
21.5.1　运动微分方程 …… 521
21.5.2　形式不变性 …… 522
21.5.3　新型守恒量 …… 522
21.5.4　Noether 守恒量 …… 523
21.5.5　Hojman 型守恒量 …… 523
21.5.6　应用举例 …… 524
§21.6　广义 Hamilton 系统 …… 526
21.6.1　运动微分方程 …… 526
21.6.2　形式不变性 …… 526
21.6.3　新型守恒量 …… 527
21.6.4　Hojman 型守恒量 …… 527
21.6.5　应用举例 …… 528
思考题 …… 530
习题 …… 530
参考文献 …… 531

22　Lagrange 对称性方法与 Birkhoff 对称性方法 …… 533
§22.1　Lagrange 系统 …… 533
22.1.1　运动微分方程 …… 533
22.1.2　Lagrange 对称性的定义和判据 …… 534
22.1.3　Lagrange 对称性导致的守恒量 …… 534
22.1.4　应用举例 …… 537
§22.2　一般完整系统 …… 539
22.2.1　运动微分方程 …… 539
22.2.2　Lagrange 对称性的定义和判据 …… 539
22.2.3　Lagrange 对称性导致的守恒量 …… 540

22.2.4 应用举例 …… 540
§22.3 有多余坐标完整系统 …… 541
22.3.1 运动微分方程 …… 541
22.3.2 Lagrange 对称性的定义和判据 …… 542
22.3.3 Lagrange 对称性导致的守恒量 …… 543
22.3.4 应用举例 …… 543
§22.4 相对运动动力学系统 …… 544
22.4.1 运动微分方程 …… 544
22.4.2 Lagrange 对称性的定义和判据 …… 544
22.4.3 Lagrange 对称性导致的守恒量 …… 545
22.4.4 应用举例 …… 545
§22.5 变质量完整系统 …… 546
22.5.1 运动微分方程 …… 546
22.5.2 Lagrange 对称性的定义和判据 …… 547
22.5.3 Lagrange 对称性导致的守恒量 …… 547
22.5.4 应用举例 …… 548
§22.6 非完整系统 …… 549
22.6.1 运动微分方程 …… 549
22.6.2 Lagrange 对称性的定义和判据 …… 549
22.6.3 Lagrange 对称性导致的守恒量 …… 550
22.6.4 应用举例 …… 551
§22.7 Birkhoff 系统的 Birkhoff 对称性 …… 553
22.7.1 运动微分方程 …… 553
22.7.2 Birkhoff 对称性的定义和判据 …… 554
22.7.3 Birkhoff 对称性导致的守恒量 …… 554
22.7.4 应用举例 …… 558
思考题 …… 561
习题 …… 562
参考文献 …… 562

23 力学系统与梯度系统 …… 564
§23.1 梯度系统与斜梯度系统 …… 564
23.1.1 微分方程 …… 564
23.1.2 梯度系统的性质 …… 565
23.1.3 斜梯度系统的性质 …… 565
§23.2 Lagrange 系统与梯度系统 …… 565

23.2.1 运动微分方程 …… 565
23.2.2 化成梯度系统 …… 566
23.2.3 稳定性 …… 566
23.2.4 化成斜梯度系统 …… 566
23.2.5 应用举例 …… 567
§23.3 Hamilton 系统与梯度系统 …… 568
23.3.1 运动微分方程 …… 568
23.3.2 化成梯度系统 …… 568
23.3.3 稳定性 …… 568
23.3.4 化成斜梯度系统 …… 569
23.3.5 应用举例 …… 569
§23.4 一般完整系统与梯度系统 …… 569
23.4.1 运动微分方程 …… 570
23.4.2 化成梯度系统 …… 570
23.4.3 稳定性 …… 570
23.4.4 化成斜梯度系统 …… 571
23.4.5 应用举例 …… 571
§23.5 Birkhoff 系统与梯度系统 …… 573
23.5.1 运动微分方程 …… 573
23.5.2 化成梯度系统 …… 574
23.5.3 稳定性 …… 574
23.5.4 化成斜梯度系统 …… 574
23.5.5 应用举例 …… 575
§23.6 广义 Hamilton 系统与梯度系统 …… 577
23.6.1 运动微分方程 …… 577
23.6.2 化成梯度系统 …… 578
23.6.3 稳定性 …… 578
23.6.4 化成斜梯度系统 …… 578
23.6.5 应用举例 …… 578
思考题 …… 580
习题 …… 580
参考文献 …… 581

24 **动力学逆问题** …… 582
§24.1 完整系统 …… 582
24.1.1 广义坐标中 Lagrange 方程的建立 …… 582

24.1.2 按给定的一个积分确定广义力 …… 584
24.1.3 Noether 对称性与动力学逆问题 …… 587
24.1.4 Poisson 方法与动力学逆问题 …… 591
§24.2 非完整系统 …… 593
24.2.1 运动方程的组建 …… 593
24.2.2 运动方程的修改 …… 596
24.2.3 Bertrand 定理的推广 …… 599
24.2.4 Noether 对称性与动力学逆问题 …… 603
§24.3 Birkhoff 系统 …… 606
24.3.1 运动方程的组建 …… 606
24.3.2 Noether 对称性与动力学逆问题 …… 609
24.3.3 根据 Pfaff-Birkhoff-d'Alembert 原理组建运动方程 …… 612
24.3.4 Poisson 方法与动力学逆问题 …… 614
思考题 …… 615
习题 …… 615
参考文献 …… 616

25 力学的变分原理 …… 618
§25.1 d'Alembert-Lagrange 原理 …… 618
25.1.1 d'Alembert 原理 …… 618
25.1.2 虚位移原理 …… 619
25.1.3 d'Alembert-Lagrange 原理的表述 …… 619
25.1.4 d'Alembert-Lagrange 原理在广义坐标中的表达 …… 619
§25.2 Jourdain 原理 …… 620
25.2.1 Jourdain 原理的表述 …… 620
25.2.2 Jourdain 原理在广义坐标中的表达 …… 621
§25.3 Gauss 原理 …… 621
25.3.1 Gauss 原理的表述 …… 621
25.3.2 Gauss 原理在广义坐标中的表达 …… 622
§25.4 Hamilton 原理 …… 623
25.4.1 Hamilton 原理的表述 …… 623
25.4.2 一般完整系统的 Hamilton 原理 …… 624
25.4.3 Hamilton 原理应用于近似计算 …… 624
25.4.4 Hamilton 原理的极值特性 …… 626
25.4.5 非完整系统的 Hamilton 原理 …… 627
25.4.6 Суслов 例与 Pars 例 …… 628

§25.5 Lagrange 原理 …… 630
25.5.1 Lagrange 原理的表述 …… 630
25.5.2 Lagrange 原理的其他形式 …… 631
§25.6 Pfaff-Birkhoff 原理 …… 633
25.6.1 Pfaff-Birkhoff 原理的表述 …… 633
25.6.2 Hamilton 原理是 Pfaff-Birkhoff 原理的特例 …… 633
25.6.3 Pfaff-Birkhoff 原理与 Birkhoff 方程 …… 634
25.6.4 Pfaff-Birkhoff 原理的一个推广 …… 634
§25.7 力学变分原理发展简史 …… 635
25.7.1 力学变分原理的发展 …… 635
25.7.2 力学与物理学中变分原理的含义和意义 …… 635
思考题 …… 636
习题 …… 637
参考文献 …… 637

索 引 …… 639

1 约束及其分类

本章讨论约束以及约束的分类，包括约束、完整约束与非完整约束、定常约束与非定常约束、双面约束与单面约束等。

§1.1 约束

1.1.1 约束的定义

研究质点系相对某个惯性坐标系的运动。在系统点的位置和速度上事先加上一些几何的或运动学特性的限制，将这些限制称为**约束**。例如，火车被限制在铁轨上运动的条件，刚体内任意两点间的距离保持不变的条件，冰刀运动的速度只能沿冰刀方向的条件，圆球在粗糙平面上无滑动地滚动的条件，等等，都是约束。前两个条件是几何限制，后两个条件是运动学限制。当系统运动时，不论作用于其上的力以及运动初始条件如何，这些限制必须得到满足。

受到约束的系统称为**非自由系统**；反之，不受约束的系统称为**自由系统**。在同样主动力作用下，与自由系统相比较，加于非自由系统的点上的约束在某种程度上限制了系统的可能运动。由约束所加的限制，对于各种工程技术领域来说，具有指导作用和特殊用途。例如，可控力学系统本身就是带有制约给定运动状态的确定的约束系统，而用相应的控制装置来实现这样约束便是技术上的问题。

1.1.2 约束方程

一般的约束条件都可用**约束方程**或约束不等式来表达。这就需要根据已给条件，利用几何学和运动学知识来写出具体的数学表达式。

例 1 两个质点在半径为 R 的固定球面上运动,两点间距离 l 保持不变。

以固定球面中心为原点,建立一固定直角坐标系,两质点在此坐标系中的坐标分别为(x_1,y_1,z_1)和(x_2,y_2,z_2),于是两点间距离为常值 l 的条件可表示为

$$(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2-l^2=0 \tag{1.1.1}$$

而两点在半径为 R 的固定球面上的条件分别为

$$x_1^2+y_1^2+z_1^2-R^2=0 \tag{1.1.2}$$

$$x_2^2+y_2^2+z_2^2-R^2=0 \tag{1.1.3}$$

约束方程(1.1.1),(1.1.2),(1.1.3)就是加于系统的点的位置上的几何限制。不论作用于该系统上的力和运动的初始条件如何,这些方程都必须得到满足。

例 2 两质点用长 l 的不可伸长软绳联结,并在空间运动[1]。

设两质点在固定直角坐标系中的坐标分别为(x_1,y_1,z_1)和(x_2,y_2,z_2),因软绳可张紧,亦可不张紧,故约束表示为

$$l^2-\{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2\}\geqslant 0 \tag{1.1.4}$$

其中等号表示软绳在张紧状态,不等号表示软绳在不张紧状态。

例 3 在平面上运动的两个质点用不变长 l 的杆联结,并且杆中点的速度沿杆方向[1]。

设两质点的坐标分别为(x_1,y_1)和(x_2,y_2),则两点间距离为 l 的条件可表示为

$$(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2-l^2=0 \tag{1.1.5}$$

而杆中点的速度沿杆方向的条件表示为

$$\frac{\dot{x}_1+\dot{x}_2}{x_2-x_1}=\frac{\dot{y}_1+\dot{y}_2}{y_2-y_1} \tag{1.1.6}$$

约束方程(1.1.5)是对点的位置的几何限制,而约束方程(1.1.6)是对点的速度的运动学限制。

例 4 一质点在空间运动,所受约束为[2,3]

$$\dot{y}-z\dot{x}=0 \tag{1.1.7}$$

其中(x,y,z)为点的坐标。

例 5 一质点做平面运动,所受约束为使其轨迹的斜率与时间成正比[3]。

约束方程表示为

$$t\dot{x}-\dot{y}=0 \tag{1.1.8}$$

其中(x,y)为点的坐标。

1.1.3 约束的分类

当应用基本原理推导系统运动微分方程时，约束本身的性质有极大影响，不仅系统运动形式，而且为研究运动所选取的方法都依赖于约束的性质。因此，必须研究各种类型的约束。可以按照各种特征将约束分类，例如，完整与非完整、定常与非定常、单面与双面、理想与非理想，等等。

§1.2 完整约束与非完整约束

1.2.1 几何约束

研究由 N 个质点组成的力学系统，如果所受约束是用相对于点的直角坐标 $(x_i, y_i, z_i)(i=1,2,\cdots,N)$ 及时间 t 的解析方程或有限方程(非微分方程)来表示，则这种约束称为**几何约束**，例如，约束(1.1.1)，(1.1.2)，(1.1.3)，(1.1.4)，(1.1.5)都是几何约束。几何约束的一般形式为

$$F_\alpha(x_i, y_i, z_i, t)=0 \quad (\alpha=1,2,\cdots,d<3N; i=1,2,\cdots,N) \tag{1.2.1}$$

当存在几何约束(1.2.1)时，系统不能在每一时刻在空间取任意位置，几何约束是在时刻 t 加在系统可能位置上的限制。

1.2.2 微分约束

如果约束方程中不仅包含坐标和时间，还包含速度，则这种约束称为**微分约束**，或运动学约束。当系统受微分约束时，系统在任意时刻可在空间占据任意位置，但在此位置上系统点的速度不是任意的。微分约束是加在速度上的限制[1]。微分约束的一般形式为

$$F_\beta(x_i, y_i, z_i, \dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i, t)=0 \quad (\beta=1,2,\cdots,g; i=1,2,\cdots,N) \tag{1.2.2}$$

这里 F_β 对 $\dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i$ 可以是线性的，或非线性的。线性微分约束可表示为

$$\sum_{i=1}^{N}(A_{\beta i}\dot{x}_i+B_{\beta i}\dot{y}_i+C_{\beta i}\dot{z}_i)+D_\beta=0 \quad (\beta=1,2,\cdots,g) \tag{1.2.3}$$

其中 $A_{\beta i}, B_{\beta i}, C_{\beta i}$ 和 D_β 是坐标和时间的函数。

微分约束可分为可积分的微分约束和不可积分的微分约束。例如，微分约束

$$\dot{x}(x^2+y^2+z^2)+2(x\dot{x}+y\dot{y}+z\dot{z})=0 \tag{1.2.4}$$

是可积分的微分约束，它可积分为有限形式

$$x+\ln(x^2+y^2+z^2)=C$$

其中 C 为积分常数。又如，约束(1.1.7)是微分约束，并且是不可积分的微分约束。

1.2.3 微分约束的可积性定理

一个微分约束是否可积分为有限形式，这是个重要问题。

令

$$\xi_1=x_1, \xi_2=y_1, \xi_3=z_1, \cdots, \xi_{3N-2}=x_N, \xi_{3N-1}=y_N, \xi_{3N}=z_N$$

考虑如下形式的微分约束

$$\sum_{i=1}^{3N} A_i(\xi_j, t)\dot{\xi}_i + A(\xi_j, t)=0 \qquad (j=1,2,\cdots,3N) \tag{1.2.5}$$

将式(1.2.5)表示为微分形式

$$\sum_{i=1}^{3N} A_i(\xi_j, t)\mathrm{d}\xi_i + A(\xi_j, t)\mathrm{d}t=0 \tag{1.2.6}$$

称其为 **Pfaff 约束**。Pfaff 约束(1.2.6)可分为三种情形：

①恰当微分形式，此时可积分为有限形式；

②非恰当微分的可积情形，此时也可积分为有限形式；

③不可积的情形。

为叙述方便，不再区分位形变量和时间变量，将式(1.2.6)表示为

$$\sum_{\mu=1}^{3N+1} A_\mu(\xi_\nu)\mathrm{d}\xi_\mu=0 \qquad (\nu=1,2,\cdots,3N+1) \tag{1.2.7}$$

其中

$$\xi_{3N+1}=t, A_{3N+1}=A$$

下面分四种情形来讨论 Pfaff 形式(1.2.7)的可积性问题[4]。

1. 第一种情形

式(1.2.7)是只有两个变量的情形，即有形式

$$A(x,y)\mathrm{d}x+B(x,y)\mathrm{d}y=0 \tag{1.2.8}$$

定理 1 Pfaff 约束(1.2.8)一定是可积的。

证明:如果有

$$\frac{\partial A}{\partial y}=\frac{\partial B}{\partial x}$$

则由 Green 公式有

$$\oint A\mathrm{d}x+B\mathrm{d}y=\iint\left(\frac{\partial B}{\partial x}-\frac{\partial A}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$$

因此，$A\mathrm{d}x+B\mathrm{d}y$ 是一恰当微分。

如果

$$\frac{\partial A}{\partial y}\neq\frac{\partial B}{\partial x}$$

则由一阶线性偏微分方程的存在性定理知，一定可以找到某函数 $\mu(x,y)\neq0$，使得

$$\frac{\partial(\mu A)}{\partial y}=\frac{\partial(\mu B)}{\partial x}$$

因此，$\mu(A\mathrm{d}x+B\mathrm{d}y)$是恰当微分。

2. 第二种情形

式(1.2.7)有三个变量的情形，即有形式

$$A(x,y,z)\mathrm{d}x+B(x,y,z)\mathrm{d}y+C(x,y,z)\mathrm{d}z=0 \tag{1.2.9}$$

定理 2 Pfaff 约束(1.2.9)完全可积的充分必要条件是

$$A\left(\frac{\partial B}{\partial z}-\frac{\partial C}{\partial y}\right)+B\left(\frac{\partial C}{\partial x}-\frac{\partial A}{\partial z}\right)+C\left(\frac{\partial A}{\partial y}-\frac{\partial B}{\partial x}\right)=0 \tag{1.2.10}$$

证明 见文献[4]。

3. 第三种情形

式(1.2.7)有 n 个变量的情形，即有形式

$$\sum_{s=1}^{n} A_s(\xi_k)\mathrm{d}\xi_s=0 \qquad (k=1,2,\cdots,n) \tag{1.2.11}$$

定理 3 Pfaff 约束(1.2.11)可积的充分必要条件是

$$A_s\left(\frac{\partial A_r}{\partial \xi_l}-\frac{\partial A_l}{\partial \xi_r}\right)+A_r\left(\frac{\partial A_l}{\partial \xi_s}-\frac{\partial A_s}{\partial \xi_l}\right)+A_l\left(\frac{\partial A_s}{\partial \xi_r}-\frac{\partial A_r}{\partial \xi_s}\right)=0 \quad (s,r,l=1,2,\cdots,n) \tag{1.2.12}$$

证明从略。

推论 如果满足条件

$$\frac{\partial A_s}{\partial \xi_r}=\frac{\partial A_r}{\partial \xi_s} \qquad (s,r=1,2,\cdots,n) \tag{1.2.13}$$

则式(1.2.11)一定可积。

1.2.4 完整约束

几何约束和可积分的微分约束，称为**完整约束**。可积的微分约束，也称为半完整约束[1]。约束(1.1.1)～(1.1.5)，(1.2.3)都是完整约束。可以证明微分约束

$$yz(y+z)\dot{x}+zx(z+x)\dot{y}+xy(x+y)\dot{z}=0 \tag{1.2.14}$$

是完整约束。实际上，对比式(1.2.9)，有

$$A=yz(z+y),B=zx(z+x),C=xy(x+y)$$

做计算，有

$$\frac{\partial A}{\partial y}=z(y+z)+yz,\frac{\partial A}{\partial z}=y(y+z)+yz$$

$$\frac{\partial B}{\partial x}=z(z+x)+zx,\frac{\partial B}{\partial z}=x(z+x)+zx$$

$$\frac{\partial C}{\partial x}=y(x+y)+xy,\frac{\partial C}{\partial y}=x(x+y)+xy$$

于是有

$$A\left(\frac{\partial B}{\partial z}-\frac{\partial C}{\partial y}\right)+B\left(\frac{\partial C}{\partial x}-\frac{\partial A}{\partial z}\right)+C\left(\frac{\partial A}{\partial y}-\frac{\partial B}{\partial x}\right)=0$$

由定理 2 知,约束(1.2.14)是可积的。

1.2.5 非完整约束

不可积分的微分约束,称为**非完整约束**。约束(1.1.6),(1.1.7),(1.1.8)都是非完整约束。冰刀不允许横滑的条件为

$$\dot{x}\sin\theta-\dot{y}\cos\theta=0 \tag{1.2.15}$$

其中(x,y)为冰刀与平面接触点的坐标;θ为冰刀方向与平面上固定方向轴的夹角。现在证明约束(1.2.15)是不可积分的。实际上,将式(1.2.15)写成形式

$$\sin\theta\mathrm{d}x-\cos\theta\mathrm{d}y+0\mathrm{d}\theta=0$$

此时有

$$A=\sin\theta,B=-\cos\theta,C=0$$

计算得

$$A\left(\frac{\partial B}{\partial\theta}-\frac{\partial C}{\partial y}\right)+B\left(\frac{\partial C}{\partial x}-\frac{\partial A}{\partial\theta}\right)+C\left(\frac{\partial A}{\partial y}-\frac{\partial B}{\partial x}\right)=\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$$

由定理 2 知,约束(1.2.15)是不可积的,即是非完整的。

非完整约束的例子还有很多,如尖缘小轮;两个轴相联结的轮子沿水平面的纯滚动;滚球;滚盘;由三个粗糙均匀圆柱组成的系统,其中两个半径为r的同样的圆柱沿水平面滚动,第三个半径为R的圆柱沿这两个圆柱滚动;四轮小车;三轮桌台;Appell-Hamel 椅子轮;摩擦减速器等[5-8]。

§1.3 定常约束与非定常约束

约束可分为依赖于时间的约束和不依赖于时间的约束。

1.3.1 定常约束

如果时间t不明显出现于约束方程中,则称其为**定常约束**,或稳定约束。例如,约束

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{1.3.1}$$

是定常约束,它表明点处在半轴长为a,b,c的固定椭球面上。约束(1.1.1)~(1.1.7)都是定常约束。约束(1.1.1)~(1.1.5)都是定常完整约束。约束(1.1.6),(1.1.7)都是定常非完整约束。定常完整约束表示点处在不随时间变形且不随时间移动的固定曲面上。

1.3.2 非定常约束

如果时间t明显出现于约束方程中,则称其为**非定常约束**,或不稳定约束。例如,约束

$$\frac{x^2}{a^2t^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{1.3.2}$$

是非定常完整约束，它表明点在运动过程中保持在椭球面上，但此椭球面的一个半轴不断改变自己的量值，亦即点处在变形的椭球面上。又如，约束

$$(x-5t)^2+y^2+z^2=R^2 \tag{1.3.3}$$

也是非定常的完整约束，它表明球心以等于 5 单位的速度沿 x 轴移动，而球本身带走处于球面上的点。非定常的完整约束表示点保持在随时间变形的曲面上，或者保持在随时间移动的曲面上。

具有定常约束的系统与具有非定常约束的系统，在运动性质上和研究方法上都有着本质的差异。研究非定常约束系统比研究定常约束系统要复杂得多。

§1.4 单面约束与双面约束

约束可分为不等式约束和等式约束。

1.4.1 双面约束

用等式表示的约束，称为**双面约束**，或双侧约束，或不可解约束。约束(1.1.1)～(1.1.3)，(1.1.5)～(1.1.8)都是双面约束，其中约束(1.1.1)～(1.1.3)，(1.1.5)是双面完整定常约束，而约束(1.1.6)，(1.1.7)是双面非完整定常约束，约束(1.1.8)是双面非完整非定常约束。

双面约束表示点在两个方面都受到限制。例如，约束

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{1.4.1}$$

表示点处于一个椭球面上，它既不能跑到椭球面里面，也不能跑到椭球面外面，好像被夹在两个无限接近的椭球面之间，在两个方面都受到限制。又如，约束(1.2.15)表示冰刀在横向既不能向左滑，也不能向右滑，在左、右两个方面都受到限制。

1.4.2 单面约束

用不等式表示的约束，称为**单面约束**，或单侧约束，或可解约束。约束(1.1.4)是单面完整定常约束。例如，约束

$$x^2+y^2+z^2-R^2\leqslant 0 \tag{1.4.2}$$

表示点在半径为 R 的球面上，也可以跑到球面内，但不能跑到球面的外面，它在一个方面受到限制。一个半径为 a 的圆球在水平面上运动，限制球与平面接触点仅允许在 Ox 轴正向又滚又滑，约束方程表示为

$$\dot{x}-a\omega_y\geqslant 0 \tag{1.4.3}$$

其中 $\dot{x}$ 为球心速度在固定轴 Ox 上的投影；ω_y 为球的角速度在固定轴 Oy 上的

投影,用 Euler 角及其时间导数表示为

$$\omega_y=\dot{\theta}\sin\psi-\dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi \tag{1.4.4}$$

约束(1.4.3)是单面非完整定常约束。

通常将力学系统分成无约束力学系统和约束力学系统[9]。Newton 和 Euler力学是无约束系统力学,而 d'Alembert 和 Lagrange 力学是约束系统力学。因此,约束是**分析力学**的重要基本概念。

思考题

1.1 子弹出膛后走一抛物线,抛物线是约束吗?

1.2 试说明约束(1.2.15)不限制位置(x,y,θ),即从一个位置(x_1,y_1,θ_1)向另一任意位置(x_2,y_2,θ_2)的过渡,有多种方法。

1.3 约束

$$x^2+y^2+z^2-c^2=0$$

与约束

$$x\dot{x}+y\dot{y}+z\dot{z}=0$$

有何区别?

习题

1.1 如图所示,质量为 m_1 和 m_2 的两重珠用长 l 的不可伸长的轻绳联结,绳子跨过半径为 r 的定滑轮。假设绳子与滑轮之间无滑动。取 x_1,x_2 和 φ 为坐标。试列写系统在铅垂面内运动时的约束方程。

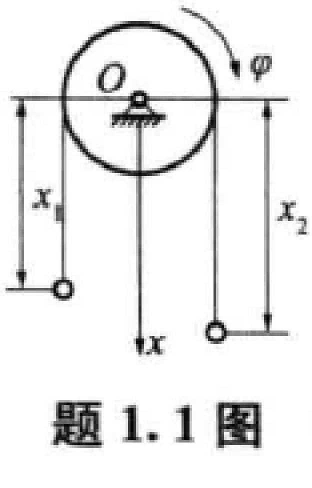
答:$x_1+x_2+\pi r-l=0,\dot{x}_1+r\dot{\varphi}=0,\dot{x}_2-r\dot{\varphi}=0$

1.2 一长 l 的匀质杆支承在水平地板上,并靠在高 $h<l$ 的墙上,如图所示。取(x_1,y_1,x_2,y_2)为杆位置坐标,试列写约束方程。

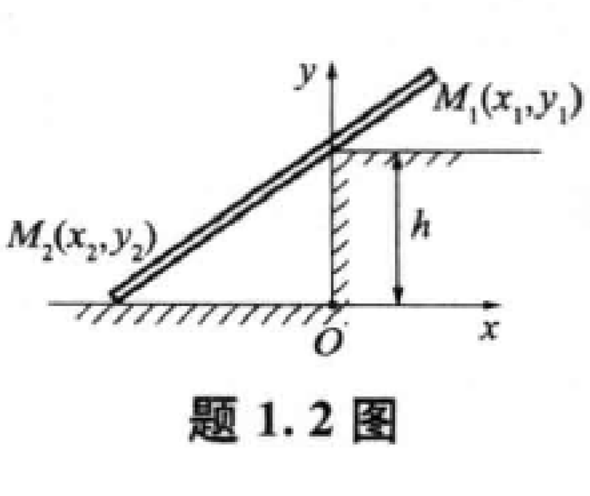
答:$y_2=0$

$(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2-l^2=0$

$$\frac{y_1}{x_1-x_2}=-\frac{h}{x_2}$$



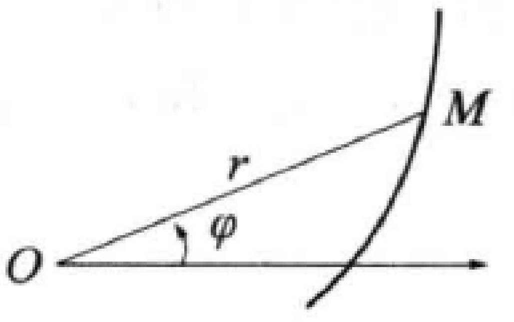
题 1.1 图



题 1.2 图

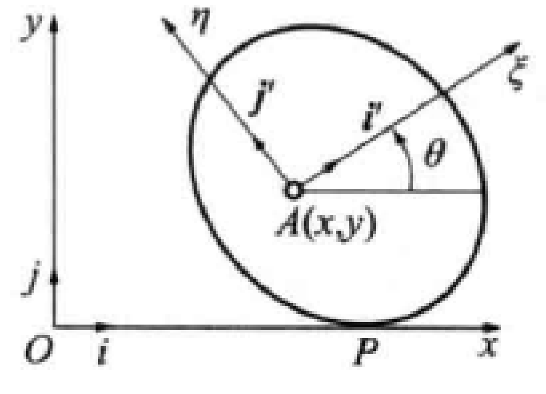
1.3　如图所示，一点 M 在平面上运动，其位置可用极坐标(r,φ)来表示。现选坐标 r,φ 和 A 来描述点 M 的位置，其中 A 为矢径 r 所扫过的面积的两倍，当 $\varphi=0$ 时，$A=0$。试写出 A 与 r,φ 的关系。

答：$\dot{A}=r^2\dot{\varphi}$



题 1.3 图

1.4　求柱形侧面的物体沿平面滚动而不滑动的条件。基线方程是已知的，这条线在柱体侧面的横截面中得到，用固结于柱体的坐标表示。为确定截面在其平面上的位置，可选 3 个参数：基点 A 的坐标(x,y)以及固结于柱面的坐标系 $A\xi\eta\zeta$ 的转角 θ，如图所示。



题 1.4 图

答：$\dot{x}-\dot{\theta}(\xi_p\sin\theta+\eta_p\cos\theta)=0$

$\dot{y}+\dot{\theta}(\xi_p\cos\theta-\eta_p\sin\theta)=0$

其中，ξ_p,η_p 为接触点 P 在 $A\xi\eta\zeta$ 中的坐标，是已知的。

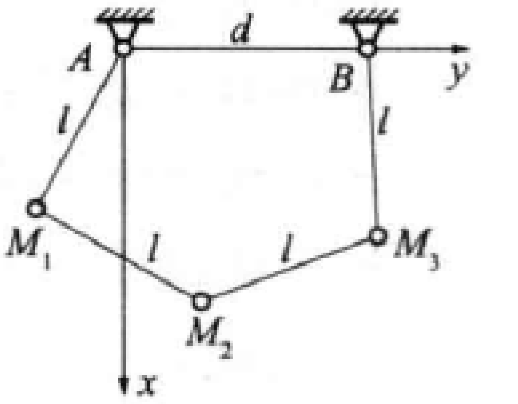
1.5　如图所示，三质量相同的质点，用四根质量不计的长均为 l 的杆铰接在同一平面内，取此三点的坐标$(x_1,y_1,x_2,y_2,x_3,y_3)$作为系统位形的坐标，试写出约束方程。

答：$x_1^2+y_1^2-l^2=0$

$x_3^2+y_3^2-l^2=0$

$(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2-l^2=0$

$(x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2-l^2=0$



题 1.5 图

1.6　试判断下列约束是否完整。

1)$-\dot{x}\sin\theta+\dot{y}\cos\theta-l\dot{\theta}=0$

2)$\dot{x}_c+a(\dot{\psi}\cos\theta\cos\psi-\dot{\theta}\sin\theta\sin\psi+\dot{\varphi}\cos\psi)=0$

3)$x\dot{y}-y\dot{x}-f(t)=0(f(t)\neq0)$

4)$\dot{x}(\ln z+3x^2+y\exp x)+\dot{y}(y^2+\exp x)+\dot{z}\left(\dfrac{x}{z}+z^2\right)=0$

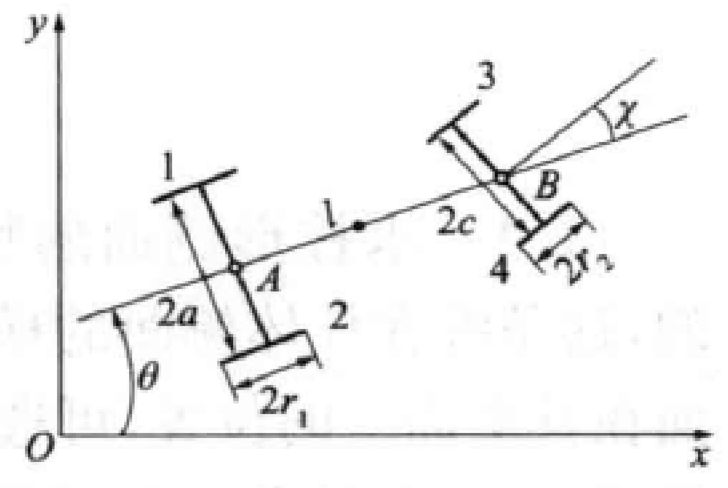
答:1),2),3)非完整;4)完整

1.7 验证约束

$$\dot{x}(x^2+y^2+z^2)+z(x\dot{x}+y\dot{y}+z\dot{z})=0$$

不满足式(1.2.13),但它是可积的。

1.8 四轮小车,如图所示,它的位置由 8 个参数确定:铰链 B 的坐标 (x,y);角 θ,χ 以及轮子的转角 $\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3$ 和 φ_4。试列写四轮纯滚动和不允许横滑而产生的约束方程。



题 1.8 图

答:点 B 无横向滑动

$$-\dot{x}\sin(\theta+\chi)+\dot{y}\cos(\theta+\chi)=0$$

点 A 无横向滑动

$$-\dot{x}\sin\theta+\dot{y}\cos\theta-l\dot{\theta}=0$$

轮 1 做纯滚动

$$\dot{x}\cos\theta+\dot{y}\sin\theta-a\dot{\theta}-r_1\dot{\varphi}_1=0$$

轮 2 做纯滚动

$$\dot{x}\cos\theta+\dot{y}\sin\theta+a\dot{\theta}-r_1\dot{\varphi}_2=0$$

轮 3 做纯滚动

$$\dot{x}\cos(\theta+\chi)+\dot{y}\sin(\theta+\chi)-c(\dot{\theta}+\dot{\chi})-r_2\dot{\varphi}_3=0$$

轮 4 做纯滚动

$$\dot{x}\cos(\theta+\chi)+\dot{y}\sin(\theta+\chi)+c(\dot{\theta}+\dot{\chi})-r_2\dot{\varphi}_4=0$$

参考文献

[1]Гантмахер Ф. Р. Лекции по Аналитической Механике[M]. Москва:ГИФМЛ,1960.

[2]Ф·Р·甘特马赫.分析力学讲义[M].钟奉俄,薛向西,译.北京:高等教育出版社,1964.

[3]Pars LA. A Treatise on Analytical Dynamics[M]. London:Heinemann,1965.

[4]Rosenberg RM. Analytical Dynamics of Discrete Systems[M]. New York:Pleum Press,1977.

[5]R·罗森伯.离散系统分析动力学[M].程迺巽,郭坤,译.北京:人民教育出版社,1981.

[6]陈滨.分析动力学[M].北京:北京大学出版社,1987.

[7]Неймарк ЮИ,Фуфаев НА. Динамика Неголономных Систем[M]. Москва:Наука,1967.

[8]Лурье АИ. Аналитическая Механика[M]. Москва:ГИФМЛ,1961.

[9]梅凤翔．非完整系统力学基础[M]. 北京:北京工业学院出版社,1985.
[10] Whittenburg J. Dynamics of Systems of Rigid Bodies [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1977.
[11]Papastavridis JG. Analytical Mechanics[M]. New York: Oxford Univ. Press, 2002.

2

广义坐标与准坐标

广义坐标是分析力学的特色，准速度和准坐标对非完整力学显得更为重要。本章讨论广义坐标、广义速度和广义加速度、多余坐标、准速度和准坐标等。

§2.1 广义坐标

2.1.1 广义坐标的定义

凡是能够确定系统位置的，适当选取的独立变量称为**广义坐标**。广义坐标比直角坐标意义更广泛。广义坐标可以是距离、角度、面积以及其他的量。特别地，曲线坐标，如平面上的极坐标、空间中的柱坐标和球坐标等，都可选作广义坐标。

2.1.2 广义坐标的形成

广义坐标也称为 Lagrange 坐标。但是，在 Lagrange 著作中未见“广义坐标”的提法，也未见 q 的记号。在 Lagrange 著作的附注Ⅵ中提到“用 $q_1, q_2, \cdots, q_k$ 表记 k 个新变量，使得 $3n$ 个坐标 $x_1, y_1, z_1, \cdots, x_n, y_n, z_n$ 可表示为这些变量和时间 t 的函数”[1]。这个附注由法国数学家，巴黎科学院院士 Bertrand JLF (1822—1900)给出。Appell 的著作将这些坐标称为完整系统的坐标[2]。Levi-Civita 和 Amaldi 称其为广义坐标，或 Lagrange 坐标[3]。

2.1.3 广义坐标的意义

当力学系统加上约束时，由直角坐标过渡到广义坐标是特别方便的，而且也是十分必要的。

武际可的《力学史》有如下论述[4]：

“按照当时已有的力学知识，要分析一个稍许复杂的机构，例如一个有五级

齿轮传动系统的运动，也还是无能为力的。如果拿这个问题去请教牛顿，牛顿只会处理自由质点运动，不会处理刚体运动，何况还是带约束的呢。而转去请教欧拉呢？他不得不将整个系统化归为五个'隔离体'，即五个刚体，分别列出五个刚体的运动方程，而不同刚体之间又有作用力和反作用力的耦合，所以得面对数十个方程联立的微分方程组。这样处理问题实在太复杂了。"

"拉格朗日自有他的高招，他将这个系统化为一个广义坐标的系统，因为五个轮子的系统只要有一个参量便可以描述它的状态。例如，随便以其中一个轮子的转角为参量，这个参量知道了，整体齿轮系统的状态也便知道了。然后再计算当系统动起来后系统的动能。这时便可以列出一个广义坐标满足的二阶方程，这是何等的简便啊！"

引进广义坐标，是分析力学的一个特色。

看下面一个例子。小球 M_1 用 l_1 的轻杆拴于固定点 O，小球 M_2 用长 l_2 的轻杆拴于小球 M_1 上，系统运动保持在铅垂平面内。为确定系统的位置，可选小球 M_1 的坐标 (x_1, y_1) 和小球 M_2 的坐标 (x_2, y_2)，如图 2.1 所示。这 4 个量之间有两个双面完整约束，即

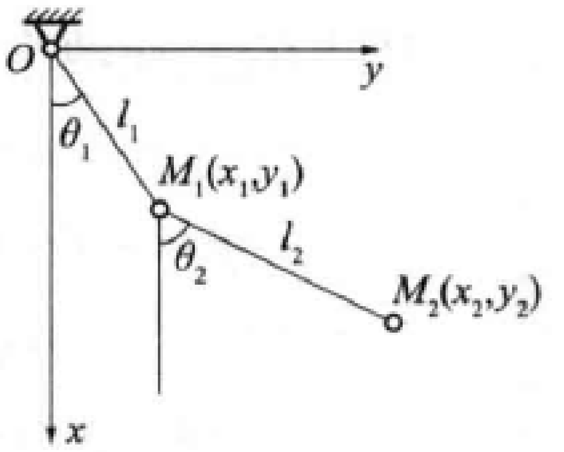


图 2.1

$$x_1^2 + y_1^2 = l_1^2$$

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = l_2^2$$

这样，只需从 (x_1, y_1)，(x_2, y_2) 中各选一个，例如选定 x_1, x_2，则 y_1, y_2 可由以上两式确定，于是便可确定系统的位置。但是，这并不是一个好的方案。现在选轻杆与铅垂线的夹角 θ_1, θ_2 为坐标，当给定角 θ_1, θ_2 时，则系统的位置完全确定。角度 θ_1, θ_2 就是广义坐标。此时直角坐标可用广义坐标表示出，有

$$x_1 = l_1 \cos\theta_1,\ y_1 = l_1 \sin\theta_1$$

$$x_2 = l_1 \cos\theta_1 + l_2 \cos\theta_2,\ y_2 = l_1 \sin\theta_1 + l_2 \sin\theta_2$$

而约束方程自动满足。

一般地，如果力学系统由 N 个质点组成，所受完整约束为式(1.2.1)，可选 $n = 3N - d$ 个广义坐标 $q_1, q_2, \cdots, q_n$，这时所有点的直角坐标可用广义坐标和时间表示为

$$\begin{aligned} x_i &= x_i(q_s, t) \\ y_i &= y_i(q_s, t) \qquad (i = 1, 2, \cdots, N; s = 1, 2, \cdots, n) \\ z_i &= z_i(q_s, t) \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

点的矢径可表示为

$$\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_i(q_s, t) \tag{2.1.2}$$

如果约束是定常的，那么可选取广义坐标使得时间 t 不出现于方程(2.1.1)中，此时有

$$\boldsymbol{r}_i=\boldsymbol{r}_i(q_s) \tag{2.1.3}$$

为了求得质点系的运动,只要先求出广义坐标 $q_s(s=1,2,\cdots,n)$ 对时间的依赖关系,然后将其代入式(2.1.1)求出全部直角坐标 $x_i,y_i,z_i(i=1,2,\cdots,N)$ 作为时间的函数。但是,为求得广义坐标,就必须有相对 $q_s(s=1,2,\cdots,n)$ 的微分方程。在分析力学中就给出组成这种方程的法则。

例 1 自由刚体。

为确定自由刚体在空间的位置,可选刚体上某一点 A 的直角坐标 (x_A,y_A,z_A) 以及确定与刚体固连的轴 $A\xi\eta\zeta$ 相对于固定直角坐标系 $Oxyz$ 转动的三个 Euler 角 ψ,θ,φ 为广义坐标,如图 2.2 所示。此时,刚体上的点在两个坐标系中的坐标 (x,y,z) 和 (ξ,η,ζ) 之间有关系

$$x=x_A+\xi(\cos\psi\cos\varphi-\sin\psi\sin\varphi\cos\theta)-$$
$$\eta(\cos\psi\sin\varphi+\sin\psi\cos\varphi\cos\theta)+\zeta(\sin\psi\sin\theta)$$
$$y=y_A+\xi(\sin\psi\cos\varphi+\cos\psi\sin\varphi\cos\theta)+\eta(-\sin\psi\sin\varphi+\cos\psi\cos\varphi\cos\theta)-$$
$$\zeta(\sin\psi\sin\theta)$$
$$z=z_A+\xi\sin\varphi\sin\theta+\eta\cos\varphi\sin\theta+\zeta\cos\theta$$

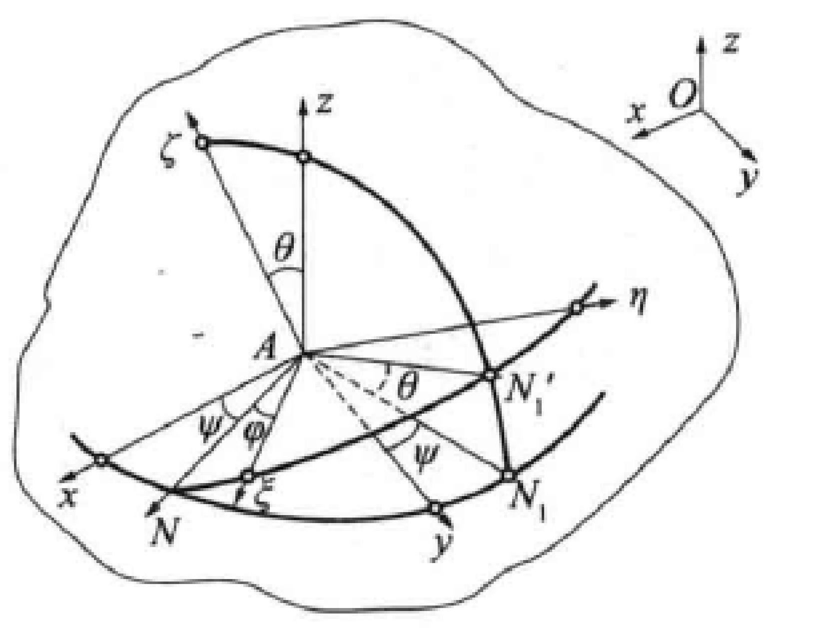


图 2.2

例 2 一直杆以常角速度 ω 绕铅垂轴 Oz 转动,杆与轴 Oz 夹角 α 为常值。杆上有一小环 M,小环可沿杆滑动。取小环对杆与轴 Oz 交点的距离 r 为坐标,如图 2.3 所示。试将小环的直角坐标 (x,y,z) 用广义坐标 r 表示出来。

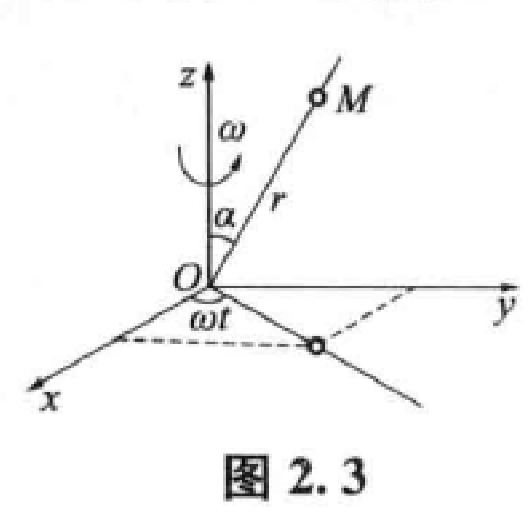


图 2.3

由图 2.3 容易看出

$$x=r\sin\alpha\cos\omega t,y=r\sin\alpha\sin\omega t,z=r\cos\alpha$$

§2.2 广义速度和广义加速度

2.2.1 广义速度

广义坐标对时间的导数 $\dot{q}_s(s=1,2,\cdots,n)$ 称为**广义速度**。系统中点的速度 $\boldsymbol{v}_i$ 用广义速度 $\dot{q}_s(s=1,2,\cdots,n)$ 的线性式给出

$$\boldsymbol{v}_i=\dot{\boldsymbol{r}}_i=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_s}\dot{q}_s+\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t} \tag{2.2.1}$$

或写成直角坐标形式

$$\begin{aligned}\dot{x}_i&=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial x_i}{\partial q_s}\dot{q}_s+\frac{\partial x_i}{\partial t}\\ \dot{y}_i&=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial y_i}{\partial q_s}\dot{q}_s+\frac{\partial y_i}{\partial t}\\ z_i&=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial z_i}{\partial q_s}\dot{q}_s+\frac{\partial z_i}{\partial t}\end{aligned} \tag{2.2.2}$$

利用式(2.2.1)和式(2.1.2)，容易导出两个经典 **Lagrange** 关系

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial \dot{q}_s}&=\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_s}\\ \frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial q_s}&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_s}\end{aligned}\right.\quad (i=1,2,\cdots,N;s=1,2,\cdots,n) \tag{2.2.3}$$

可将§2.1中例2的点的速度用广义速度 $\dot{r}$ 表示，为

$$\begin{aligned}\dot{x}&=\dot{r}\sin\alpha\cos\omega t-r\omega\sin\alpha\sin\omega t\\ \dot{y}&=\dot{r}\sin\alpha\sin\omega t+r\omega\sin\alpha\cos\omega t\\ \dot{z}&=\dot{r}\cos\alpha\end{aligned}$$

2.2.2 广义加速度

广义坐标对时间的两次导数 $\ddot{q}_s(s=1,2,\cdots,n)$ 称为**广义加速度**。系统中点的加速度矢量 $\boldsymbol{a}_i$ 可用广义加速度的线性式表示出，有

$$\boldsymbol{a}_i=\dot{\boldsymbol{v}}_i=\ddot{\boldsymbol{r}}_i=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_s}\ddot{q}_s+\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_i}{\partial q_s\partial q_k}\dot{q}_s\dot{q}_k+2\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_i}{\partial q_s\partial t}\dot{q}_s+\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_i}{\partial t^2} \tag{2.2.4}$$

或写成直角坐标形式

$$\ddot{x}_i = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial q_s}\ddot{q}_s + \sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_s \partial q_k}\dot{q}_s\dot{q}_k + 2\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_s \partial t}\dot{q}_s + \frac{\partial^2 x_i}{\partial t^2}$$

$$\ddot{y}_i = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial y_i}{\partial q_s}\ddot{q}_s + \sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 y_i}{\partial q_s \partial q_k}\dot{q}_s\dot{q}_k + 2\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial^2 y_i}{\partial q_s \partial t}\dot{q}_s + \frac{\partial^2 y_i}{\partial t^2} \qquad (2.2.5)$$

$$\ddot{z}_i = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial z_i}{\partial q_s}\ddot{q}_s + \sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 z_i}{\partial q_s \partial q_k}\dot{q}_s\dot{q}_k + 2\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial^2 z_i}{\partial q_s \partial t}\dot{q}_s + \frac{\partial^2 z_i}{\partial t^2}$$

由式(2.2.4)和式(2.2.1),可导出如下重要关系[5]

$$\frac{\partial \ddot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial \ddot{q}_s} = \frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial \dot{q}_s} = \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_s}, \quad \frac{\partial \ddot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial \dot{q}_s} = 2\frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial q_s} \qquad (i=1,2,\cdots,N; s=1,2,\cdots,n) \qquad (2.2.6)$$

对§2.1中例2,可将点的加速度用广义加速度 $\ddot{r}$ 表示为

$$\ddot{x} = \ddot{r}\sin\alpha\cos\omega t - 2\dot{r}\omega\sin\alpha\sin\omega t - r\omega^2\sin\alpha\cos\omega t$$

$$\ddot{y} = \ddot{r}\sin\alpha\sin\omega t + 2\dot{r}\omega\sin\alpha\cos\omega t - r\omega^2\sin\alpha\sin\omega t$$

$$\ddot{z} = \ddot{r}\cos\alpha$$

2.2.3 非完整约束在广义坐标和广义速度下的表达

将式(2.1.1)和式(2.2.2)代入非完整约束方程(1.2.2),得到

$$f_\beta(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t) = 0 \qquad (2.2.7)$$

其中

$$f_\beta(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t) = F_\beta(x_i(\boldsymbol{q}, t), y_i(\boldsymbol{q}, t), z_i(\boldsymbol{q}, t), \dot{x}_i(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t), \dot{y}_i(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t), \dot{z}_i(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t), t) \qquad (2.2.8)$$

将式(2.1.1)和式(2.2.2)代入非完整约束方程(1.2.3),得到

$$\sum_{s=1}^{n} a_{\varepsilon+\beta,s}\dot{q}_s + a_{\varepsilon+\beta} = 0 \qquad (\beta=1,2,\cdots,g; \varepsilon=n-g) \qquad (2.2.9)$$

其中

$$a_{\varepsilon+\beta,s} = \sum_{i=1}^{N}\left(A_{\beta i}\frac{\partial x_i}{\partial q_s} + B_{\beta i}\frac{\partial y_i}{\partial q_s} + C_{\beta i}\frac{\partial z_i}{\partial q_s}\right)$$

$$a_{\varepsilon+\beta} = D_\beta + \sum_{i=1}^{N}\left(A_{\beta i}\frac{\partial x_i}{\partial t} + B_{\beta i}\frac{\partial y_i}{\partial t} + C_{\beta i}\frac{\partial z_i}{\partial t}\right) \qquad (2.2.10)$$

当 $D_\beta=0$,且式(2.1.1)不含时间 t 时,有 $a_{\varepsilon+\beta}=0$,式(2.2.9)成为线性齐次的

$$\sum_{s=1}^{n} a_{\varepsilon+\beta,s}\dot{q}_s = 0 \qquad (\beta=1,2,\cdots,g; \varepsilon=n-g) \qquad (2.2.11)$$

例1 如图2.4所示,半径为 a 的均质圆球在倾角 α 的斜面上做纯滚动,试列写约束方程。

解:设球心 C 坐标为 (x,y),Euler 角为 ψ,θ,φ。球角速度在与固定系 $Oxyz$ 相平行的系 $Cx_1y_1z_1$ 上的投影为 $\omega_x,\omega_y,\omega_z$。接触点 P 的速度为零,表示为

$$\dot{x}-a\omega_y=0,\dot{y}+a\omega_x=0$$

其中

$$\omega_x=\dot{\theta}\cos\psi+\dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi$$

$$\omega_y=\dot{\theta}\sin\psi-\dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi$$

$$\omega_z=\dot{\psi}+\dot{\varphi}\cos\theta$$

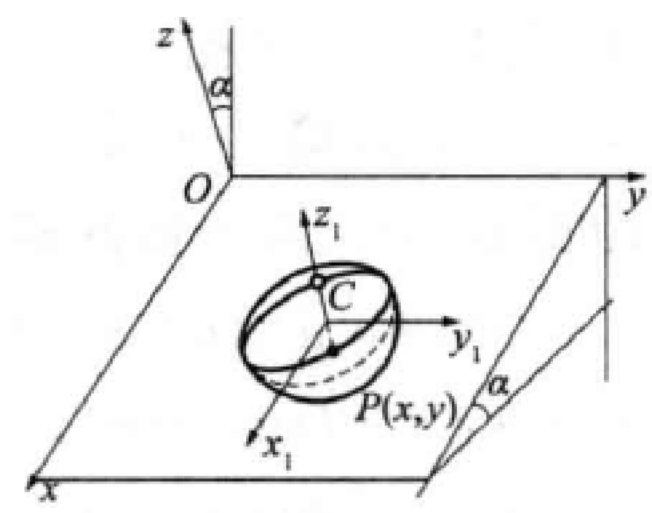


图 2.4

于是,约束方程表示为

$$\dot{x}-a(\dot{\theta}\cos\psi+\dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi)=0$$

$$\dot{y}+a(\dot{\theta}\sin\psi-\dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi)=0$$

例 2 一均质圆球在铅垂固定粗糙圆锥内壁上的滚动问题。

解:如图 2.5 所示,取 r,γ 及三个 Euler 角 ψ,θ,φ 为广义坐标,其中 r 为接触点 P 离圆锥顶点 O 的距离,γ 为平面 POz 与平面 zOx 之间的夹角。圆球质点 C 的坐标为

$$x=(r\sin\alpha-a\cos\alpha)\cos\gamma$$

$$y=(r\sin\alpha-a\cos\alpha)\sin\gamma$$

$$z=r\cos\alpha+a\sin\alpha$$

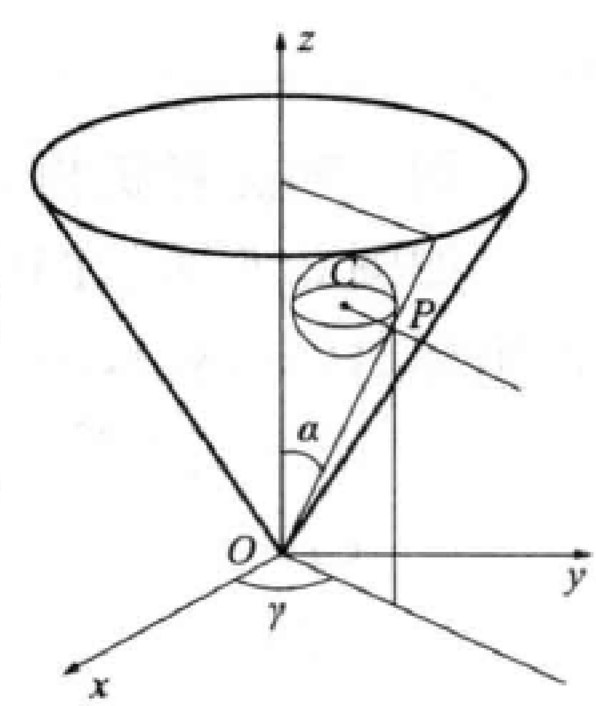


图 2.5

其中 α 为半锥角,a 为球的半径。质心 C 的速度为

$$\dot{x}=-(r\sin\alpha-a\cos\alpha)\dot{\gamma}\sin\gamma+\dot{r}\sin\alpha\cos\gamma$$

$$\dot{y}=(r\sin\alpha-a\cos\alpha)\dot{\gamma}\cos\gamma+\dot{r}\sin\alpha\sin\gamma$$

$$\dot{z}=\dot{r}\cos\alpha$$

球所受约束是点 P 的速度为零,即

$$v_p=v_c+\boldsymbol{\omega}\times\overrightarrow{CP}=0$$

投影到固定轴上,得

$$\begin{aligned}&\dot{x}-a\omega_y\sin\alpha-a\omega_z\cos\alpha\sin\gamma=0\\&\dot{y}+a\omega_z\cos\alpha\cos\gamma+a\omega_x\sin\alpha=0\\&\dot{z}+a\omega_x\cos\alpha\sin\gamma-a\omega_y\cos\alpha\cos\gamma=0\end{aligned}\tag{a}$$

其中 $\omega_x,\omega_y,\omega_z$ 为球的角速度在固定系 $Oxyz$ 上的投影,可用 Euler 角及其时间导数表示为

$$\begin{aligned}\omega_x&=\dot\theta\cos\psi+\dot\varphi\sin\theta\sin\psi\\ \omega_y&=\dot\theta\sin\psi-\dot\varphi\sin\theta\cos\psi\\ \omega_z&=\dot\psi+\dot\varphi\cos\theta\end{aligned}\tag{b}$$

注意到三个方程(a)不完全独立。实际上,将(a)的第一式乘以 $\cos\alpha\cos\gamma$,第二式乘以 $\cos\alpha\sin\gamma$,第三式乘以$(-\sin\alpha)$,然后相加,便得 0=0。两个彼此独立的约束方程最终可表示为

$$\dot\gamma(r\sin\alpha-a\cos\alpha)+a\dot\varphi\{\cos\alpha\cos\theta+\sin\alpha\sin\theta\sin(\psi-\gamma)\}+a\dot\psi\cos\alpha+a\dot\theta\sin\alpha\cos(\psi-\gamma)=0$$

$$\dot r-a\dot\theta\sin(\psi-\gamma)+a\dot\varphi\sin\theta\cos(\psi-\gamma)=0$$

§2.3 多余坐标

2.3.1 多余坐标的概念

如果选取的参数不是完全独立的,则称这些参数为**多余坐标**。

例 四连杆机构。

如图 2.6 所示四连杆机构,为确定系统的位置,可选两铰链的直角坐标 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,但是有 3 个约束方程

$$\begin{aligned}&x_1^2+y_1^2=l_1^2\\ &(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2=l_2^2\\ &(d-x_2)^2+y_2^2=l_3^2\end{aligned}\tag{2.3.1}$$

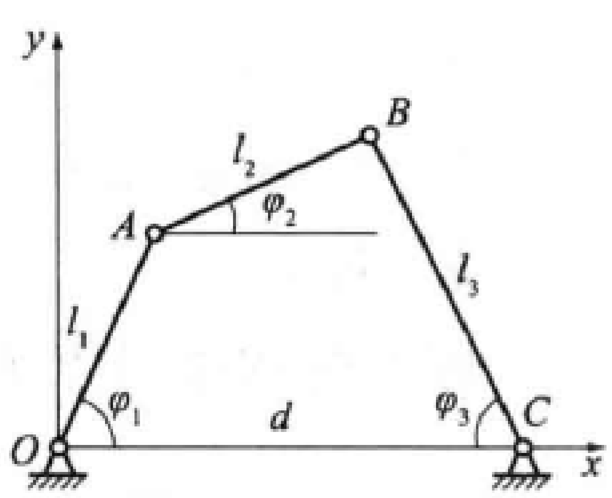


图 2.6

如果选 3 个角 $\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3$ 为坐标,则有两个约束方程

$$\begin{aligned}&l_1\cos\varphi_1+l_2\cos\varphi_2+l_3\cos\varphi_3=d\\ &l_1\sin\varphi_1+l_2\sin\varphi_2-l_3\sin\varphi_3=0\end{aligned}\tag{2.3.2}$$

如果选 φ_1 为坐标,则 φ_2 和 φ_3 可借助方程(2.3.2)用 φ_1 表出,这时 φ_1 是独立参数。但是,最终表示出 $x_1=x_1(\varphi_1)$,$y_1=y_1(\varphi_1)$,$x_2=x_2(\varphi_1)$,$y_2=y_2(\varphi_1)$将是非常麻烦的。此例中仅用一个参数 φ_1 便可确定系统的位置,但为方便起见,宁可选 3 个参数 $\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3$ 而带有两个约束方程(2.3.2)。此时,称 φ_2,φ_3 为多余坐标。

2.3.2 多余坐标的意义

从以上例子可以看出，选多余坐标在运动学研究上有意义，同时在静力学和动力学研究上也有意义。为求约束力常常选多余坐标。为在静力学和动力学研究中求出与约束相应的约束力，通常采用 Lagrange 乘子法，而带 Lagrange 乘子的项就是约束力。

§2.4 准速度与准坐标

在力学系统中，特别是在非完整约束系统力学中，引进准坐标的概念和记号很有意义。正如近代力学家 Synge 所指出的，从单纯技术观点和数学语言上看，准坐标应予以极大注意，因为数学的发展中有许多例子说明，某个思想的发展和新的事实的获得常常是有赖于引进恰当记号的。例如，Leibniz 的恰当的微分记号成为发展经典数学分析的基础。20 世纪初，Volterra(1860—1940)，Boltzmann(1844—1902)，Hamel(1877—1954)等人将准坐标方法用于推导非完整系统的运动微分方程。Cartan(1869—1951)，Schouten(1883—1971)等人建立了非完整几何学。

2.4.1 准速度

1. 准速度的概念

设力学系统的位形由 n 个广义坐标 $q_s(s=1,2,\cdots,n)$来确定。在不少情况下，点的速度不是直接由广义速度 $\dot{q}_s(s=1,2,\cdots,n)$，而是由它们的某些线性形式来确定

$$\omega_s=\sum_{k=1}^{n} a_{sk}\dot{q}_k \qquad (s=1,2,\cdots,n) \tag{2.4.1}$$

其中系数 a_{sk} 依赖于广义坐标，这些形式的数目等于 n。如果它们的数目 $n'<n$，那么 $\omega_{n'+1},\cdots,\omega_n$ 可简单地取为 $\dot{q}_{n'+1},\cdots,\dot{q}_n$。

量 $\omega_s(s=1,2,\cdots,n)$称为**准速度**。例如，刚体绕定点转动问题中，可以选角速度矢量在与刚体固连轴上的投影为准速度，即

$$\begin{aligned}\omega_1&=\dot{\theta}\cos\varphi+\dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi\\ \omega_2&=-\dot{\theta}\sin\varphi+\dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi\\ \omega_3&=\dot{\varphi}+\dot{\psi}\cos\theta\end{aligned} \tag{2.4.2}$$

其中 ψ,θ,φ 为 **Euler 角**。这样，最重要的动力学量，如动能、动量矩主矢的投影等，用准速度表示就显得特别简单。著名的 Euler 动力学方程，实际上就是准速度下的方程。

假设式(2.4.1)的系数矩阵的行列式异于零，即

$$\det(a_{sk})\neq 0$$

则由方程(2.4.1)可解出广义速度

$$\dot{q}_s=\sum_{k=1}^{n} b_{sk}\omega_k \qquad (s=1,2,\cdots,n) \tag{2.4.3}$$

其中(b_{sk})为(a_{sk})的逆矩阵。

更一般的情况下,可取广义速度的非线性函数作为准速度,有

$$\omega_s=\omega_s(q_k,\dot{q}_k,t) \qquad (s,k=1,2,\cdots,n) \tag{2.4.4}$$

假设由此可反解出广义速度

$$\dot{q}_s=\dot{q}_s(q_k,\omega_k,t) \tag{2.4.5}$$

2. 函数对准速度的偏导数

研究某动力学函数$F(q_s,\dot{q}_s,t)$,将式(2.4.5)代入后所得函数记作F^*,即

$$F^*(q_s,\omega_s,t)=F(q_s,\dot{q}_s(q_k,\omega_k,t),t) \tag{2.4.6}$$

显然有

$$\frac{\partial F^*}{\partial \omega_s}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_k}\frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \omega_s} \tag{2.4.7}$$

特别地,当取准速度为式(2.4.1)时,有

$$\frac{\partial F^*}{\partial \omega_s}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_k}b_{ks} \tag{2.4.8}$$

2.4.2 准坐标

1. 准坐标的概念

与式(2.4.1)相关,研究广义坐标的线性形式

$$\mathrm{d}\pi_s=\sum_{k=1}^{n} a_{sk}\mathrm{d}q_k \qquad (s=1,2,\cdots,n) \tag{2.4.9}$$

量$\mathrm{d}\pi_s$称为准坐标的微分。因为关系(2.4.1)一般是不可积分的,因此π_s作为坐标的函数是不存在的。但是,纯粹条件地引入记号π_s,并称之为**准坐标**,仍不失其意义,因为这样做可简化公式并减少文字记述。引用记号[6]

$$\omega_s=\dot{\pi}_s \qquad (s=1,2,\cdots,n) \tag{2.4.10}$$

这里$\dot{\pi}_s$是引用的记号,并非π_s对时间的导数。如果表达式(2.4.9)是可积分的,那么可归结为

$$\pi_s=\pi_s(q_k) \qquad (s,k=1,2,\cdots,n)$$

这只是表明过渡到新的广义坐标。因此,准坐标的概念实际上比广义坐标的概念更广泛。

2. 函数对准坐标的偏导数

因准坐标并不明显出现于函数中,故函数对准坐标的偏导数需要专门定义。

当准速度按式(2.4.4)选取时,定义"对准坐标的偏导数运算"为[7]

$$\frac{\partial}{\partial \pi_s} \triangleq \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \omega_s} \frac{\partial}{\partial q_k} \qquad (s=1,2,\cdots,n) \tag{2.4.11}$$

当准速度按式(2.4.1)选取时,则定义为

$$\frac{\partial}{\partial \pi_s} \triangleq \sum_{k=1}^{n} b_{ks} \frac{\partial}{\partial q_k} \tag{2.4.12}$$

利用式(2.4.7)和式(2.4.11),可得到准坐标下的 Lagrange 关系

$$\frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i^*}{\partial \omega_s} = \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial \pi_s} \qquad (i=1,2,\cdots,N;s=1,2,\cdots,n) \tag{2.4.13}$$

为描述系统运动学,需选取适当的坐标。由直角坐标过渡到广义坐标是 Newton 力学向 Lagrange 力学过渡的运动学准备,而由广义坐标过渡到准坐标是 **Lagrange 力学**向**非完整力学**过渡的运动学需要。

思考题

2.1 弧坐标可否作为广义坐标?

2.2 在多体系统动力学中不仅用多余坐标表示,而且用全直角坐标表示,这样做有什么好处?

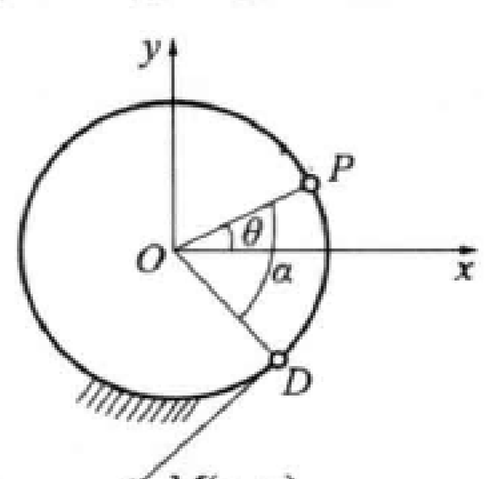
习题

2.1 在平面 Oxy 上运动的质点 M,用一长 l 的不可伸长的细绳联结在半径为 r 的固定圆盘边缘上的点 P,如图所示。线 OP 与 x 轴成角 θ,当绳的自由端占有位置(x,y)时,试写出该质点所受的约束方程。若以细绳与圆盘贴合的分离点 D 的幅角 α 为广义坐标,试写出两组坐标间的变换方程。

答:$x\cos\left(\frac{l-\sqrt{x^2+y^2-r^2}}{r}-\theta\right)-y\sin\left(\frac{l-\sqrt{x^2+y^2-r^2}}{r}-\theta\right)=r$

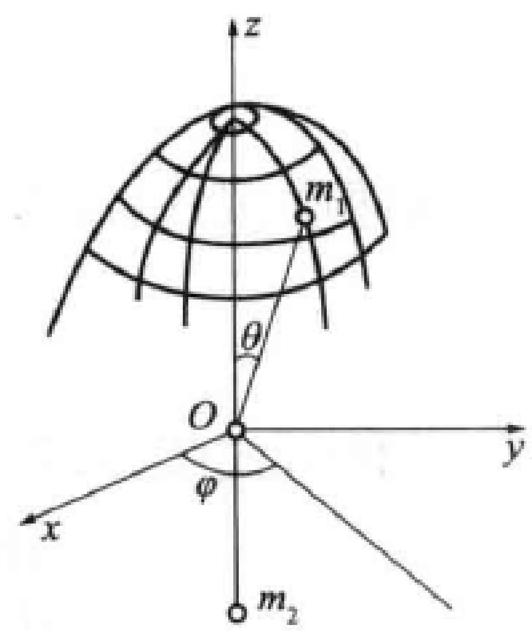
$x=r\cos(\alpha-\theta)-(l-r\alpha)\sin(\alpha-\theta)$

$y=-r\sin(\alpha-\theta)-(l-r\alpha)\cos(\alpha-\theta)$



题 2.1 图

2.2　如图所示，质量为 m_1, m_2 的两自由质点用长 l 的不可伸长的细绳联结，该绳穿过半径为 R 的光滑固定球面最高点上的小孔，使质点 m_1 在球面上运动，质点 m_2 沿铅垂线运动，取 $(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2)$ 为系统位形的坐标，试写出约束方程。若以质点 m_1 所在子午面转角 φ 和连线 Om_1 与 z 轴夹角 θ 为广义坐标，试写出两种坐标间的变换方程。

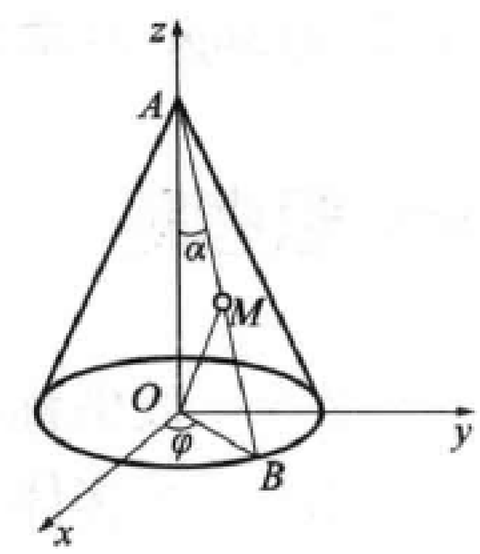


题 2.2 图

答：$x_1^2+y_1^2+z_1^2=R^2, R-z_2=l, x_2=0, y_2=0$

$x_1=R\sin\theta\cos\varphi, y_1=R\sin\theta\sin\varphi, z_1=R\cos\theta, z_2=R-l$

2.3　如图所示，顶角为 2α、底半径为 R 的正圆锥可绕其对称轴转动，质点 M 从顶点沿圆锥一条母线向底面运动。试以 (φ, z) 为广义坐标来表示其直角坐标 (x, y, z)。



题 2.3 图

答：$x=(R-z\tan\alpha)\cos\varphi$,

$y=(R-z\tan\alpha)\sin\varphi, z=z$

2.4　平面上两质点 m_1 和 m_2 运动时，m_1 对 m_2 进行追踪：m_1 的速度始终对准 m_2，试列写约束方程。

答：$\dfrac{\dot{y}_1}{\dot{x}_1}=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

2.5　试用抛物线坐标 (u, v, φ) 及其对时间的导数表示点的速度和加速度，其中

$$x=\sqrt{uv}\cos\varphi, y=\sqrt{uv}\sin\varphi, z=\frac{1}{2}(u-v)$$

2.6　试证任一可微函数 $\varphi(q_s, t)$ 对准坐标的二阶偏导数之差由下式确定

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial\pi_s\partial\pi_k}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial\pi_k\partial\pi_s}=\sum_{m=1}^{n}\gamma_{ks}^{m}\frac{\partial\varphi}{\partial\pi_m}$$

其中

$$\gamma_{tm}^{s}=\sum_{k=1}^{n}\sum_{r=1}^{n}\left(\frac{\partial a_{sk}}{\partial q_r}-\frac{\partial a_{sr}}{\partial q_k}\right)b_{rt}b_{km}$$

为 Boltzmann 三标记号，a_{sk} 由式(2.4.9)确定，(b_{sk}) 为 (a_{sk}) 的逆矩阵。

参考文献

[1]Lagrange JL. Mécanique Analytique[M]. Vol I, Quatrième Édition. Paris: Jacques Gabay, 2006.

[2]Appell P. Traité de Mécanique Rationnelle[M]. T1. Paris: Gauthier-Villars et Cie Éd., 1953.

[3] Levi-Civita T, Amaldi V. Lezioni di Meccanica Razionale [M]. Volume Primo, Bologna: 1930.

[4]武际可. 力学史[M]. 上海:上海辞书出版社,2010.

[5]梅凤翔,刘端,罗勇. 高等分析力学[M]. 北京:北京理工大学出版社,1991.

[6]Лурье АИ. Аналитическая Механика[M]. Москва: ГИФМЛ,1961.

[7]Новосёлов ВС. Вариационные Методы в Механике[M]. Ленинград: ЛГУ,1966.

3

虚位移与自由度

虚位移是分析力学的基本概念，没有虚位移就没有虚位移原理，也就没有分析静力学和分析动力学。虚位移与实位移不同，必须区分开来。同时，它们也不是毫不相干的两个位移，因此有必要研究在什么情况下实位移是虚位移之一。与虚位移相关的，还有自由度的定义问题。本章讨论虚位移、约束加在虚位移上的限制、自由度等。

§3.1 虚位移

本节讨论虚位移，包括 Lagrange 的虚速度、虚位移与可能位移，以及虚位移与实位移等。

3.1.1 Lagrange 的虚速度

Lagrange 的著作中没有提到虚位移，但有**虚速度**(la vitesse virtuelle)以及**虚速度原理**(le principe des vitesses virtuelles)的提法。

Lagrange 写道：

"我知道，Jean Bernoulli 是第一个认识到虚速度原理的普遍性，并应用于解静力学问题。这可由 1717 年他给 Varignon 的一封信看出，并放在他新力学第 9 节的开头。"[1]

3.1.2 虚位移与可能位移

Суслов 的《理论力学》引出三个彼此不同的术语[2]：实位移、可能位移和虚位移，并把虚位移定义为两个可能位移之差。这里看出，Суслов 的可能位移和虚位移是不同的。

Николаи 的《理论力学》[3]和 Некрасов 的《理论力学教程》[4]中利用了"可能的"一词。后来，Николаи 的书 1951 年再版时由 Моисеев 校订，而用了"虚的"一词。这里看出，可能位移就是虚位移了。因此，Лурье 认为"虚的"和"可能

的”是同义词，因为都来自法文 virtuel[5]。法文 virtuel 汉译为：潜在的，有可能的，虚的。

3.1.3 虚位移与实位移

在完整系统力学和非完整系统力学中，都广泛应用虚位移的概念。

在给定的固定时刻为加在点上的约束所允许的所有假想的无限小位移，称为点的**虚位移**。

首先，“在给定的固定时刻”是指这种位移不经历时间，即“在一定位置上”；其次，“约束所允许”是指这个位移不破坏约束；再次，“假想的”是指这个位移不是真实的，而是虚设的；最后，“无限小”是指这个位移不是有限的。虚位移可以有有限个或无限多个。

实位移与虚位移是两个不同的概念。**实位移**是指质点在真实运动中在一定主动力作用下经历一定时间的位移，实位移只有一个。

实位移与虚位移又不是完全不相干的两个概念，有必要研究实位移是否是虚位移中的一个。如果实位移是虚位移中的一个，则虚位移原理的充分性就容易证明；如果实位移是虚位移中的一个，则在双面理想约束下，动能定理中可不计约束力的功。

系统中第 i 个质点的矢径记作 $\boldsymbol{r}_i$，则实位移记作 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i(\mathrm{d}x_i,\mathrm{d}y_i,\mathrm{d}z_i)$，而虚位移记作 $\delta\boldsymbol{r}_i(\delta x_i,\delta y_i,\delta z_i)$。

§3.2 约束加在虚位移上的限制

本节讨论完整约束、线性非完整约束，以及非线性非完整约束情形下，约束加在虚位移上的限制。

3.2.1 完整约束情形

研究由 N 个质点组成的系统，受 d 个完整约束(1.2.1)，即

$$F_\alpha(x_i,y_i,z_i,t)=0 \qquad (\alpha=1,2,\cdots,d<3N;i=1,2,\cdots,N) \tag{3.2.1}$$

在瞬时 t，系统中的点由 (x_i,y_i,z_i) 发生虚位移 $\delta x_i,\delta y_i,\delta z_i$，而到达点 $(x_i+\delta x_i,y_i+\delta y_i,z_i+\delta z_i)$，根据虚位移的定义，质点的新位置必须仍在约束面上，即有

$$F_\alpha(x_i+\delta x_i,y_i+\delta y_i,z_i+\delta z_i,t)=0 \tag{3.2.2}$$

将其展开为 Taylor 级数，有

$$F_\alpha(x_i+\delta x_i,y_i+\delta y_i,z_i+\delta z_i,t)=$$

$$F_\alpha(x_i,y_i,z_i,t)+\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial F_\alpha}{\partial x_i}\delta x_i+\frac{\partial F_\alpha}{\partial y_i}\delta y_i+\frac{\partial F_\alpha}{\partial z_i}\delta z_i\right)+\text{高阶小项}$$

利用式(3.2.1)，并忽略高阶小项，得到

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial F_\alpha}{\partial x_i}\delta x_i+\frac{\partial F_\alpha}{\partial y_i}\delta y_i+\frac{\partial F_\alpha}{\partial z_i}\delta z_i\right)=0\qquad(\alpha=1,2,\cdots,d<N)\tag{3.2.3}$$

这就是 d 个完整约束(3.2.1)加在虚位移 $\delta x_i,\delta y_i,\delta z_i$ 上的 d 个限制条件。由于 $d<3N$,故方程(3.2.3)相对 $\delta x_i,\delta y_i,\delta z_i$ 有无穷多个解。

约束(3.2.1)对实位移 $\mathrm{d}x_i,\mathrm{d}y_i,\mathrm{d}z_i$ 的限制条件为

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial F_\alpha}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i+\frac{\partial F_\alpha}{\partial y_i}\mathrm{d}y_i+\frac{\partial F_\alpha}{\partial z_i}\mathrm{d}z_i\right)+\frac{\partial F_\alpha}{\partial t}\mathrm{d}t=0\tag{3.2.4}$$

比较式(3.2.4)与式(3.2.3),得知在完整定常约束下,实位移是虚位移中的一个。

对于完整约束,可以选 $n=3N-d$ 个广义坐标 $q_s(s=1,2,\cdots,n)$ 作为独立坐标,直角坐标可用广义坐标表示出

$$x_i=x_i(q_s,t),\ y_i=y_i(q_s,t),\ z_i=z_i(q_s,t)\tag{3.2.5}$$

其变分可用独立变分 $\delta q_s(s=1,2,\cdots,n)$ 表示出

$$\delta x_i=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial x_i}{\partial q_s}\delta q_s,\ \delta y_i=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial y_i}{\partial q_s}\delta q_s,\ \delta z_i=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial z_i}{\partial q_s}\delta q_s\tag{3.2.6}$$

因此,对于完整力学系统,独立坐标的数目等于独立变分的数目。

3.2.2 线性非完整约束情形

假设系统受有 g 个线性非完整约束

$$\sum_{i=1}^{N}\{A_{\beta i}(x_j,y_j,z_j,t)\dot{x}_i+B_{\beta i}(x_j,y_j,z_j,t)\dot{y}_i+C_{\beta i}(x_j,y_j,z_j,t)\dot{z}_i\}+$$
$$D_\beta(x_j,y_j,z_j,t)=0\qquad(\beta=1,2,\cdots,g;j=1,2,\cdots,N)\tag{3.2.7}$$

写成微分形式,有

$$\sum_{i=1}^{N}(A_{\beta i}\mathrm{d}x_i+B_{\beta i}\mathrm{d}y_i+C_{\beta i}\mathrm{d}z_i)+D_\beta\mathrm{d}t=0\tag{3.2.8}$$

这就是非完整约束(3.2.7)对实位移 $\mathrm{d}x_i,\mathrm{d}y_i,\mathrm{d}z_i$ 的限制条件。因为虚位移是系统位置在这一时刻相应的变化,时间不变,故可在式(3.2.8)中用符号 δ 代替 d,并取 $\delta t=0$,于是有

$$\sum_{i=1}^{N}(A_{\beta i}\delta x_i+B_{\beta i}\delta y_i+C_{\beta i}\delta z_i)=0\tag{3.2.9}$$

这就是线性非完整约束(3.2.7)加在虚位移 $\delta x_i,\delta y_i,\delta z_i$ 上的限制条件。

将约束方程写成微分形式,用 δ 代替 d,并令 $\delta t=0$,可得到约束对虚位移的限制条件,这一方法通常称为 **Hölder 原则**。

比较式(3.2.9)与式(3.2.8),可知当 $d_\beta=0$ 时,即约束方程对速度是齐次的情形,实位移是虚位移中的一个。

Бухгольц 的著名教材中指出"当有微分约束在场时,正像当有非无限小约束在场时那样,虚位移只有在那种场合下才和实位移相合,即约束是稳定

的。"[6]这种提法是不正确的[7]。对线性非完整约束，实位移处于虚位移之中的条件，不是约束的定常性，而是约束对速度的齐次性。例如，对约束

$$\dot{y}-t\dot{x}=0$$

实位移满足

$$\mathrm{d}y-t\mathrm{d}x=0$$

而虚位移满足

$$\delta y-t\delta x=0$$

可见，约束尽管非定常，实位移仍是虚位移之一。

对于线性非完整约束系统，将式(3.2.6)代入式(3.2.9)，得到

$$\sum_{s=1}^{n} a_{\beta s}(\boldsymbol{q},t)\delta q_s=0 \qquad (\beta=1,2,\cdots,g) \tag{3.2.10}$$

其中

$$a_{\beta s}=\sum_{i=1}^{N}\left(A_{\beta i}\frac{\partial x_i}{\partial q_s}+B_{\beta i}\frac{\partial y_i}{\partial q_s}+C_{\beta i}\frac{\partial z_i}{\partial q_s}\right) \tag{3.2.11}$$

因此，对具有 d 个完整约束和 g 个非完整约束的力学系统，独立坐标数目仍然是 $n=3N-d$，但因有条件(3.2.10)，独立变分数目成为 $n-g$。

3.2.3 非线性非完整约束情形

假设系统所受约束有形式(1.2.2)，即

$$F_\beta(x_i,y_i,z_i,\dot{x}_i,\dot{y}_i,\dot{z}_i,t)=0 \qquad (\beta=1,2,\cdots,g;i=1,2,\cdots,N) \tag{3.2.12}$$

约束(3.2.12)加在虚位移 $\delta x_i,\delta y_i,\delta z_i$ 上的限制条件由 **Appell-Четаев 定义**给出为

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial F_\beta}{\partial \dot{x}_i}\delta x_i+\frac{\partial F_\beta}{\partial \dot{y}_i}\delta y_i+\frac{\partial F_\beta}{\partial \dot{z}_i}\delta z_i\right)=0 \tag{3.2.13}$$

这是对虚位移 $\delta x_i,\delta y_i,\delta z_i$ 的线性式。如用 Hölder 原则，将会给出虚位移间的非线性关系。约束方程(3.2.12)对实位移 $\mathrm{d}x_i,\mathrm{d}y_i,\mathrm{d}z_i$ 的限制，一般说是非线性关系。

如果实位移满足如下关系

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial F_\beta}{\partial \dot{x}_i}\mathrm{d}x_i+\frac{\partial F_\beta}{\partial \dot{y}_i}\mathrm{d}y_i+\frac{\partial F_\beta}{\partial \dot{z}_i}\mathrm{d}z_i\right)=0 \tag{3.2.14}$$

那么实位移就是虚位移之一。进而，如果 F_β 满足

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial F_\beta}{\partial \dot{x}_i}\dot{x}_i+\frac{\partial F_\beta}{\partial \dot{y}_i}\dot{y}_i+\frac{\partial F_\beta}{\partial \dot{z}_i}\dot{z}_i\right)=k_\beta F_\beta \tag{3.2.15}$$

其中 k_β 为齐次性阶指数，则式(3.2.14)成立。因此，当约束方程(3.2.12)相对速度 $\dot{x}_i,\dot{y}_i,\dot{z}_i$ 为齐次时，则实位移是虚位移之一。

研究著名的 **Appell-Hamel 例**，其中约束方程为

$$\dot{z}=\frac{b}{a}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2} \tag{3.2.16}$$

这里 a,b 为常数。将其表示为

$$dz=\frac{b}{a}\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}$$

进而表示为

$$dz=\frac{b}{a}\left(\frac{\dot{x}dx}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}+\frac{\dot{y}dy}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}\right)$$

而式(3.2.13)给出

$$-\frac{b}{a}\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}\delta x-\frac{b}{a}\frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}\delta y+\delta z=0$$

因此,对 Appell-Hamel 例,实位移是虚位移之一。

§3.3 自由度

本节讨论自由度的定义并举例说明。

3.3.1 自由度的定义

系统广义坐标的独立变分数目,称为系统的**自由度**。

根据这个定义知,完整系统的自由度等于系统独立坐标数目,而非完整系统的自由度等于独立坐标数目减去非完整约束方程数目。

3.3.2 算例

例 1 一质点沿曲面

$$f(x,y,z)=0$$

运动,试求其自由度。

解:约束方程对虚位移的限制为

$$\frac{\partial f}{\partial x}\delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\delta y+\frac{\partial f}{\partial z}\delta z=0$$

因此,独立坐标数目为 2,独立变分数目也是 2,自由度是 2。

例 2 平面上两质点 A,B 用一长 l 的刚性杆连接,运动中杆中心 C 的速度被限制在沿杆方向,如图 3.1 所示,试求系统的自由度。

解:选 A 和 B 的坐标分别为 (x_1,y_1) 和 (x_2,y_2),约束方程可表示为

$$(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2-l^2=0$$

$$\frac{\dot{x}_1+\dot{x}_2}{x_1-x_2}=\frac{\dot{y}_1+\dot{y}_2}{y_1-y_2}$$

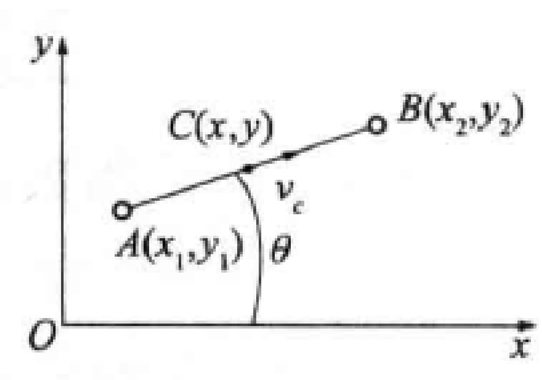


图 3.1

前一个是完整的，后一个是非完整的。约束加在虚位移 δx_1，δy_1，δx_2，δy_2 上的限制为

$$(x_1-x_2)(\delta x_1-\delta x_2)+(y_1-y_2)(\delta y_1-\delta y_2)=0$$

$$\frac{\delta x_1+\delta x_2}{x_1-x_2}=\frac{\delta y_1+\delta y_2}{y_1-y_2}$$

系统独立坐标数目是 3，独立变分数目是 2，自由度是 2。

若选杆中点 C 的坐标(x,y)以及杆对轴 Ox 的夹角 θ 为坐标，则这 3 个坐标是彼此独立的。限制杆中点 C 的速度仅能沿杆 AB 方向的非完整约束表示为

$$\dot{y}=\dot{x}\tan\theta$$

它对虚位移 δx，δy，$\delta\theta$ 的限制为

$$\delta y=\delta x\tan\theta$$

此时，独立变分数目是 2，因此，自由度是 2。

例 3 一个机械手 $ABCDEF$ 由 4 个刚体组成，如图 3.2 所示。A 是球铰链，B，C，D 是 3 个平面铰链。求此机械手的自由度[8]。

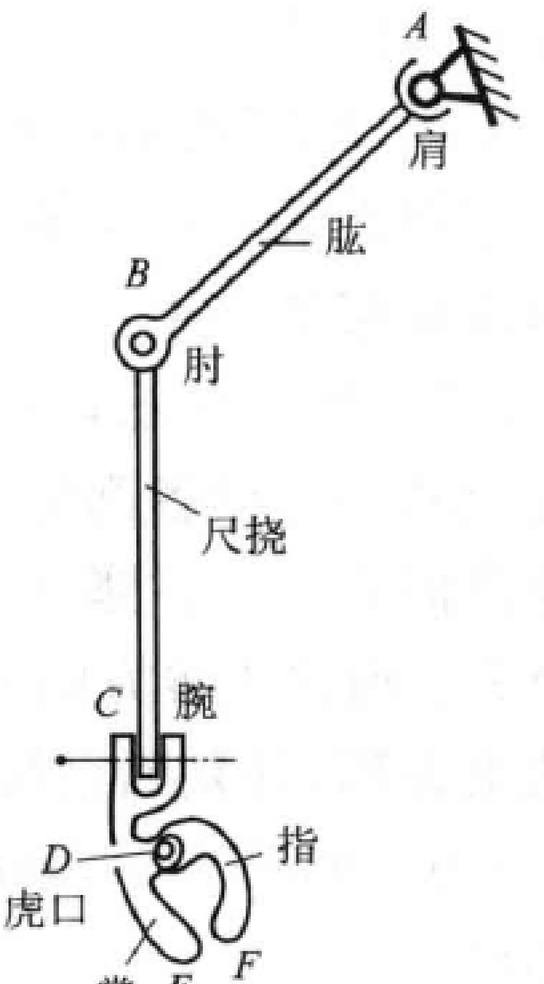


图 3.2

解：这是一个完整约束系统，它的自由度等于独立坐标的数目。每一个刚体都有 6 个自由度，每一个球铰链使自由度减少 3 个，每一个平面铰链使自由度减少 5 个，因此，整个系统的自由度是

$$(6\times4)-(3\times1)-(5\times3)=6$$

虚位移和自由度是分析力学的基本概念。与虚位移相关产生的分析静力学和分析动力学的基本原理是分析力学的理论基础。

思考题

3.1 有关实位移与虚位移的下述提法，哪个是正确的？

1)定常约束下，实位移是虚位移之一。

2)非定常约束下，实位移不是虚位移之一。

3)定常约束下，实位移不一定是虚位移之一。

4)非定常约束下，实位移不一定是虚位移之一。

3.2 一直杆 AB 的 A 端接触地面，杆在铅垂面内运动，问有几个自由度？

3.3 半径为 a 的匀质圆球在水平面上做纯滚动，有几个自由度?

3.4 有人说，分析力学是建立在“虚”上的，是否有道理?

习题

3.1 一质点在空间运动，所受约束为

$$\dot{z}-\dot{x}y+\dot{y}z+xyz=0$$

试研究实位移是否是虚位移之一。

3.2 一质点在空间运动，所受微分约束为

$$\dot{x}(x^2+y^2+z^2)+2(x\dot{x}+y\dot{y}+z\dot{z})=0$$

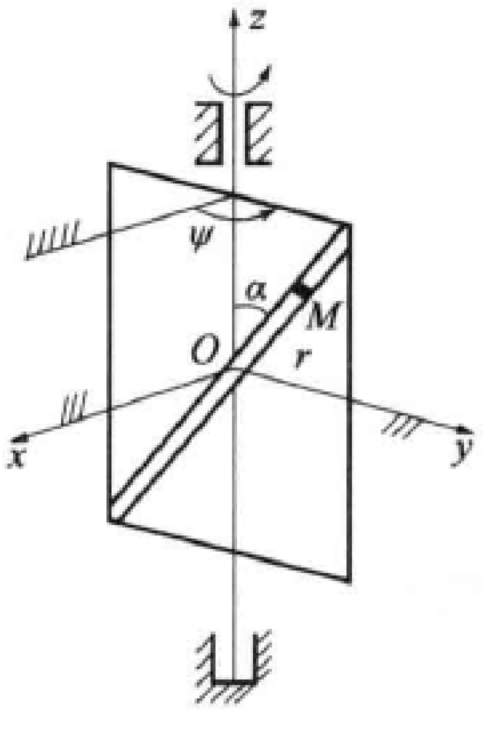
试研究其实位移与虚位移之间的关系。

3.3 试用 Appell-Четаев 定义给出线性非完整约束(3.2.7)对虚位移 δx_i，δy_i，δz_i 的限制。

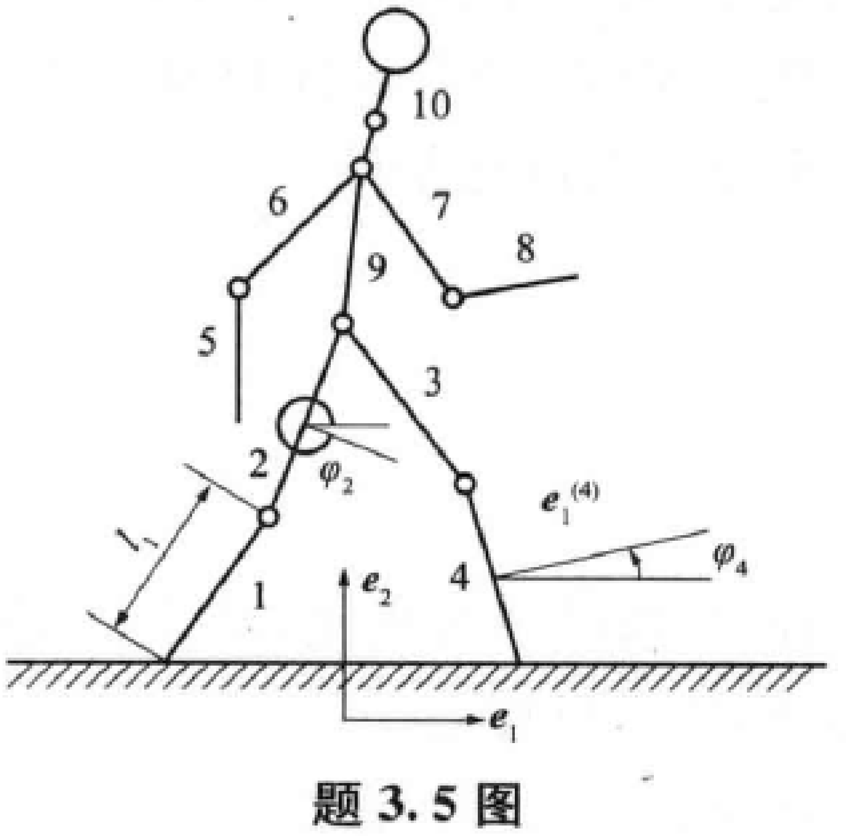
3.4 如图所示，一薄的铅垂平板可无摩擦地绕铅垂轴 Oz 转动。质点 M 可无摩擦地沿平板上的直槽移动。平板以角速度 ω 转动。试研究质点的实位移与虚位移的关系。

3.5 如图所示，一个人体模型由 10 个刚体组成：头，身，四肢(上臂、下臂、大腿、小腿)。设各部位在铅垂平面内运动，且两脚停在地面上，前后脚距离保持为常值 L。设各部位长为 $l_i(i=1,2,\cdots,10)$。现用水平固定方向单位矢量 $\boldsymbol{e}_1$ 与第 $\boldsymbol{i}$ 个刚体法线方向 $\boldsymbol{e}_1^{(i)}$ 的夹角 $\varphi_i(i=1,2,\cdots,10)$来确定系统的位置。试列写约束方程，并判断系统有几个自由度。

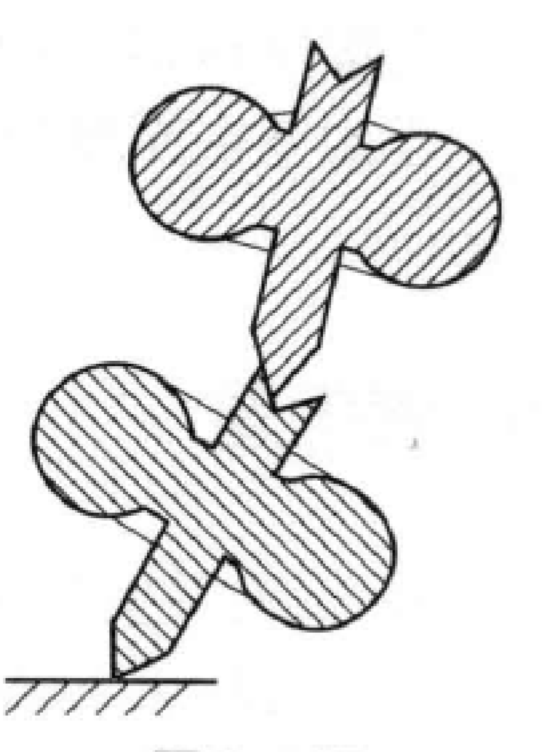
3.6 如图所示，系统由两个叠放在一起的陀螺组成，下面陀螺支点固定，求其自由度。



题 3.4 图



题 3.5 图



题 3.6 图

参考文献

[1] Lagrange J L. Mécanique Analytique[M]. Vol 1. Quatrième Ed. Paris: Jacques Gabay, 2006.

[2] Суслов Г К. Теоретическая Механика[М]. Москва: Гостехиздат, 1946.

[3] Николаи Е Л. Теоретическая Механика [М]. Ч Ⅱ. Седьмое Изд Москва: ГОНТИ, 1939.

[4]Некрасов АИ. Курс Теоретической Механики [М]. ЧⅡ. Москва: Гостехиздат, 1953.

[5]Лурье АИ. Аналитическая Механика[М]. Москва: ГИФМЛ, 1961.

[6]Н・Н・蒲赫哥尔茨．理论力学基本教程[M]. 下册．钱尚武,钱敏,译．北京:高等教育出版社,1957.

[7]梅凤翔．对不稳定的约束实位移不是虚位移中的一个吗?[J]. 力学与实践,1984,6(5):51-52.

[8]朱照宣,周起钊,殷金生．理论力学[M]. 下册．北京:北京大学出版社,1982.

4 理想约束

理想约束是分析静力学和分析动力学的基本假定。理想约束是由无摩擦约束演化来的，理想约束涉及约束力在虚位移上的功。本章叙述力的功（包括实功与虚功）、理想约束概念的形成，以及理想约束假定的必要性和可能性。

§4.1 力的功

本节讨论**力的功**，包括力的功的简史、力的分类、**力的实功**、**力的虚功**、约束力的功等。

4.1.1 功的简史

物理量“功”有很长历史。整个 18 世纪两种不同的实践彼此交会。一个是理论的，由哲学家和数学家实践，涉及“活力”；另一个是经验的，由工程师实践，涉及发动机（主要是水轮机和蒸汽机）的功和效能。在两种实践中用于计算重量（或力）与高度（或距离）的乘积。近代科学史认定，功作为力学量是 19 世纪初在法国出现的。“功”的前发包括 Galilei，Descartes，Varignon 等 17 世纪关于静力学的工作，Leibniz 及其追随者 17 世纪和 18 世纪关于动力学的工作，d'Alembert 18 世纪关于动力学的工作，而能量概念和能量关系见于 Lagrange 18 世纪关于动力学的工作[1]。

在虚速度原理的描述中，力与位移的乘积是暗示的，看不见的。这个原理的最终形式由 Varignon 和 Johann Bernoulli 给出，在 Varignon 1725 年出版的《新力学或静力学》一书中。1829 年 Coriolis GG（1792—1843）将这个原理改为“虚功原理”[1]。

4.1.2 力的分类

牛顿力学中主要将力分为内力和外力，而分析力学中主要将力分为**主动力**

和**约束力**。

在 Lagrange 著作中没有明显地将力分为主动力和约束力。在 Appell 巨著第一卷第 8 章第 157 节中写道:"将作用在各个点上的力分成两类:由约束产生的作用于系统的约束力,以及作用在系统的直接加上的力或给定力"。这里的给定力,即主动力。

专著[2]指出,历史上最早将力分为主动力和约束力的是法国人 Delaunay 在他 1856 年的著作中提出的[3]。

4.1.3 力的实功

作用于质点的力 $\boldsymbol{F}$ 与质点的无限小位移 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 的标积,称为力对质点所做的元功,记作 $\mathrm{d}'W$

$$\mathrm{d}'W=\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} \tag{4.1.1}$$

这里的力 $\boldsymbol{F}$ 可以是主动力,也可以是约束力;可以是外力,也可以是内力,而 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 是质点的实位移。力 $\boldsymbol{F}$ 在有限路径上的功为元功沿路径的积分,记作 W

$$W=\int_c \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_c F_\tau \mathrm{d}s \tag{4.1.2}$$

其中 F_τ 为力在运动方向上的投影;$\mathrm{d}s$ 为弧元。

力系 $\boldsymbol{F}_i(i=1,2,\cdots,N)$ 的总元功和总功分别表示为

$$\mathrm{d}'W=\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{F}_i\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i \tag{4.1.3}$$

$$W=\sum_{i=1}^{N}\int_{c_i}\boldsymbol{F}_i\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i \tag{4.1.4}$$

4.1.4 力的虚功

力 F 在质点虚位移 $\delta\boldsymbol{r}$ 上所做的功,称为力的虚功,记作 δW

$$\delta W=\boldsymbol{F}\cdot\delta\boldsymbol{r} \tag{4.1.5}$$

力系 $\boldsymbol{F}_i(i=1,2,\cdots,N)$ 的虚功表示为

$$\delta W=\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{F}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i \tag{4.1.6}$$

实位移与虚位移不同,因此,一般说来,力的实功与力的虚功也不同。

4.1.5 约束力的功

约束力一般是被动力,是未知的,因此约束力在建立原理和运动微分方程之后才能求得。

有些约束力的实功和虚功都是零;有些约束力的虚功为零,但实功不为零。

例 1 质点被强制在一固定光滑曲面上运动，如图 4.1 所示。

虚位移 $\delta\boldsymbol{r}$ 发生在曲面在点 P 的切平面上的任意方向，实位移 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 发生在切平面上的某个方向上。约束力 $\boldsymbol{F}_N$ 在曲面该点的法向上，于是有

$$\boldsymbol{F}_N \cdot \delta\boldsymbol{r}=0$$

$$\boldsymbol{F}_N \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}=0$$

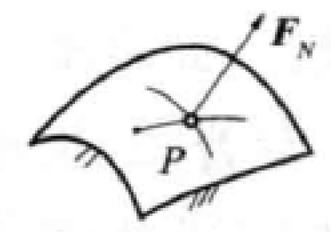


图 4.1

这表明约束力的实功与虚功皆为零。

例 2 质点被强制运动在动的或变形的光滑曲面上[4]。

此时约束力仍在曲面在该点的法向上，虚位移仍在曲面在该点的切平面上，于是有

$$\boldsymbol{F}_N \cdot \delta\boldsymbol{r}=0$$

但是，由于曲面运动或变形，实位移已经不在切平面上了，有

$$\boldsymbol{F}_N \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}\neq 0$$

此时约束力的虚功为零，而实功不为零。

§4.2 理想约束

本节讨论**理想约束**，包括理想约束概念的形成、理想约束的定义、理想约束假定的重要性与可能性等。

4.2.1 由无摩擦约束到理想约束

理想约束概念的形成有相当长的一段历史。18 世纪 Lagrange 的著作中未见 liaison parfaite(理想约束)的提法。20 世纪初 Appell 的 5 卷《理性力学》中也没有，仅有"**无摩擦约束**"的提法[5]。Appell 巨著的前两卷俄译为《理论力学》[6]，第一卷第 8 章第 164 节的标题为"无摩擦约束的一般定义"，俄译本将其改为"理想约束的一般定义"[6]。俄译本第二卷第 343 节有一译者注：

"无摩擦约束应理解为不产生运动阻抗的约束，例如，不仅光滑曲面，而且粗糙曲面，如果沿其发生无滑动地滚动。"

Лурье 的著作 6.2 节中写道："理想约束或无摩擦约束"。[7]

一般说来，"无摩擦约束"与"理想约束"并不等同，因为有的有摩擦约束也可能是理想约束，如滚球、滚盘等非完整约束都是靠接触，靠摩擦来实现的。

4.2.2 理想约束的定义

理想约束可分为双面理想约束和单面理想约束。

1)双面理想约束

约束，无论是完整的还是非完整的，满足约束力在系统点的任何虚位移上

所做元功之和等于零的，称其为**理想约束**。[7]

这种理想约束为**双面理想约束**。双面理想约束条件表示为

$$\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_{Ni} \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = 0 \tag{4.2.1}$$

其中 $\boldsymbol{F}_{Ni}$ 为作用在系统中第 i 个点上的约束力。

2)单面理想约束

约束，无论是完整的还是非完整的，满足约束力在系统点的任何虚位移上所做元功之和大于或等于零的，称其为**单面理想约束**，表示为

$$\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_{Ni} \cdot \delta \boldsymbol{r}_i \geqslant 0 \tag{4.2.2}$$

这里等号对应非释放位移，而大于号对应释放位移。

4.2.3 理想约束假定的重要性与可能性

由 d'Alembert 和 Lagrange 开创的非自由质点系动力学是基于约束的理想性假定的。根据这个假定所建立的虚位移原理以及动力学普遍方程中消除了约束力，从而使问题变得简单了。可见，理想约束假定的重要性。同时，理想约束假定也是完全可能的。首先，为描述自然现象和大多数技术过程，这样的假定有足够的精确度。例如，复杂机构可看作刚体系统，其中刚体两两之间或刚性联结，或以铰链联结，或以其表面相接触。如果认为所有刚性联结是绝对刚性的，铰链是理想的，而所有接触面或是理想光滑的，或是完全粗糙的，则任何复杂机构均可当作具有理想约束的质点系。其次，如果约束是非理想的，例如，摩擦力的虚功不为零，则可将摩擦力归为主动力范畴来考虑，由于未知摩擦力出现而短少的方程可用摩擦定律来补充[7,8]。

4.2.4 理想约束的例子

除前述例 1、例 2 外，还可举出许多理想约束的例子。

例 1 一端固定的不可伸长的柔索。

柔索的约束力 $\boldsymbol{F}_N$ 总沿柔索方向并指向固定点 O，而虚位移 $\delta \boldsymbol{r}$ 与柔索垂直，如图 4.2 所示，故有

$$\boldsymbol{F}_N \cdot \delta \boldsymbol{r} = 0$$

约束是理想的。此时，约束力的实功亦为零。

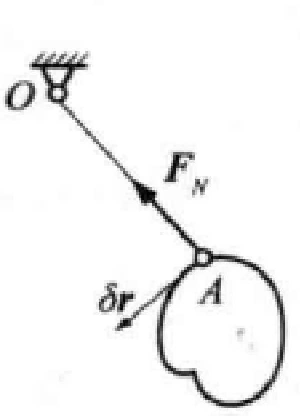


图 4.2

例 2 物体沿固定曲面做无滑动地滚动。

研究圆柱体沿固定水平面做无滑动地滚动问题，如图 4.3 所示，摩擦力 $\boldsymbol{F}_f$ 和法向反力 $\boldsymbol{F}_N$ 的作用点 P 的位移为零，二力的虚功和实功皆为零。因此，约束是理想的。注意到，这是不计滚动摩阻的情形。如果考虑滚动摩阻，则其虚功不为零，实功亦不为零。此时，可将滚动摩阻归入主动力中。

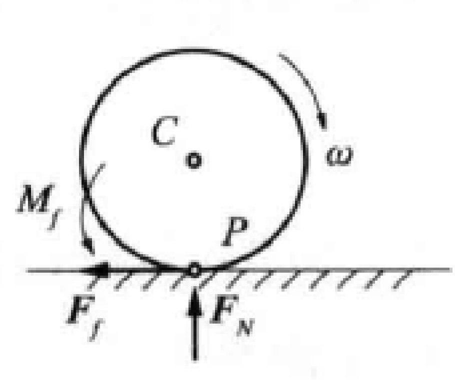


图 4.3

例 3 固定端光滑铰链。

此时，铰链的虚位移 $\delta\boldsymbol{r}$ 为零，故有

$$\boldsymbol{F}_N \cdot \delta\boldsymbol{r}=0$$

同时，约束力的实功亦为零。

例 4 冰刀不允许横滑。

冰刀运动时，不允许横滑，则它与冰面接触点 P 的虚位移 $\delta\boldsymbol{r}$ 需沿冰刀平面与冰面的交线方向，而约束力 $\boldsymbol{F}_N$ 在横向，如图 4.4 所示。因此有

$$\boldsymbol{F}_N \cdot \delta\boldsymbol{r}=0$$

这是一个双面理想非完整约束。

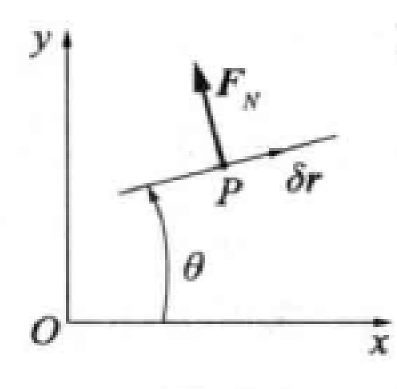


图 4.4

以上各例属于简单的，约束的物理实现明显的情形。如果约束是用方程表示的，则属于复杂的情形。例如，质点被强制在平面曲线

$$f(x,y)=0 \tag{4.2.3}$$

上运动，那么这个约束是双面理想的，还是双面非理想的？答案依赖于约束的物理实现。如果约束的数学表达式(4.2.3)是一条光滑曲线，则约束力与虚位移相垂直，其虚功为零，而约束是理想的，如果是有摩擦的，则约束是非理想的，此时，若将摩擦力当作主动力，也可将约束当作是理想的。

本书第 1～4 章为分析力学的基本概念。分析力学主要研究非自由质点系的静力学和动力学，因此，约束是分析力学的重要基本概念。分析力学的特色之一是引入广义坐标代替直角坐标，因此，广义坐标是分析力学的基本概念。虚位移是分析力学不可或缺的基本概念。理想约束假定是分析力学的基本假定。有了这些基本概念就可提出分析力学的基本原理，然后由基本原理导出系统的运动微分方程，并研究方程的积分，从而构建分析力学的基本框架。

思考题

4.1 一质量为 m 的质点在铅垂面 Oxz 上在重力作用下运动，并受约束

$$z-\frac{1}{2}x^2=0$$

则解不唯一。这个说法对否？

4.2 一质量为 m 的质点在平面 Oxy 上运动，受约束

$$\dot{y}-t\dot{x}=0$$

则约束力的虚功不为零。这个结论对否？

4.3 约束力为无功力的约束称为理想约束。这个定义是否准确？

4.4 约束力的虚功为零，则实功不一定为零。对否？

4.5 在理想约束条件下，质点系动能的改变只与主动力做功有关。这个结论对否？

4.6 质点系的定常理想约束在运动过程中所做的外力功以及内力功之和等于零。对否？

习题

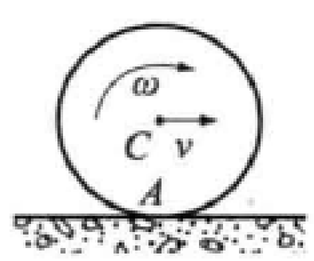
4.1 半径为 R 的轮子在地面上滚动，如图所示。设轮心 C 的速度是 v，轮子的角速度是 ω。试讨论地面对轮子的摩擦力 $\boldsymbol{F}_f$ 所做的元功。

答：$\mathrm{d}'W=-F_f|v-\omega R|\mathrm{d}t<0$

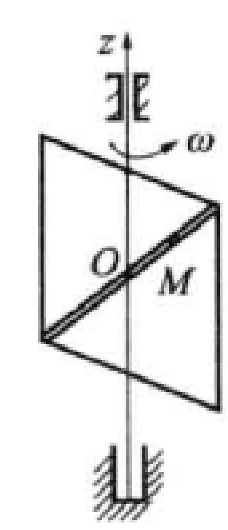
4.2 如图所示，一薄的铅垂平板可无摩擦地绕铅垂轴 Oz 转动，质点 M 可无摩擦地沿平板上的直槽移动，则质点所受约束力的虚功为零，实功亦为零，对否？

4.3 半径为 R 的匀质圆球在一固定平面上自由运动，则有下列 3 种情形：(1)平面是完全光滑的；(2)平面是完全粗糙的；(3)平面是不完全粗糙的。问哪种情形约束是理想的？

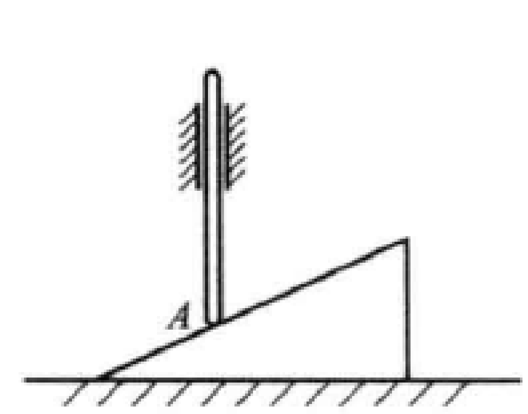
4.4 本题图所示为直杆一尖劈系统，所有接触面、接触点都是光滑的。试证明，在接触点 A 处直杆与尖劈两物体相互作用的约束力的虚功之和为零。



题 4.1 图



题4.2 图



题 4.4 图

参考文献

[1]Kanderakis NE. When is a physical concept born? The emergence of "work" as a magnitude of mechanics[J]. Sci & Educ, 2010,19:995-1012.

[2] Papastavridis J G. Analytical Mechanics[M]. New York: Oxford Univ. Press, 2002.

[3] Delaunay ChE. Traité de Mécanique Rationnelle [M]. Paris: Garmer et Masson, 1856.

[4]Гантмахер ФР. Лекции по Аналитической Механике[M]. Москва: ГИФМЛ, 1960.

[5] Appell P. Traité de Mécanique Rationnelle [M]. T1, 5ème Éd. Paris: Gauthier-Villars, 1953.

[6]Аппель П. Теоретическая Механика I[M]. Москва: ГИФМЛ, 1960.

[7]Лурье АИ. Аналитическая Механика[M]. Москва: ГИФМЛ, 1961.

[8]梅凤翔,尚玫. 理论力学 I [M]. 北京:高等教育出版社,2012.

5 虚位移原理

本章讨论虚位移原理，包括虚位移原理的简史、虚位移原理的表述、虚位移原理的证明、虚位移原理给出的平衡方程、单面约束问题、虚位移原理的应用例子，以及保守系统的平衡稳定性等。

§5.1 虚位移原理的简史

虚位移原理的形成和表述经历了相当长一段历史。本节总结从 Lagrange 到 Appell，再到俄罗斯学者和我国学者的有关论述，并给出一些注释。

5.1.1 Lagrange 的有关论述

Lagrange 的《分析力学》第一卷《静力学》第一节"关于静力学的各种原理"论述了从 Archimède，Huygens，Stevin，Galilée，Roberval，Newton，Varignon 到 d'Alembert 等人在静力学方面的贡献，将静力学的基本定律归结为三个原理：杠杆原理、力的合成原理和虚速度原理，并认为虚速度原理是静力学最普遍的基本定律。Lagrange 将虚速度原理表述为[1]：

"如果任何数目的物体或点的某个系统，在每个物体或点受到任何力的作用而处于平衡，如果给这个系统任何小的运动，结果每个点走过无限小路程，即发生虚速度，那么力与每个沿力方向产生的相应路径的乘积之和总等于零。"

Lagrange 把这个提法当作 Varignon-Bernoulli 提法的进一步推广。Lagrange写道：

"Jean Bernoulli 是第一个认识到虚速度原理的极大普遍性并用于解许多静力学问题。这可由他在 1717 年给 Varignon 的一封信中看出，并将这封信放在他《新力学》第 9 节的开头。"

Lagrange 给出虚速度原理的两种表达。用 $P,Q,R,\cdots$ 表记加在系统点上的力，用 $\alpha,\beta,\gamma,\cdots$ 表记虚位移在这些力方向上的投影(精确到一阶小量)，虚速

度原理的第一种表达为

$$P\alpha + Q\beta + R\gamma + \cdots = 0 \tag{5.1.1}$$

把点的虚位移在力方向上的投影 $\alpha, \beta, \gamma, \cdots$ 用距离微分改变 $\mathrm{d}p, \mathrm{d}q, \mathrm{d}r, \cdots$ 来替代,就得到虚速度原理的第二种表达

$$P\mathrm{d}p + Q\mathrm{d}q + R\mathrm{d}r + \cdots = 0 \tag{5.1.2}$$

Lagrange 把这个方程称为“任意力系平衡的静力学普遍公式”。Lagrange 将式(5.1.2)的左端各项 $P\mathrm{d}p, Q\mathrm{d}q, R\mathrm{d}r, \cdots$ 称为“力矩”。

5.1.2 Appell 的有关论述

Appell《理性力学》第一卷第 8 章“虚速度原理”第 157 节“原理的提法”中写道[2]:

“系统平衡的充分必要条件是,对为约束允许的任何虚位移,直接作用力的虚功之和等于零。”

有关原理的假设,在第 162 节“引理”中写道:

“不论质点系是否处于平衡,约束力在为约束允许的任何虚位移上的虚功之和等于零。在此,无摩擦假设至关重要。”

在第 164 节“无摩擦约束”中写道:

“已经看到,如果没有摩擦,最简单约束情形中约束力在为约束允许的任何虚位移上的虚功之和等于零。对于更复杂的约束,例如,用方程表示的约束,这个性质应作为无摩擦自身概念的定义;如果在任何虚位移上约束力的功之和等于零,约束将是无摩擦的。”

在第 184 节关于单面约束的虚位移原理表述为[2]:

“在其上所有约束实现的位置上平衡,必要充分的是,对所有为约束允许的虚位移,主动力的功之和等于零或是负的,并且对非释放位移等于零,而对释放位移等于零或为负。”

5.1.3 俄罗斯学者的有关论述

Бухгольц 的《理论力学基本教程》(1939 年,第二版,下册)第二章第一节写道[3]:

“按照虚位移原理,力学组平衡的必要和充分条件是:所有作用在力学组上的主动力在任何虚位移下所做的元功之和等于零(在不可解约束的场合下)。”

Воронков 的《理论力学》(1959 年,第八版)§124“虚位移原理”中写道[4]:

“使具有理想约束的系统在给定位置处于平衡的必要和充分条件是,所有作用于系统的主动力在此位置上发生的系统所有虚位移上的元功之和等于零。”

Суслов 的《理论力学》(1946 年版)第四部分“静力学”第 36 章第 207 节“虚位移原理”中写道[5]:

“对于平衡位置主动力在任何虚位移上的元功之和等于零或为负的：如果约束是不可解的，或者如果约束是可解的，但给定位移是非释放的，则元功之和等于零；如果位移是释放的，这个和就是负的。”

Гантмахер1960 年的《分析力学讲义》第一章第 4 节“虚位移原理 · d'Alembert原理”中写道[6]：

“为使系统某个(与约束相适合的)位置是平衡位置，其必要和充分条件是，主动力在系统任何虚位移上的功之和等于零。”

Лурье1961 年的《分析力学》第 6.5 节“质点系的平衡”中写道[7]：

“主动力在系统点的虚位移上的功之和等于零，限于理想约束，由所论平衡位置的虚位移(仅研究不可解约束)。”

5.1.4 我国学者的论述

周培源的《理论力学》1952 年由人民教育出版社出版，始于 1938—1942 年在西南联大任教时的讲义。他对虚功原理有如下表述[8]：

“如果作用在一个物体上的一力系，使物体做任何无限小的位移的虚功等于零，而物体的位移是与无摩擦力的约束相吻合，则作用在此物体上的力系必在平衡状态中。”

汪家訸 1958 年的《分析动力学》第二章第 57 节“虚位移原理”中，有如下表述[9]：

“有理想约束的质点系平衡的充要条件是，所有作用在质点组上的主动力在任意的虚位移下所做的元功之和等于零(对不可解约束)或小于零(对可解约束)。”

5.1.5 注释

①Lagrange 的虚速度原理，即虚位移原理；他所称谓的“力矩”就是力的功。他的虚速度原理没有明确指出其前提条件。如果理解 Lagrange 的原理可以适用任何双面约束，无论约束是否理想，也是可以的。

②Appell 的虚速度原理比 Lagrange 的表述清楚，其前提条件是双面无摩擦约束。无摩擦约束应理解为理想约束。

③Бухгольц 和 Воронков 的虚位移原理表述比较好，但在 Бухгольц 的表述上应添加“理想约束”，在 Воронков 的表述上应添加“双面”。Суслов 的表述最全面，也最准确。Гантмахер 的表述上也应相应添加双面理想。Лурье 的表述准确。

④周培源的表述与 Appell 的类似，汪家訸的表述与 Суслов 的类似。

§5.2 虚位移原理的表述

本节讨论虚位移原理的各种表述,包括对双面理想约束和单面理想约束下的一般表述、完整定常约束和非完整齐次约束下的特殊表述,以及只限双面约束下的更一般的表述。

5.2.1 一般表述

虚位移原理一般表述为

命题 1 对双面理想约束,质点系平衡的必要充分条件是,主动力在虚位移上所做元功之和等于零,表示为

$$\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = 0 \tag{5.2.1}$$

命题 2 对单面理想约束,质点系平衡的必要充分条件是,主动力在虚位移上所做元功之和小于或等于零,其中等于零对应非释放位移,小于零对应释放位移,数学表达为

$$\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i \leqslant 0 \tag{5.2.2}$$

虚位移原理(5.2.1)的前提是只有约束是双面理想的,不论约束是否完整,也不论约束是否定常。虚位移原理(5.2.2)的前提是只有约束是单面理想的,不论约束是否完整,也不论约束是否定常。

5.2.2 特殊表述

对特殊的约束力学系统,虚位移原理有如下表述:

命题 3 对具有双面理想完整定常约束的系统,其平衡的必要充分条件是,主动力在虚位移上所做元功之和等于零。

命题 4 对具有双面理想非完整齐次约束的系统,其平衡的必要充分条件是,主动力在虚位移上所做元功之和等于零。

5.2.3 更一般表述

如果不论约束是否理想,只限约束是双面的,则虚位移原理表述为

命题 5 对双面约束系统,其平衡的必要充分条件是,主动力和约束力在虚位移上所做元功之和等于零,表示为

$$\sum_{i=1}^{N} (\boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{F}_{Ni}) \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = 0 \tag{5.2.3}$$

§5.3 虚位移原理的证明

本节讨论有关虚位移原理的两个典型证明，一个是 Appell 的，另一个是 Суслов 的。但是，这两个证明都不够一般，只适合证明 § 5.2 中的命题 3。其实，原理可当作公理而无须证明。

5.3.1 Appell 的证明

1) Appell 对原理的证明[2]

原理的必要性证明

如果有平衡，那么每个点 M_ν 在加于其上的所有力，包括给定力和约束力的作用下处于平衡。当对这个点施加由约束引起的某些力 $F'_\nu, F''_\nu, \cdots$ 时，该点可作为自由质点来研究。该点在合力为 F_ν 的给定力以及约束力 $F'_\nu, F''_\nu, \cdots$ 作用下处于平衡。对于该点的任意虚位移，所有力的功之和等于零。那么对系统的任意点也是对的，因此如果系统所有点发生任意位移，为约束允许或不为约束允许，那么所有给定力和约束力的功之和必为零：

$$\mathcal{T}_D + \mathcal{T}_L = 0 \tag{5.3.1}$$

其中 $\mathcal{T}_D$ 为给定力的功之和，而 $\mathcal{T}_L$ 为约束力的功之和。但是，如果位移为约束允许，那么根据前面的引理知 $\mathcal{T}_L$ 等于零，因此有

$$\mathcal{T}_D = 0 \tag{5.3.2}$$

原理的充分性证明

如果对为约束允许的所有位移，给定力的功之和 $\mathcal{T}_D$ 等于零，那么系统处于平衡。为此只需证明，如果系统不处于平衡，那么至少存在一个为约束允许的位移，对此位移 $\mathcal{T}_D$ 异于零。实际上，如果系统不处于平衡，那么便开始运动。点所得到的位移将为约束允许，而每个点 M_ν 可作为自由点来研究，它将在所有给定力和约束力 $F_\nu, F'_\nu, F''_\nu, \cdots$ 的合力方向上移动。在这实位移中所有初速度等于零；但是可以给系统虚位移，在这样虚位移下每个点沿与实位移一样的方向上移动，但是不是点 M_ν 的所有虚速度都等于零。此时力 $F_\nu, F'_\nu, F''_\nu, \cdots$ 的功，等于合力的功，将是正的，因为位移沿此合力方向上。因为对系统的每个点都成立，那么给定力和约束力对所论位移的功之和 $\mathcal{T}_D + \mathcal{T}_L$ 将是异于零的，正的。但是此位移为约束允许，因此 $\mathcal{T}_L$ 等于零，由此得到

$$\mathcal{T}_D > 0$$

2) Appell 证明的不充分性

虚位移原理的必要性证明很容易，也很完备。但是，在原理的充分性证明中，让给出的虚位移使点沿与实位移一样的方向移动。这就要求实位移是虚位移之一，这就是 Ampère 的经典证明思想。如果实位移不是虚位移之一，原理

的充分性便不得证明。

如果将虚位移原理以特殊形式表述为命题 3 或命题 4,那么 Appell 的证明便可用。因为在双面理想完整定常约束下,以及双面理想非完整齐次约束下,实位移就是虚位移之一。

5.3.2 Суслов 的证明

1)Суслов 对原理的证明

Суслов 指出,虚位移原理不仅给出系统平衡的必要条件,而且给出充分条件。这可由动能改变定律出发简单而快速地确信。据此定律动能的元增量等于主动力和约束力的元功之和:

$$\delta T=\sum_{\nu=1}^{n}\boldsymbol{F}_\nu\cdot\delta\boldsymbol{r}_\nu+\sum_{\nu=1}^{n}\boldsymbol{R}_\nu\cdot\delta\boldsymbol{r}_\nu \tag{5.3.3}$$

系统的平衡位置是指在此位置上系统长期处于静止状态;此外,在平衡位置上系统动能从零不能变为正值,即不能增加。因此,平衡的充分条件要求,对系统的任何由所论位置发生的虚位移,前述等式右端部分应等于零。但是,理想约束的反力的元功之和,在非释放虚位移上总等于零,而在释放虚位移上总大于零,因此,平衡的充分条件遵从不等式

$$\sum_{\nu=1}^{n}\boldsymbol{F}_\nu\cdot\delta\boldsymbol{r}_\nu\leqslant 0 \tag{5.3.4}$$

2)Суслов 证明的不充分性

式(5.3.3)本应表示为

$$\mathrm{d}T=\sum_{\nu=1}^{n}\boldsymbol{F}_\nu\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}_\nu+\sum_{\nu=1}^{n}\boldsymbol{R}_\nu\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}_\nu \tag{5.3.5}$$

即系统动能的微分等于主动力和约束力的元功之和。这里的功是实位移上的功,即实功。仅当实位移是虚位移之一时,式(5.3.5)能够写成式(5.3.3)。这样,Суслов 的证明,对命题 3 和命题 4 是可用的。

5.3.3 虚位移原理可以不去证明

虚位移原理是一个基本原理,而原理通常具有公理性质,而公理是不需要证明的。

§5.4 虚位移原理给出的平衡方程

本节讨论虚位移原理给出的各种**平衡方程**,包括原理的简单应用、原理给出的一般平衡条件,以及 Lagrange 乘子法等。

5.4.1 虚位移原理的简单应用

虚位移原理可简单应用于自由质点、曲面上的点,以及曲线上的点的平衡

问题。

1)自由质点

设给出完全自由的质点,并设 F_x,F_y,F_z 为作用在其上的主动力的合力。在此情形下,因为没有约束,任何位移都是虚位移。与这些虚位移中的任一位移相应的虚功是

$$\delta W=F_x\delta x+F_y\delta y+F_z\delta z$$

如果该点处于平衡,那么 F_x,F_y,F_z 都是零,因此 $\delta W=0$。反之,如果 $\delta W=0$,对无论怎样的 $\delta x,\delta y,\delta z$,都有

$$F_x=0,F_y=0,F_z=0$$

而点处于平衡。

2)曲面上的点

研究一点,它可沿固定曲面

$$f(x,y,z)=0 \tag{5.4.1}$$

无摩擦地移动,并在力 $\boldsymbol{F}$ 作用下处于平衡。在此情形下,仅有一个由方程(5.4.1)表示的约束,而为此约束允许的位移应沿曲面发生。如果该点处于平衡,那么对所有的虚位移,力在曲面的法方向,在所有这些虚位移上的虚功将是零。反之,如果功 δW 在任意位移上为零,那么或者 $\boldsymbol{F}$ 为零,或者力与曲面垂直。在两种情形中成立平衡。

下面由虚位移原理出发,导出点在曲面上的平衡方程。虚位移原理给出

$$\delta W=F_x\delta x+F_y\delta y+F_z\delta z=0 \tag{5.4.2}$$

而 δx 与任意的 δy 和 δz 有如下关系

$$\frac{\partial f}{\partial x}\delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\delta y+\frac{\partial f}{\partial z}\delta z=0 \tag{5.4.3}$$

它表示位移沿给定曲面发生。用 λ 乘以方程(5.4.3)并与方程(5.4.2)相加,得到

$$\left(F_x+\lambda\frac{\partial f}{\partial x}\right)\delta x+\left(F_y+\lambda\frac{\partial f}{\partial y}\right)\delta y+\left(F_z+\lambda\frac{\partial f}{\partial z}\delta z\right)=0 \tag{5.4.4}$$

不论 $\lambda,\delta y,\delta z$ 怎样。这样选 λ,使得方程(5.4.4)中 δx 的系数为零。这时,因 δy 和 δz 已是任意的了,它们的系数应恒为零,因此有

$$F_x+\lambda\frac{\partial f}{\partial x}=0,F_y+\lambda\frac{\partial f}{\partial y}=0,F_z+\lambda\frac{\partial f}{\partial z}=0 \tag{5.4.5}$$

这就是平衡方程。平衡方程(5.4.5)中带乘子 λ 的项 $\lambda\frac{\partial f}{\partial x},\lambda\frac{\partial f}{\partial y},\lambda\frac{\partial f}{\partial z}$ 就是约束力。

3)曲线上的点

如果点被强制在固定曲线

$$f(x,y,z)=0, f_1(x,y,z)=0 \tag{5.4.6}$$

上无摩擦地运动,并在力 $\boldsymbol{F}$ 作用下处于平衡。类似于前一情形,由虚位移原理可导出如下平衡方程

$$\begin{aligned} F_x+\lambda\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial x}=0 \\ F_y+\lambda\frac{\partial f}{\partial y}+\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial y}=0 \\ F_z+\lambda\frac{\partial f}{\partial z}+\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial z}=0 \end{aligned} \tag{5.4.7}$$

其中带乘子 λ 和 λ_1 的各项为法向约束力。

5.4.2 虚位移原理导出的一般平衡条件

虚位移原理给出的一般平衡条件,包括直角坐标下的表达、广义坐标下的表达,以及主动力有势情形下的表达等。

1)静力学基本方程

假设系统由 N 个质点组成,用 $\boldsymbol{F}_i(F_{ix},F_{iy},F_{iz})$ 表示第 i 个质点所受主动力的合力,根据虚位移原理,有

$$\sum_{i=1}^{N}(F_{ix}\delta x_i+F_{iy}\delta y_i+F_{iz}\delta z_i)=0 \tag{5.4.8}$$

它对约束允许的所有位移 $\delta x_i,\delta y_i,\delta z_i$ 都应满足。方程(5.4.8)是静力学的普遍方程。

2)广义坐标表示的平衡方程

设系统的位形由 n 个广义坐标 $q_s(s=1,2,\cdots,n)$ 来确定,系统第 i 个点的坐标(x_i,y_i,z_i)用这些坐标的函数表示为有限形式

$$x_i=x_i(q_s,t), y_i=y_i(q_s,t), z_i=z_i(q_s,t) \qquad (i=1,2,\cdots,N; s=1,2,\cdots,n) \tag{5.4.9}$$

由此有

$$\delta x_i=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial x_i}{\partial q_s}\delta q_s, \delta y_i=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial y_i}{\partial q_s}\delta q_s, \delta z_i=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial z_i}{\partial q_s}\delta q_s \tag{5.4.10}$$

将式(5.4.10)代入普遍方程(5.4.8),得到

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{s=1}^{n}\left(F_{ix}\frac{\partial x_i}{\partial q_s}+F_{iy}\frac{\partial y_i}{\partial q_s}+F_{iz}\frac{\partial z_i}{\partial q_s}\right)\delta q_s=0$$

令

$$Q_s=\sum_{i=1}^{N}\left(F_{ix}\frac{\partial x_i}{\partial q_s}+F_{iy}\frac{\partial y_i}{\partial q_s}+F_{iz}\frac{\partial z_i}{\partial q_s}\right) \tag{5.4.11}$$

它是与坐标 q_s 相应的**广义力**,将其代入上式,得到

$$\sum_{s=1}^{n}Q_s\delta q_s=0 \tag{5.4.12}$$

考虑到 δq_s 彼此独立，由式(5.4.12)得到

$$Q_s=0 \qquad (s=1,2,\cdots,n) \tag{5.4.13}$$

3)主动力有势情形

如果每个质点所受主动力都是有势力，即存在力函数 $U=U(x_i,y_i,z_i)$，使得

$$F_{ix}=\frac{\partial U}{\partial x_i},F_{iy}=\frac{\partial U}{\partial y_i},F_{iz}=\frac{\partial U}{\partial z_i} \tag{5.4.14}$$

则虚位移原理(5.4.8)给出

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial U}{\partial x_i}\delta x_i+\frac{\partial U}{\partial y_i}\delta y_i+\frac{\partial U}{\partial z_i}\delta z_i\right)=0$$

即

$$\delta U=0 \tag{5.4.15}$$

这表明，平衡的必要充分条件是力函数取极值。

如果存在势能 $V=V(x_i,y_i,z_i)$，使得

$$F_{ix}=-\frac{\partial V}{\partial x_i},F_{iy}=-\frac{\partial V}{\partial y_i},F_{iz}=-\frac{\partial V}{\partial z_i} \tag{5.4.16}$$

则平衡的必要充分条件是势能取极值，即

$$\delta V=0 \tag{5.4.17}$$

有了势能表达式或力函数表达式，进而可讨论平衡稳定性问题。

5.4.3 Lagrange 乘子

利用 Lagrange 乘子法，可建立系统的平衡方程，进而可求约束力。

1)完整的约束情形

设系统由 N 个质点组成，受 d 个双面理想完整约束

$$f_\alpha(x_i,y_i,z_i,t)=0 \qquad (\alpha=1,2,\cdots,d;i=1,2,\cdots,N) \tag{5.4.18}$$

为得到平衡方程，可选广义坐标，如 5.4.2 之 2。同时，也可利用 **Lagrange 乘子法**。约束(5.4.18)对虚位移的限制条件为

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i}\delta x_i+\frac{\partial f_\alpha}{\partial y_i}\delta y_i+\frac{\partial f_\alpha}{\partial z_i}\delta z_i\right)=0 \tag{5.4.19}$$

类似于得到方程(5.4.5)的步骤，由方程(5.4.8)和方程(5.4.19)，利用 Lagrange乘子法得到平衡方程

$$\begin{aligned}&F_{ix}+\sum_{\alpha=1}^{d}\lambda_\alpha\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i}=0\\&F_{iy}+\sum_{\alpha=1}^{d}\lambda_\alpha\frac{\partial f_\alpha}{\partial y_i}=0\qquad (i=1,2,\cdots,N)\\&F_{iz}+\sum_{\alpha=1}^{d}\lambda_\alpha\frac{\partial f_\alpha}{\partial z_i}=0\end{aligned} \tag{5.4.20}$$

其中$\lambda_\alpha(\alpha=1,2,\cdots,d)$为 **Lagrange 乘子**,方程中带乘子的项代表约束力。$3N$个方程(5.4.20)与d个约束方程(5.4.18)联合,就可求得平衡位置x_i,y_i,z_i,以及乘子λ_α。

2)非完整约束情形

如果系统受g个线性非完整约束

$$\sum_{i=1}^{N}(A_{\beta i}\dot{x}_i+B_{\beta i}\dot{y}_i+C_{\beta i}\dot{z}_i)+D_\beta=0 \qquad (\beta=1,2,\cdots,g) \tag{5.4.21}$$

其中系数$A_{\beta i},B_{\beta i},C_{\beta i}$以及$D_\beta$可依赖于坐标和时间。约束(5.4.21)对虚位移的限制为

$$\sum_{i=1}^{N}(A_{\beta i}\delta x_i+B_{\beta i}\delta y_i+C_{\beta i}\delta z_i)=0 \qquad (\beta=1,2,\cdots,g) \tag{5.4.22}$$

由方程(5.4.8)和(5.4.22),利用 Lagrange 乘子法,得到平衡方程

$$\begin{aligned} &F_{ix}+\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta A_{\beta i}=0 \\ &F_{iy}+\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta B_{\beta i}=0 \qquad (i=1,2,\cdots,N) \\ &F_{iz}+\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta C_{\beta i}=0 \end{aligned} \tag{5.4.23}$$

注意到,$3N$个方程(5.4.23)中有$3N+g$个未知量$x_i,y_i,z_i,\lambda_\beta$,而约束方程(5.4.21)通常自动满足,因此,一般说来,平衡位置不是孤立的,而是组成流形。

对非完整约束情形,可先选广义坐标$q_s(s=1,2,\cdots,n)$,将约束方程(5.4.21)在广义坐标和广义速度下表示为

$$\sum_{s=1}^{n}a_{\varepsilon+\beta,s}\dot{q}_s+a_{\varepsilon+\beta}=0 \qquad (\beta=1,2,\cdots,g;\varepsilon=n-g) \tag{5.4.24}$$

其中

$$\begin{aligned} a_{\varepsilon+\beta,s}&=\sum_{i=1}^{N}\left(A_{\beta i}\frac{\partial x_i}{\partial q_s}+B_{\beta i}\frac{\partial y_i}{\partial q_s}+C_{\beta i}\frac{\partial z_i}{\partial q_s}\right) \\ a_{\varepsilon+\beta}&=\sum_{i=1}^{N}\left(A_{\beta i}\frac{\partial x_i}{\partial t}+B_{\beta i}\frac{\partial y_i}{\partial t}+C_{\beta i}\frac{\partial z_i}{\partial t}\right)+D_\beta \end{aligned} \tag{5.4.25}$$

约束(5.4.24)对虚位移δq_s的限制条件为

$$\sum_{s=1}^{n}a_{\varepsilon+\beta,s}\,\delta q_s=0 \tag{5.4.26}$$

由方程(5.4.12)和方程(5.4.26),利用 Lagrange 乘子法,得到平衡方程

$$Q_s+\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta a_{\varepsilon+\beta,s}=0 \qquad (s=1,2,\cdots,n) \tag{5.4.27}$$

注意到,n个平衡方程(5.4.27)中有$n+g$个未知量q_s,λ_β,而约束方程(5.4.24)

通常自动满足,因此,有 g 个量是任意的。这样,对非完整系统来说,平衡位置不是孤立的,而是组成平衡状态流形。如果方程(5.4.27)全部是独立的,则平衡状态流形的维数等于非完整约束方程数目 g,否则维数将不小于 g。

§5.5 单面约束

本节讨论具有单面约束系统的平衡问题。分两种情形,一种是由等式确定的约束,但允许由不等式表达的位移;另一种是不等式表示为有限形式的约束。前一种是基本的,后一种可用前一种方法讨论。

5.5.1 由等式确定的约束,允许不等式表征的位移

系统受到由等式确定的约束,但是为这些约束允许的虚位移由不等式确定。此时就说,系统受到单面约束。例如,水平桌面上的质点可沿桌面运动。取轴 Oz 铅垂向上。假设约束已实现,有 $z=0$,但是此约束允许的虚位移有形式

$$\delta z \geqslant 0$$

又如,两点 (x_1, y_1, z_1) 和 (x_2, y_2, z_2) 用长 l 的不可伸长的线联结,两点间距离等于 l,但是距离可以减小。此时约束为

$$r^2 - l^2 = 0$$

但为此约束所允许的虚位移,或者使 r 等于 l,或者小于 l

$$\delta r \leqslant 0$$

因

$$r^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$$

则虚位移由不等式确定

$$(x_2 - x_1)(\delta x_2 - \delta x_1) + (y_2 - y_1)(\delta y_2 - \delta y_1) + (z_2 - z_1)(\delta z_2 - \delta z_1) \leqslant 0$$

设系统由 N 个质点组成,令

$$\xi_1 = x_1, \xi_2 = y_1, \xi_3 = z_1, \cdots, \xi_{3N-2} = x_N, \xi_{3N-1} = y_N, \xi_{3N} = z_N$$

为约束允许的虚位移由 g 个等式和 $h-g$ 个不等式确定

$$\sum_{\mu=1}^{3N} A_{\beta\mu} \delta\xi_\mu = 0 \qquad (\beta = 1, 2, \cdots, g) \tag{5.5.1}$$

$$\sum_{\mu=1}^{3N} A_{\gamma\mu} \delta\xi_\mu \leqslant 0 \qquad (\gamma = g+1, g+2, \cdots, h) \tag{5.5.2}$$

将为约束允许的虚位移分成两类:非释放位移与释放位移。对式(5.5.2)左端等于零的位移,与式(5.5.1)一样,称为非释放位移。对式(5.5.2)左端不为零的位移,称为释放位移。虚位移原理此时表述为[2]

在所有约束已实现的情况下,位置是平衡的,其必要和充分条件是,对约束

允许的所有虚位移,主动力的功之和等于零或小于零,并且对非释放位移等于零,而对释放位移等于零或是负的

$$\delta W \leqslant 0 \tag{5.5.3}$$

在直角坐标下,式(5.5.3)表示为

$$\sum_{i=1}^{N} (F_{ix}\delta x_i + F_{iy}\delta y_i + F_{iz}\delta z_i) \leqslant 0 \tag{5.5.4}$$

或

$$\sum_{\mu=1}^{3N} F_\mu \delta\xi_\mu \leqslant 0 \tag{5.5.5}$$

其中

$$F_1 = F_{1x}, F_2 = F_{1y}, F_3 = F_{1z}, \cdots, F_{3N-2} = F_{Nx}, F_{3N-1} = F_{Ny}, F_{3N} = F_{Nz}$$

对非释放位移,利用 Lagrange 乘子法,得到

$$F_\mu + \sum_{\rho=1}^{h} \lambda_\rho A_{\rho\mu} = 0 \qquad (\mu = 1, 2, \cdots, 3N) \tag{5.5.6}$$

选取由这些方程确定的某平衡位置,为使它们可用,只要使对应约束(5.5.2)的乘子 $\lambda_\gamma(\gamma = g+1, \cdots, h)$ 是负的,而 λ_γ 前的系数或是负的,或等于零。

例 一重质点 m 借助无重长 l 的不可伸长的线拴在定点 O,并放在不动水平圆柱表面。试求其平衡位置[2]。

解:取点 O 为原点,轴 Oz 铅垂向下,圆柱正截面为平面 Oxz,轴 Oy 水平。截面圆半径为 R,中心 C 的坐标为 (a, c),如图 5.1 所示。用 B 表示圆的最高点,并令线长 l 大于 OB,小于由点 O 向圆引出的切线长。假设 l 不变,点在圆柱上,则有

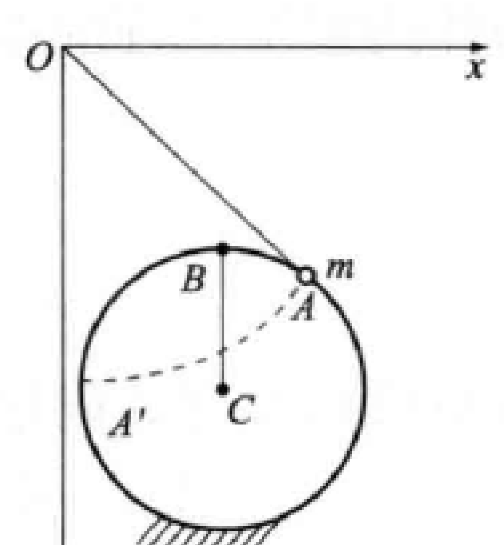


图 5.1

$$\begin{aligned} &x^2 + y^2 + z^2 - l^2 = 0 \\ &(x-a)^2 + (z-c)^2 - R^2 = 0 \end{aligned} \tag{a}$$

为第一个约束所允许的虚位移是使距离 Om 不变或变短,为第二个约束所允许的虚位移是使由 m 到圆柱轴的距离保持不变或变长,于是有

$$\delta(x^2 + y^2 + z^2) \leqslant 0$$

$$\delta[(x-a)^2 + (z-c)^2] \geqslant 0$$

即

$$\begin{aligned} &x\delta x + y\delta y + z\delta z \leqslant 0 \\ &-(x-a)\delta x - (z-c)\delta z \leqslant 0 \end{aligned} \tag{b}$$

物体仅受重力，因此平衡的必要充分条件为

$$mg\delta z \leqslant 0 \tag{c}$$

取

$$\begin{aligned} x\delta x + y\delta y + z\delta z &= \delta\lambda \\ -(x-a)\delta x - (z-c)\delta z &= \delta\mu \end{aligned} \tag{d}$$

其中 $\delta\lambda$ 和 $\delta\mu$ 为两任意无限小量。由以上二式解出 δx 和 δz，得

$$\begin{aligned} \delta x &= \frac{(c-z)\delta\lambda - z\delta\mu - (c-z)y\delta y}{cx-az} \\ \delta z &= \frac{(a-x)\delta\lambda - x\delta\mu - (a-x)y\delta y}{az-cx} \end{aligned} \tag{e}$$

为得到约束允许的最一般位移，在条件

$$\delta\lambda \leqslant 0, \delta\mu \leqslant 0 \tag{f}$$

下，可取 δy，$\delta\lambda$ 和 $\delta\mu$ 是任意的。对于平衡，量 $mg\delta z$，即 δz，对所有位移，必为负的或等于零。

首先，取非释放位移 $\delta\lambda=0$，$\delta\mu=0$。平衡时，$mg\delta z$ 或 δz 对所有这些位移必为零。但是 $\delta\lambda=0$，$\delta\mu=0$，由 $\delta z=0$ 得

$$-\frac{(a-x)y\delta y}{az-cx}=0$$

对任何 δy，有

$$(a-x)y=0$$

于是平衡的必要条件为 $y=0$ 以及 $a-x=0$。

第一种情形：$y=0$

将 $y=0$ 代入式(a)，得到关系

$$x^2+z^2=l^2$$

$$(x-a)^2+(z-c)^2=R^2$$

确定在点 A 和 A' 有两个平衡位置，它们在以 O 为中心以 l 为半径的圆周上，并与圆柱基圆相交。用 (x,y,z) 表示平衡位置之一的坐标。为知道平衡位置是否适宜，在此位置上给点 m 以某个释放位移，即有

$$\delta\lambda \leqslant 0, \delta\mu \leqslant 0$$

在此位移下使主动力的功 $mg\delta z$ 是负的或等于零。但在 $y=0$ 下，由式(e)得

$$\delta z=\frac{(a-x)\delta\lambda - x\delta\mu}{az-cx}$$

当 $\delta\lambda$ 和 $\delta\mu$ 是负的或为零时，这个表达式是负的或为零。

对位置 A，量 $az-cx$ 和 $a-x$ 是负的，而 x 是正的，因此，δz 在所有释放位移下有负值，而位置 A 适宜。

对位置 A'，量 $az-cx$ 和 $a-x$ 是正的，δz 在值 $\delta\lambda$ 和 $\delta\mu$ 为负的或等于零下，不是负的。位置 A' 不适宜。容易看出，如果点 m 放在 A'，那么它将下落。

第二种情形：$x=a$

此时，由式(a)第二个方程得到

$$z-c=\pm R$$

这表明，待求的位置或者在圆柱母线最高处 $z=c-R$，或者在最低处 $z=c+R$。由式(a)第一个方程知，它们在这些母线与以 O 为中心以 l 为半径的球面的交线上。平衡位置的坐标是

$$x=a,\ y\neq 0,\ z=c-R \tag{g}$$

对所有释放位移，有

$$mg\delta z\leqslant 0$$

但在条件(g)下，式(e)给出

$$\delta z=-\frac{x\delta\mu}{az-cx}=\frac{\delta\mu}{R}$$

在所释放位移下，$\delta\mu\leqslant 0$，于是 δz 是负的或为零，因此，两平衡位置(g)都是适宜的。

由约束方程(a)，用 Lagrange 乘子法，得到平衡方程

$$\lambda_1 x-\lambda_2(x-a)=0$$

$$\lambda_1 y=0$$

$$mg+\lambda_1 z-\lambda_2(z-c)=0$$

其中 λ_1，λ_2 应取负值或等于零。

5.5.2 不等式表示为有限形式的约束

研究一质点系，受 g 个等式约束

$$f_\beta(\xi_\mu)=0 \qquad (\beta=1,2,\cdots,g;\mu=1,2,\cdots,3N) \tag{5.5.7}$$

以及 $h-g$ 个不等式约束

$$f_\gamma(\xi_\mu)\leqslant 0 \qquad (\gamma=g+1,g+2,\cdots,h;\mu=1,2,\cdots,3N) \tag{5.5.8}$$

如果

$$f_{g+1}=0$$

就认为这个约束实现了;如果

$$f_{g+1}<0$$

就认为约束未实现。对其余约束 $f_{g+2},\cdots,f_h$ 也这样认为。此时,各不同的平衡位置分解如下。

①所有约束 $f_\gamma(\gamma=g+1,\cdots,h)$ 都实现,为约束所允许的位移使 $f_\beta(\beta=1,2,\cdots,g)$ 保持等于零,而函数 $f_\gamma(\gamma=g+1,\cdots,h)$ 或者保持为零,或者是负的。在这些条件下,为约束所允许的位移满足 g 个等式

$$\delta f_\beta=0 \qquad (\beta=1,2,\cdots,g)$$

和 $h-g$ 个不等式

$$\delta f_\gamma\leqslant 0 \qquad (\gamma=g+1,\cdots,h)$$

这类平衡位置可按第 5.5.1 节中的方法研究。

②式(5.5.8)中的一个未实现,其余都实现。可求平衡位置,使

$$f_{g+1}<0, f_{g+2}=0, f_{g+3}=0,\cdots, f_h=0 \tag{5.5.9}$$

允许的位移满足等式

$$\delta f_\beta=0 \qquad (\beta=1,2,\cdots,g)$$

和不等式

$$\delta f_{g+2}\leqslant 0, \delta f_{g+3}\leqslant 0,\cdots,\delta f_h\leqslant 0$$

但需从这些平衡位置中选取满足条件

$$f_{g+1}<0$$

的平衡位置。

③式(5.5.8)中有 p 个未实现,即

$$f_{g+1}<0, f_{g+2}<0,\cdots, f_{g+p}<0 \tag{5.5.10}$$

其余都实现

$$f_{g+p+1}=0, f_{g+p+2}=0,\cdots, f_h=0 \tag{5.5.11}$$

为约束允许的虚位移满足式(5.5.7)和不等式

$$\delta f_{g+p+1}\leqslant 0, \delta f_{g+p+2}\leqslant 0,\cdots,\delta f_h\leqslant 0 \tag{5.5.12}$$

找到的平衡位置需满足不等式(5.5.10)。

④$f_\gamma(\gamma=g+1,\gamma=g+2,\cdots,h)$ 都不实现。如果仅由约束(5.5.7)可确定平衡位置,需由找到的平衡位置中保持不等式 $f_\gamma<0(\gamma=g+1,\cdots,h)$ 成立。

§5.6 虚位移原理的应用举例

本节给出 10 个典型例子来说明原理对双面理想约束系统的广泛应用。

例 1 三杆系统。

研究用铰链 A 和 B 联结的三个重杆 OA,AB,BC 的系统。铰链 O 不动，而系统在铅垂面 Oxy 借助三条水平线处于平衡，并且杆与铅垂向下的线的夹角分别为 $\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3$(图 5.2)。需确定线的张力 $\boldsymbol{T}_1,\boldsymbol{T}_2,\boldsymbol{T}_3$[7]。

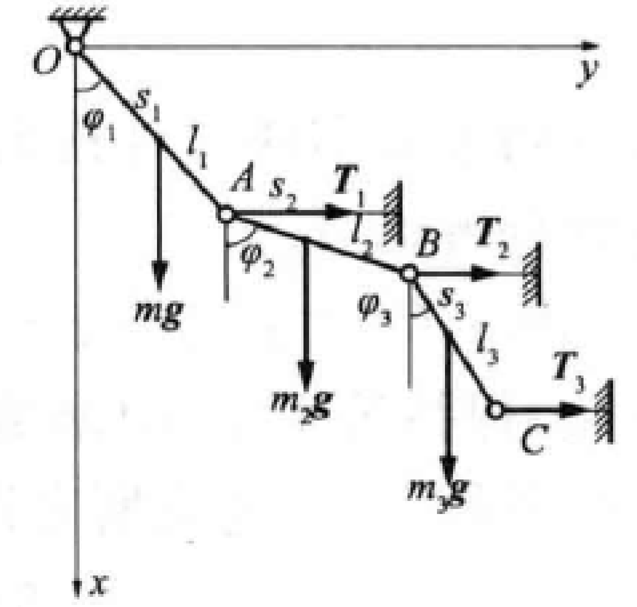


图 5.2

解:将三条水平线解除，代之以线的张力 $\boldsymbol{T}_1,\boldsymbol{T}_2,\boldsymbol{T}_3$。由虚位移原理得

$$T_1\delta x_A+T_2\delta x_B+T_3\delta x_C+m_1g\delta(s_1\cos\varphi_1)+$$
$$m_2g\delta(l_1\cos\varphi_1+s_2\cos\varphi_2)+m_3g\delta(l_1\cos\varphi_1+l_2\cos\varphi_2+s_3\cos\varphi_3)=0 \quad \text{(a)}$$

又

$$x_A=l_1\sin\varphi_1,\ x_B=l_1\sin\varphi_1+l_2\sin\varphi_2,x_C=l_1\sin\varphi_1+l_2\sin\varphi_2+l_3\sin\varphi_3$$

而

$$\delta x_A=l_1\cos\varphi_1\delta\varphi_1$$
$$\delta x_B=l_1\cos\varphi_1\delta\varphi_1+l_2\cos\varphi_2\delta\varphi_2$$
$$\delta x_C=l_1\cos\varphi_1\delta\varphi_1+l_2\cos\varphi_2\delta\varphi_2+l_3\cos\varphi_3\delta\varphi_3$$

得到

$$\Big\{T_1l_1\cos\varphi_1-m_1gs_1\sin\varphi_1+T_2l_1\cos\varphi_1-m_2gl_1\sin\varphi_1+$$
$$T_3l\cos\varphi_1-m_3gl_1\sin\varphi_1\Big\}\delta\varphi_1+\Big\{T_2l_2\cos\varphi_2-m_2gs_2\sin\varphi_2+$$
$$T_3l_2\cos\varphi_2-m_3gl_2\sin\varphi_2\Big\}\delta\varphi_2+\Big\{T_3l_3\cos\varphi_3-m_3gs_3\sin\varphi_3\Big\}\delta\varphi_3=0$$
$$\text{(b)}$$

因 $\delta\varphi_1,\delta\varphi_2,\delta\varphi_3$ 彼此独立，由式(b)的系数为零，得到

$$(T_1+T_2+T_3)l_1\cos\varphi_1-g(m_1s_1+m_2l_1+m_3l_1)\sin\varphi_1=0$$
$$(T_2+T_3)l_2\cos\varphi_2-g(m_2s_2+m_3l_2)\sin\varphi_2=0$$
$$T_3l_3\cos\varphi_3-m_3gs_3\sin\varphi_3=0$$

由此解得

$$\begin{aligned}T_1&=\left(m_1\frac{s_1}{l_1}+m_2+m_3\right)g\tan\varphi_1-\left(m_2\frac{s_2}{l_2}+m_3\right)g\tan\varphi_2\\T_2&=\left(m_2\frac{s_2}{l_2}+m_3\right)g\tan\varphi_2-m_3g\frac{s_3}{l_3}\tan\varphi_3\\T_3&=m_3g\frac{s_3}{l_3}\tan\varphi_3\end{aligned}\quad\text{(c)}$$

为求 T_3，可令点 A,B 不动，使杆 BC 绕点 B 发生虚转动 $\delta\varphi_3$，做功的力仅有 $m_3\boldsymbol{g}$ 和 $\boldsymbol{T}_3$，虚位移原理给出

$$T_3 l_3 \cos\varphi_3 \delta\varphi_3 - m_3 g s_3 \sin\varphi_3 \delta\varphi_3 = 0$$

由 $\delta\varphi_3 \neq 0$，得到

$$T_3 = m_3 g \frac{s_3}{l_3} \tan\varphi_3$$

例 2 一匀质细杆 AB 长 $2a$，其 B 端与光滑铅直墙相接触，并靠在与墙相距为 b 的光滑固定钉子 D 上，如图 5.3 所示。试求杆平衡时的角 θ 以及墙和钉子处的约束力[10]。

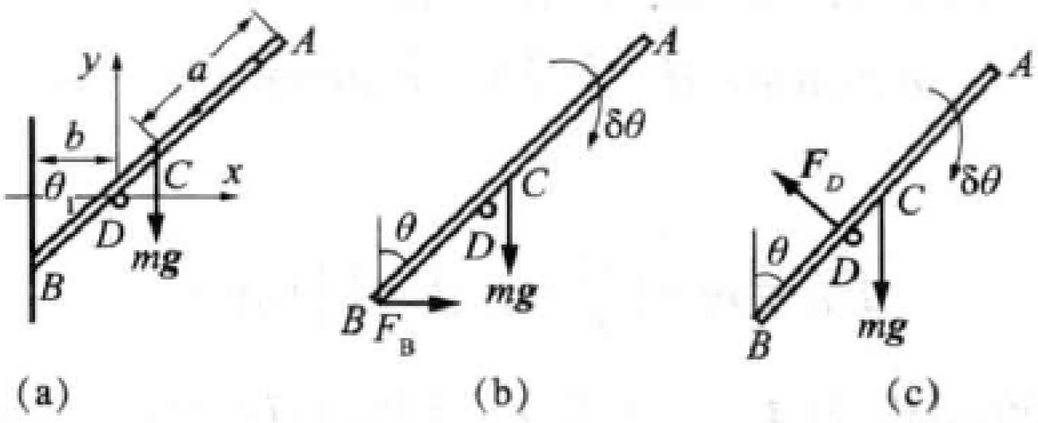


图 5.3

解：在 B,D 处光滑接触，约束是双面理想完整的。虚位移原理给出

$$-mg\delta y_c = 0$$

因

$$y_c = a\cos\theta - b\cot\theta$$

于是有

$$\left(-a\sin\theta + \frac{b}{\sin^2\theta}\right)\delta\theta = 0 \tag{a}$$

又 $\delta\theta \neq 0$，有

$$-a\sin\theta + \frac{b}{\sin^2\theta} = 0$$

即

$$\sin\theta = \sqrt[3]{\frac{b}{a}} \tag{b}$$

这就是平衡时的角 θ。

为求平衡时的角 θ，亦可用求广义力 Q_θ 的方法。实际上，广义力表示为

$$Q_\theta = -mg\boldsymbol{j} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta}$$

而

$$\boldsymbol{r}=(a\sin\theta-b)\boldsymbol{i}+(a\cos\theta-b\cot\theta)\boldsymbol{j}$$

故有

$$Q_\theta=-mg\left(-a\sin\theta+\frac{b}{\sin^2\theta}\right)$$

由平衡方程 $Q_\theta=0$ 得

$$\sin^3\theta=\frac{b}{a}$$

为求 B 处的约束力 $\boldsymbol{F}_B$，将其解除，并令杆 AB 绕点 D 发生虚转动 $\delta\theta$，如图 5.3 (b)所示，虚位移原理给出

$$-mg(a\sin\theta-b)\delta\theta+F_Bb\cot\theta\delta\theta=0 \tag{c}$$

由此得到

$$F_B=mg\left(\frac{a}{b}\sin\theta-1\right)\tan\theta$$

为求 D 处的约束力 $\boldsymbol{F}_D$，解除 D 处约束代之以力 $\boldsymbol{F}_D$，令杆 AB 绕点 B 发生虚转动 $\delta\theta$，如图 5.3(c)所示，虚位移原理给出

$$-F_D\frac{b}{\sin\theta}\delta\theta+mga\sin\theta\delta\theta=0 \tag{d}$$

由此得到

$$F_D=mg\frac{a}{b}\sin^2\theta$$

例 3 如图 5.4 所示，长 $2b$、重 P 的匀质杆 AB，其两端用长 l 的细绳拴于同一水平线上的固定点 C,D，且 $CD=2a$。在一水平力偶矩 M 作用下，杆 AB 转过角 θ 而处于平衡。求 M 与 θ 的关系[10]。

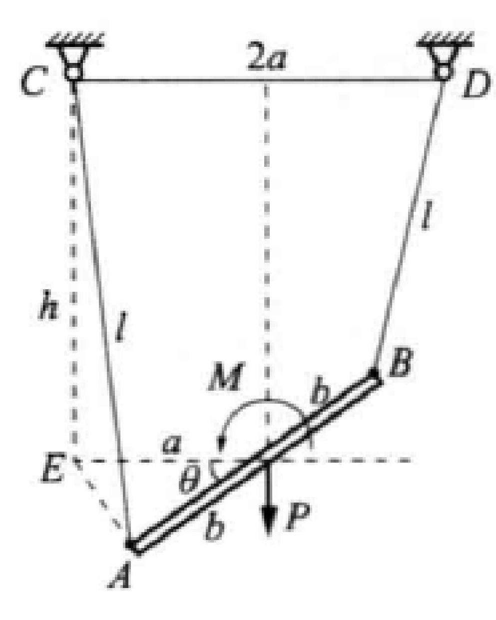


图 5.4

解：细绳的约束是双面理想的。虚位移原理给出重力 P 的功和力偶矩 M 的功之和为零，即

$$P\delta h+M\delta\theta=0 \tag{a}$$

有几何关系

$$AE=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\theta}=\sqrt{(a-b)^2+4ab\sin^2\frac{\theta}{2}}$$

$$CA=l, CE=h, AE^2=l^2-h^2$$

$$h=\sqrt{l^2-(a-b)^2-4ab\sin^2\frac{\theta}{2}}$$

于是有

$$\delta h=\frac{-ab\sin\theta}{\sqrt{l^2(a-b)^2-4ab\sin^2\frac{\theta}{2}}}\delta\theta \tag{b}$$

将式(b)代入式(a)，由 $\delta\theta\neq 0$，得到

$$M=\frac{Pab\sin\theta}{\sqrt{l^2-(a-b)^2-4ab\sin^2\frac{\theta}{2}}}$$

例 4 研究放在椭球面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{a}$$

上的两质点 m_1 和 m_2，它们以与距离成正比的力相互吸引或排斥，试求平衡位置[5]。

解：设两质点的坐标为 (x_1, y_1, z_1) 和 (x_2, y_2, z_2)，此时力函数表示为

$$U=\frac{1}{2}k\left\{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2\right\} \tag{b}$$

其中常数 k 对引力时为负的，对斥力时为正的。

虚位移原理给出

$$\delta U=0$$

即

$$k\left\{(x_1-x_2)(\delta x_1-\delta x_2)+(y_1-y_2)(\delta y_1-\delta y_2)+(z_1-z_2)(\delta z_1-\delta z_2)\right\}=0 \tag{c}$$

对方程(a)取变分，得到虚位移方程

$$\frac{x_1}{a^2}\delta x_1+\frac{y_1}{b^2}\delta y_1+\frac{z_1}{c^2}\delta z_1=0$$

$$\frac{x_2}{a^2}\delta x_2+\frac{y_2}{b^2}\delta y_2+\frac{z_2}{c^2}\delta z_2=0$$

利用 Lagrange 乘子法，将第一个方程乘以 λ_1，第二个方程乘以 λ_2，并与方程(c)相加，然后将坐标变分的系数取为零，取得如下 6 个方程

$$\begin{aligned}
&\left(k+\frac{\lambda_1}{a^2}\right)x_1-kx_2=0, \quad -kx_1+\left(k+\frac{\lambda_2}{a^2}\right)x_2=0\\
&\left(k+\frac{\lambda_1}{b^2}\right)y_1-ky_2=0, \quad -ky_1+\left(k+\frac{\lambda_2}{b^2}\right)y_2=0\\
&\left(k+\frac{\lambda_1}{c^2}\right)z_1-kz_2=0, \quad -kz_1+\left(k+\frac{\lambda_2}{c^2}\right)z_2=0
\end{aligned} \tag{d}$$

对这些方程还要施加两个方程

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}+\frac{z_1^2}{c^2}=1$$

$$\frac{x_2^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2}+\frac{z_2^2}{c^2}=1$$

由方程(d)的第一对得到

$$x_1=x_2=0 \tag{e}$$

或行列式为零,即

$$\left(k+\frac{\lambda_1}{a^2}\right)\left(k+\frac{\lambda_2}{a^2}\right)-k^2=0$$

它可表示为

$$\lambda_1\lambda_2+ka^2(\lambda_1+\lambda_2)=0 \tag{f}$$

类似地,得到

$$y_1=y_2=0,\quad \lambda_1\lambda_2+kb^2(\lambda_1+\lambda_2)=0 \tag{g}$$

$$z_1=z_2=0,\quad \lambda_1\lambda_2+kc^2(\lambda_1+\lambda_2)=0 \tag{h}$$

如果 a^2,b^2,c^2 彼此不相等,那么方程(f),(g),(h)仅在条件

$$\lambda_1+\lambda_2=0$$

下是相容的,可取等式

$$\lambda_1=\lambda_2=0$$

在此情形下,由方程(d)得到

$$x_1=x_2,y_1=y_2,z_1=z_2$$

即质点 m_1 和 m_2 重合,但可在椭球面上取任意位置。所求得的平衡位置布满整个椭球面,将此类称为第一类平衡位置。

如果 $\lambda_1+\lambda_2\neq0$,那么三个等式(f),(g),(h)仅能成立一个,例如式(f)成立,此时有

$$y_1=y_2=z_1=z_2=0$$

因此有

$$x_1=a,\quad x_2=-a$$

或

$$x_1=-a,\quad x_2=a$$

即两质点在椭球轴的两端,距离为 $2a$。这两个平衡位置称为第二类平衡位置。类似地,还可找到 4 个第二类平衡位置

$$z_1=z_2=x_1=x_2=0,y_1=\pm b,y_2=\mp b$$

$$x_1=x_2=y_1=y_2=0,z_1=\pm c,z_2=\mp c$$

如果 $b=c$,那么第二类平衡位置为无限集合:在椭球赤道上,点的坐标有值 $x_1=x_2=0$。最后,如果 $a=b=c$,第二类平衡位置将布满整个椭球面。

例 5 求两端固定的匀质重链条的平衡形状[6]。

解:将匀质重链条当作刚体系统。取平面 Oxz 为铅垂平面,轴 Oz 铅垂向上。如图 5.5 所示链的重心坐标为

$$z_c=\frac{\int z\mathrm{d}s}{\int \mathrm{d}s}$$

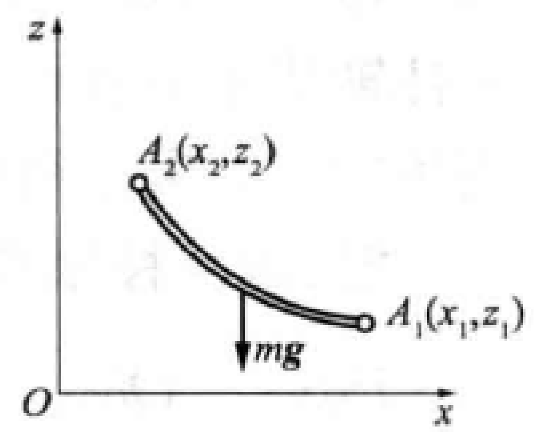


图 5.5

其中 $\int \mathrm{d}s$ 为链条长,它是不变的。虚位移原理给出

$$-mg\delta z_c=0$$

即

$$\delta\int z\mathrm{d}s=0$$

这个关系可表示为

$$\delta\int_{z_1}^{z_2} z\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}\right)^2}\mathrm{d}z=0$$

由变分法知,有如下微分方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left\{\frac{\partial}{\partial\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}\right)}\left[z\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}\right)^2}\right]\right\}-\frac{\partial}{\partial x}\left[z\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}\right)^2}\right]=0$$

即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left\{z\frac{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}}{\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}\right)^2}}\right\}=0$$

由此得到

$$z\frac{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}}{\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}\right)^2}}=c$$

解得

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}=\frac{c}{\sqrt{z^2-c^2}}$$

其中 c 为常数，积分得

$$z=\frac{c}{z}\left\{\exp\left(\frac{x-\alpha}{c}\right)+\exp\left(-\frac{x-\alpha}{c}\right)\right\}$$

其中常数 c 和 α 由端点条件确定。因此，链条的平衡形状就是悬链线。

例 6 线密度为 ρ 的均质重链，其两端连着重力分别为 P 和 Q 的小球 A 和 B。链条放在半径为 R 的光滑圆柱上，如图 5.6 所示。圆柱轴线水平放置，链条所在平面与圆柱轴线垂直，$\angle AOC=\alpha$，C 为链条中点。求平衡时线 OC 与水平线的夹角 φ[13]。

解：虚位移原理给出

$$-P\delta y_A-Q\delta y_B-\delta\int_0^{2\alpha}\rho gRy_\theta\mathrm{d}\theta=0$$

其中

$$y_A=R\sin(\pi-\varphi-\alpha),\quad y_B=R\sin(\varphi-\alpha),$$
$$y_\theta=R\sin(\alpha+\varphi-\theta)$$

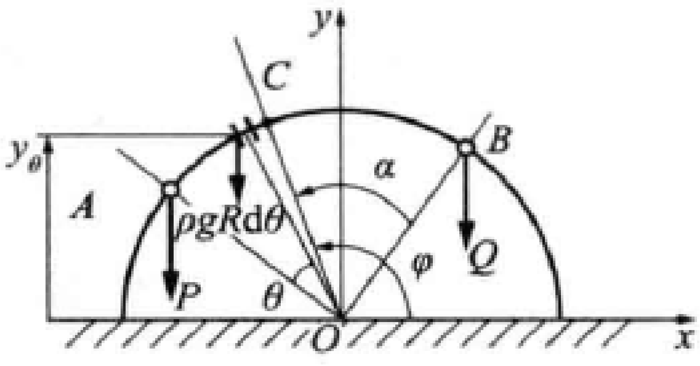


图 5.6

代入得

$$-PR\cos(\alpha+\varphi)\delta\varphi-QR\cos(\varphi-\alpha)\delta\varphi-$$
$$\rho gR^2\int_0^{2\alpha}\cos(\alpha+\varphi-\theta)\mathrm{d}\theta\delta\varphi=0$$

即

$$(P+Q)\cos\alpha+(-P+Q)\sin\alpha\tan\varphi+\rho gR[\cos(\varphi-\alpha)-\cos(\varphi+\alpha)]=0$$

解得

$$\tan\varphi=\frac{(P+Q)\cos\alpha+2\rho gR\sin\alpha}{(P-Q)\sin\alpha}$$

例 7 如图 5.7 所示平面桁架，ABC 为等边三角形，D,E,F 分别为三边的中点，求 CD 杆的内力，已知水平力 $\boldsymbol{P}$ 作用在铰链 F 处。

解：为求 CD 杆内力，可去掉 CD 杆，代之以约束力 $\boldsymbol{F}_C,\boldsymbol{F}_D$。取特殊虚位移使点 C 不动，$\delta\boldsymbol{r}_F\perp FC$，$\delta\boldsymbol{r}_D\perp DB$，虚位移原理给出

$$P\delta r_F\cos 30^\circ+F_D\delta r_D=0$$

由虚速度投影定理知

$$\delta r_D\cos 30^\circ=\delta r_F\cos 30^\circ$$



图 5.7

得

$$\delta r_F=\delta r_D$$

代入得

$$F_D = -P\frac{\sqrt{3}}{2}$$

例 8 二自由度保守系统的力函数为

$$U=\frac{1}{2}(x+y)^2$$

试研究系统的平衡位置。

解: 平衡方程(5.4.15)给出

$$\frac{\partial U}{\partial x}=x+y=0$$

$$\frac{\partial U}{\partial y}=x+y=0$$

可见,平衡位置不是孤立的,而是组成平衡状态流形,其维数为1,即在 $x+y=0$ 的直线上的各点都是平衡位置,如图 5.8 所示。

例 9 单位质量质点在空间中运动,力函数为

$$U=z+\frac{1}{2}(ax+by)^2$$

所受非完整约束为

$$\dot{z}=cy\dot{x}$$

其中 a,b,c 为常数。试研究其平衡位置。

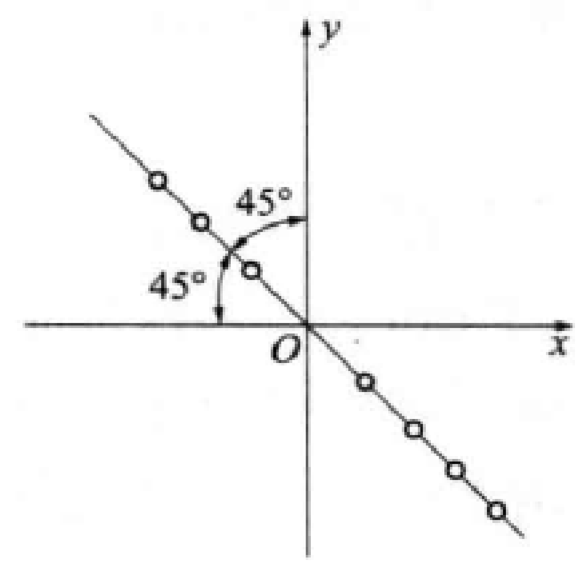


图 5.8

解: 平衡方程(5.4.27)给出

$$ax-\lambda cy=0$$

$$by=0$$

$$1+\lambda=0$$

由此解得

$$x=y=0, \lambda=-1$$

考虑到约束方程,得到平衡位置为

$$x=y=\dot{x}=\dot{y}=0, z=\text{const.}$$

这是一个平衡状态流形,其维数等于 1。这表明,Oz 轴上的任意点都是平衡位置。

例 10 研究冰刀的平衡问题[12]。

解: 取冰刀与冰面接触点 P 的坐标(x,y)以及冰刀方向与固定线 Ox 的夹角 θ 为坐标,如图5.9 所示。假设主动力系向点(x,y)简化结果为

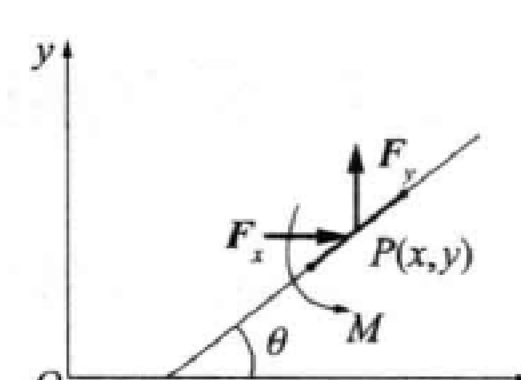


图 5.9

力 $\boldsymbol{F}_x,\boldsymbol{F}_y$ 和力偶矩 M。虚位移原理给出

$$F_x\delta x+F_y\delta y+M\delta\theta=0$$

表示冰刀不允许横滑的非完整约束方程为

$$\dot{y}-\dot{x}\tan\theta=0$$

虚位移方程为

$$\delta y-\delta x\tan\theta=0$$

将其代入原理,消去 δy,得到

$$(F_x+F_y\tan\theta)\delta x+M\delta\theta=0$$

由 $\delta x,\delta\theta$ 彼此独立,得到平衡时主动力之间的关系

$$F_x+F_y\tan\theta=0$$

$$M=0$$

注意到,问题的平衡位置为流形

$$x=y=\dot{x}=\dot{y}=0,\theta=\text{const.}$$

而流形的维数是 1。

虚位移原理给出的方程是静力学的普遍方程,可用来求平衡位置(例 2、例 4),求平衡时主动力之间的关系(例 3、例 10),求约束力(例 1、例 2、例 7)等。

应用虚位移原理解静力学问题的关键在于给出主动力作用点的虚位移,通常采用坐标法——写出点的坐标,再取变分(例 1、例 2、例 3、例 5、例 6);虚速度法——类似运动学中速度投影定理给出的两个虚位移关系(例 7);特殊虚位移法(例 1、例 7)等。

对有约束情形,虚位移原理可在独立变分下写出(例 1),也可在不独立变分下写出,然后再研究它们之间的关系(例 2、例 3、例 6);可以用求广义力的方法(例 2);可以利用 Lagrange 乘子法(例 4、例 9)等。在求约束力时,需解除约束代之以约束力,并计算约束力的虚功。对非完整约束情形,平衡位置一般不是孤立的,而是组成平衡状态流形(例 9、例 10)。有些完整约束情形,平衡位置也可能不是孤立的(例 8)。

§5.7 保守系统的平衡稳定性

本节讨论**保守系统**的**平衡稳定性**问题,包括 Lagrange 和 Appell 的有关论述,Ляпунов 和 Четаев 的有关论述,最后给出一些例子说明理论的应用。有关平衡不稳定性问题,仍然是一个开放问题。

5.7.1 Lagrange 关于平衡稳定性的论述

Lagrange 在《分析力学》中写道：

"刚刚看到，当系统的位置是平衡位置时，函数 Π 取极小或极大；现在证明，如果这个函数是极小，则平衡是稳定的……反之，在这个函数是极大的情形，平衡将是不稳定的。"[1]

上面所指函数 Π 即**势函数**。

5.7.2 Appell 的有关论述

Appell 在他的著作第一卷第三部分第 208 节写道[2]：

"如果在给定位置上函数 U 有极大，那么相应的平衡是稳定的。"

"有时反述也是对的。如果在孤立平衡位置上，导数 $\partial U/\partial x, \partial U/\partial y, \partial U/\partial z$ 变为零，但函数 U 没有极大，那么相应平衡将是不稳定的。对更广泛一类情形，这个结论由 Ляпунов 和 Hadamard 证明。但如果所研究的平衡位置不是孤立的，那么平衡将是稳定的，但函数 U 不是极大，这已由 Painlevé 证明，他给出例子

$$U=\frac{1}{2}m\left(x^5\sin\frac{1}{x}-y^2-z^2\right) \tag{5.7.1}$$

在此例中，坐标原点是稳定平衡位置，但函数 U 不是极大。"

上面所指函数 U 即力函数。

5.7.3 Ляпунов 和 Четаев 的工作

Ляпунов 提出如下问题：

如果力函数在平衡位置上不是极大，平衡位置是不稳定的吗？

答案是：不一定。但在一定限制下，可以是不稳定的。下面两个定理给出了这些限制。

定理 1 (Ляпунов) 如果力函数(假设是解析的)在平衡位置上有极小，而这是由力函数展开式中最低次项的和所决定的，那么平衡是不稳定的。

定理 2 (Ляпунов) 如果力函数(假设是解析的)在平衡位置上没有极大，而这已在二阶项上查明，不必研究高阶项，那么平衡位置是不稳定的。

Четаев 给出平衡不稳定的如下两个定理。

定理 3 (Четаев) 如果力函数有形式 $U=U^{(m)}$，并在平衡位置领域内可取正值，那么平衡位置是不稳定的。

定理 4 (Четаев) 如果力函数有形式

$$U=U^{(m)}+U^{(m+1)}+\cdots$$

在平衡位置领域内可取正值，那么当在 $V>0$ 区域上表达式 U 以及 $mU^{(m)}+(m+1)U^{(m+1)}+\cdots$ 的符号由最低项 $U^{(m)}$ 的符号确定时，平衡位置是不稳定的。

5.7.4 关于平衡位置的不稳定性

Lagrange 关于平衡稳定性的定理表述为

①如果保守力学系统的平衡位置上势能取极小值,则该平衡是稳定的[14]。

②如果力函数在平衡位置是严格极大,则该平衡位置是稳定的[15]。

后一种表述比前一种更确切。

值得注意的是,Lagrange 平衡稳定性定理是一个充分条件,一般并不是必要条件。即在一般情况下,Lagrange 逆定理是不成立的,对单自由度系统也不成立。1941 年,Wintner 举出一个反例:单自由度非线性系统具有力函数

$$\text{当 } q\neq 0 \text{ 时}, U(q)=-\exp\left(-\frac{1}{q^2}\right)\cos\frac{1}{q} \tag{5.7.2}$$

$$\text{当 } q=0 \text{ 时}, U(0)=0$$

Wintner 证明,虽然力函数 $U(q)$ 在平衡位置既不取一极大值,又不取一极小值,但该平衡位置是稳定的[16]。与式(5.7.2)类似的情形,如图 5.10 所示。

$$U(q)=\exp\left(-\frac{1}{|q|}\right)\cos\left(\frac{1}{|q|}\right)$$

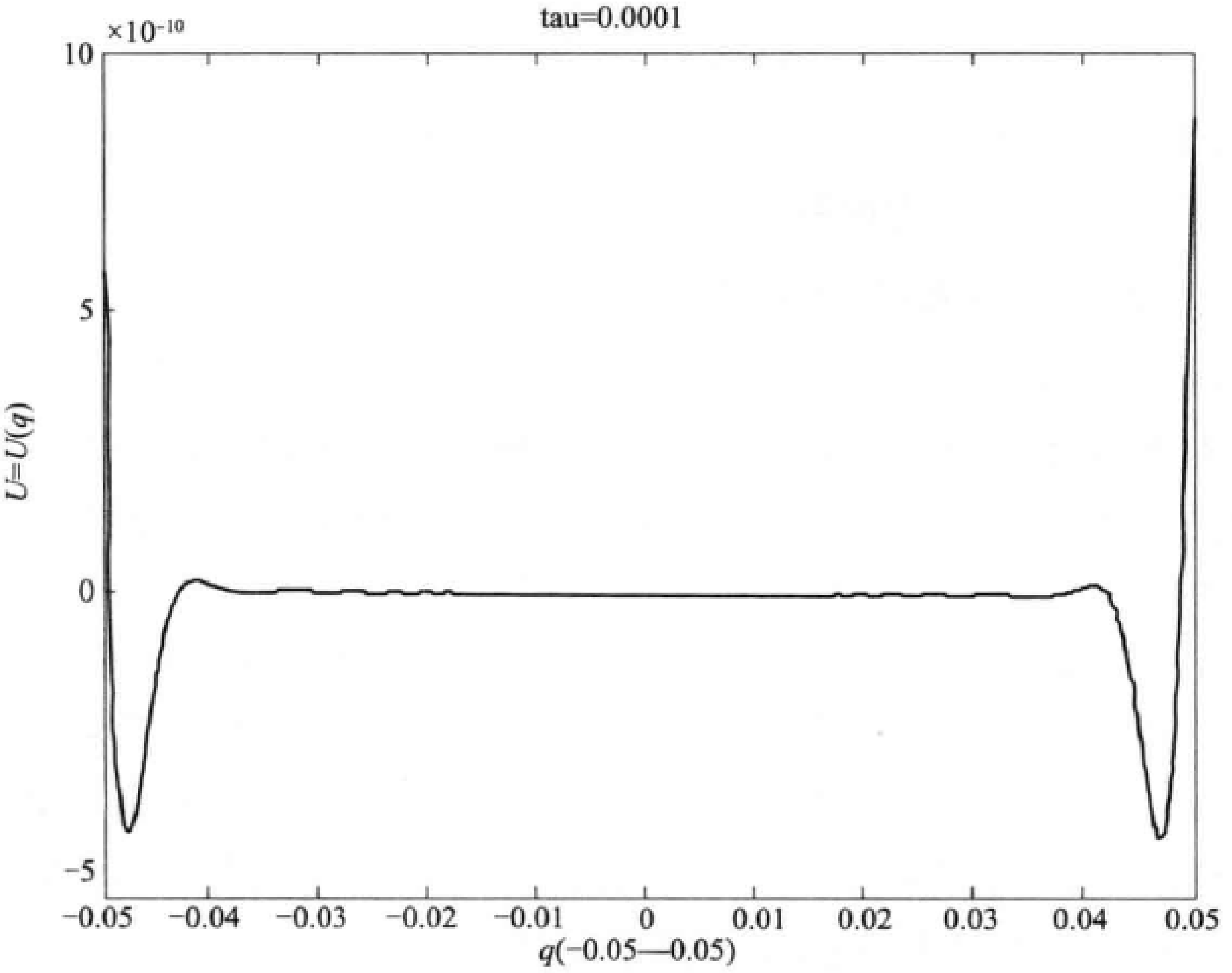


图 5.10

关于平衡不稳定性除上述 4 个定理,还有其他结果,而且还在继续研究。这应该是一个开放问题。

关于平衡稳定性的前提是:平衡位置是孤立的。如果不是孤立的,而组成**平衡状态流形**,则需另外研究。

5.7.5 力函数的极值特性

完整保守系统平衡稳定性的充分条件由 Lagrange 定理给出：如果力函数在平衡位置上有严格的局部极大，则平衡是稳定的。

因此，为研究平衡稳定性，需讨论力函数的极值问题。

1)单自由度情形

当

$$\left(\frac{\partial U}{\partial q}\right)_0=0,\left(\frac{\partial^2 U}{\partial q^2}\right)_0<0 \tag{5.7.3}$$

时，U 为极大；当

$$\left(\frac{\partial U}{\partial q}\right)_0=0,\left(\frac{\partial^2 U}{\partial q^2}\right)_0>0 \tag{5.7.4}$$

时，U 为极小；当

$$\left(\frac{\partial^k U}{\partial q^k}\right)_0=0(k=1,2,\cdots,n-1),\left(\frac{\partial^n U}{\partial q^n}\right)_0<0 \tag{5.7.5}$$

且 n 为偶数时，U 为极大；当

$$\left(\frac{\partial^k U}{\partial q^k}\right)_0=0(k=1,2,\cdots,n-1),\left(\frac{\partial^n U}{\partial q^n}\right)_0>0 \tag{5.7.6}$$

且 n 为偶数时，U 为极小；当

$$\left(\frac{\partial^k U}{\partial q^k}\right)_0=0(k=1,2,\cdots,n-1),\left(\frac{\partial^n U}{\partial q^n}\right)_0\neq 0 \tag{5.7.7}$$

且 n 为奇数时，U 无极值。

2)二自由度情形

当

$$\begin{gathered}\left(\frac{\partial U}{\partial q_1}\right)_0=\left(\frac{\partial U}{\partial q_2}\right)_0=0,\left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_1^2}\right)_0<0\\ \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_1^2}\right)_0\left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_2^2}\right)_0-\left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_1\partial q_2}\right)_0^2>0\end{gathered} \tag{5.7.8}$$

时，U 为极大；当

$$\begin{gathered}\left(\frac{\partial U}{\partial q_1}\right)_0=\left(\frac{\partial U}{\partial q_2}\right)_0=0,\left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_1^2}\right)_0>0\\ \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_1^2}\right)_0\left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_2^2}\right)-\left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_1\partial q_2}\right)_0^2>0\end{gathered} \tag{5.7.9}$$

时，U 为极小；当

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_1^2}\right)_0\left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_2^2}\right)_0-\left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_1\partial q_2}\right)_0^2<0 \tag{5.7.10}$$

时，U 无极值。

3)n 个自由度情形

引进记号

$$U^0_{q_1^{p_1}q_2^{p_2}\cdots q_n^{p_n}}=\left(\frac{\partial^k U}{\partial q_1^{p_1}\partial q_2^{p_2}\cdots\partial q_n^{p_n}}\right)_0,k=\sum_{i=1}^n p_i \tag{5.7.11}$$

计算行列式 D_i

$$D_i=\begin{vmatrix} U^0_{q_1^2} & U^0_{q_1q_2} & \cdots & U^0_{q_1q_i} \\ U^0_{q_2q_1} & U^0_{q_2^2} & \cdots & U^0_{q_2q_i} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ U^0_{q_iq_1} & U^0_{q_iq_2} & \cdots & U^0_{q_i^2} \end{vmatrix} \tag{5.7.12}$$

当

$$D_i<0\quad(i=1,3,5,\cdots),\quad D_i>0\quad(i=2,4,6,\cdots) \tag{5.7.13}$$

时,U 为极大;当

$$D_i>0\quad(i=1,2,\cdots,n) \tag{5.7.14}$$

时,U 为极小;当式(5.7.13),(5.7.14)都不成立时,U 无极值。

5.7.6 算例

例 1 无阻尼下垂单摆的平衡稳定性。

解:研究

$$-\frac{\pi}{2}<0<\frac{\pi}{2}$$

的情形。力函数为

$$U=-mgl(1-\cos\theta)$$

其中 l 为摆长;mg 为摆重;θ 为摆与铅垂向下的线的夹角,如图 5.11 所示。

平衡方程为

$$\frac{\partial U}{\partial\theta}=0$$

即

$$-mgl\sin\theta=0$$

由此得到平衡位置

$$\theta=0$$

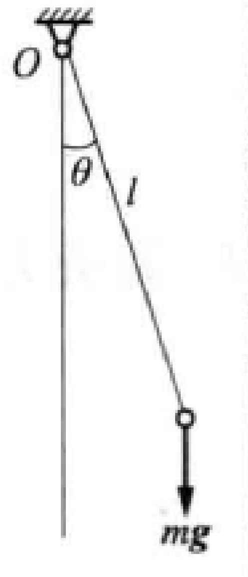


图 5.11

又

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial\theta^2}\right)_0=(-mgl\cos\theta)_0=-mgl<0$$

因此,力函数 U 在平衡位置 $\theta=0$ 上有极大值。由 Lagrange 定理知,该平衡位置是稳定的。

研究

$$-\pi<\theta<\pi$$

的情形。此时，尚有另一平衡位置为

$$\theta=\pi$$

为研究这个平衡位置的稳定性，令

$$\theta=\pi+\xi$$

力函数为

$$\begin{aligned} U &= -mgl(1-\cos\pi\cos\xi+\sin\pi\sin\xi) \\ &= -mgl(1+\cos\xi) \\ &= -mgl\left(1+1-\frac{\xi^2}{2!}+\frac{\xi^4}{4!}+\cdots\right) \end{aligned}$$

于是

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial\theta^2}\right)_{\xi=0}=mgl>0$$

在平衡位置 $\xi=0$ 上，U 取极小。由定理 1 知，平衡位置 $\theta=\pi$ 是不稳定的。

例 2 在一固定圆木上放一宽 $2h$ 的方木，使其重心 C_0 在圆木铅垂半径的延长线上。试研究方木的平衡稳定性[17]。

解：假设方木沿圆木无滑动地滚动。圆木转角为 φ，走过弧长 AB 为 $r\varphi$，其中 r 为圆木半径，如图 5.12 所示。计算方木重力的力函数，有

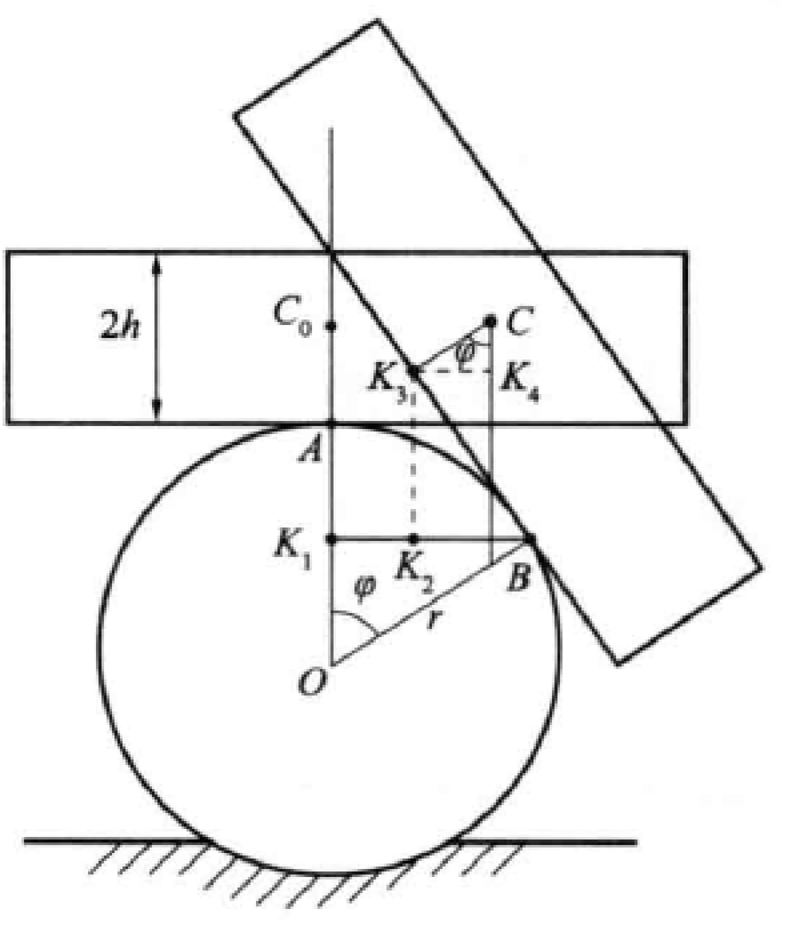


图 5.12

$$\begin{aligned} U &= -mg(y_C - h - r) \\ &= -mg(OK_1 + K_2K_3 + K_4C - h - r) \\ &= -mg(r\cos\varphi + r\varphi\sin\varphi + h\cos\varphi - h - r) \end{aligned}$$

平衡的必要充分条件为

$$\frac{\partial U}{\partial \varphi} = 0$$

即

$$-mg(r\varphi\cos\varphi - h\sin\varphi) = 0$$

由此得平衡位置

$$\varphi = 0$$

当 $\varphi=0$ 时，有

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}\right)_0 = -mg(r-h)$$

因此，当 $r>h$ 时，U 为极大；当 $r<h$ 时，U 为极小。对前一情形，由 Lagrange 定理知，它是稳定的。对后一情形，由定理 1 知，它是不稳定的。

例 3 用 4 根等长连杆和弹簧支承刚性平台，平台上放置的重物与平台共重 P，连杆长 l，$O_1O_2=CD=2a$，弹簧原长为 $2a$，弹簧常数为 k，不计连杆和弹簧重量及各处摩擦。试研究系统的平衡位置及其稳定性[18]。

解：系统有一个自由度，取 θ 为广义坐标，如图 5.13 所示。力函数为

$$U = 2Pl(1-\sin\theta) - \frac{1}{2}k(2l\cos\theta)^2$$

平衡方程为

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = -2l\cos\theta(P - 2kl\sin\theta) = 0$$

于是得到两个平衡位置

$$\theta = \theta_1 = \frac{\pi}{2}$$

$$\theta = \theta_2 = \arcsin\left(\frac{P}{2kl}\right) \quad (P<2kl)$$

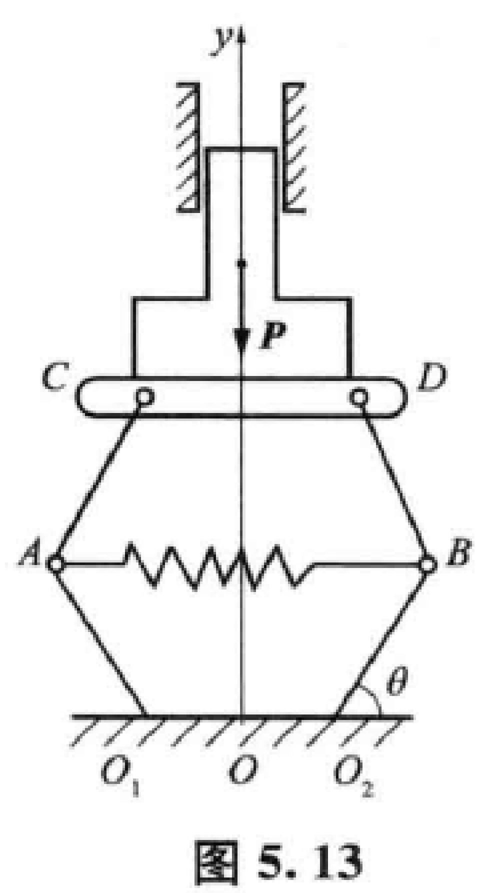


图 5.13

为研究 $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$ 的稳定性，令

$$\theta = \theta_1 + \xi$$

则平衡在 $\xi=0$。这时有

$$U=2Pl(1-\cos\xi)-2kl^2\sin^2\xi$$

$$U(0)=0$$

$$\frac{\partial U}{\partial \xi}=2Pl\sin\xi-4kl^2\sin\xi\cos\xi$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial \xi}\right)_0=0$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}=2Pl\cos\xi-4kl^2(\cos^2\xi-\sin^2\xi)$$

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}\right)_0=2l(P-2kl)$$

当

$$P-2kl<0$$

时,力函数在平衡位置上有极大。据 Lagrange 定理知,平衡位置是稳定的。当

$$P-2kl\geqslant 0$$

时,展开力函数,得

$$\begin{aligned}U&=2P\left[1-\left(1-\frac{1}{2!}\xi^2+\frac{1}{4!}\xi^4-\cdots\right)\right]-2kl^2\left(\xi^2-\frac{2}{3!}\xi^4+\cdots\right)\\&=(P-2kl)l\xi^2+\left(\frac{2}{3}kl-\frac{1}{12}P\right)l\xi^4+\cdots\end{aligned}$$

当 $P-2kl>0$ 时,U 中 ξ^2 项为正,据定理 1 知,平衡是不稳定的。当 $P-2kl=0$ 时,U 中 ξ^2 项系数为零,ξ^4 项系数为正,由定理 1 知,平衡是不稳定的。

为研究

$$\theta_2=\arcsin\left(\frac{P}{2kl}\right)$$

的稳定性,令

$$\theta=\theta_2+\eta$$

则力函数为

$$\begin{aligned}U=&2Pl-2Pl(\sin\theta_2\cos\eta+\cos\theta_2\sin\eta)-\\&2kl^2[1-(\sin\theta_2\cos\eta+\cos\theta_2\sin\eta)^2]\end{aligned}$$

于是有

$$\frac{\partial U}{\partial \eta}=-2Pl(-\sin\theta_2\sin\eta+\cos\theta_2\cos\eta)+$$
$$4kl^2(\sin\theta_2\cos\eta+\cos\theta_2\sin\eta)(-\sin\theta_2\sin\eta+\cos\theta_2\cos\eta)$$
$$\left(\frac{\partial U}{\partial \eta}\right)_0=\cos\theta_2(-2Pl+4kl^2\sin\theta_2)=0$$
$$\frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2}=2Pl(\sin\theta_2\cos\eta+\cos\theta\sin\eta)+4kl^2[(-\sin\theta_2\sin\eta+\cos\theta_2\cos\eta)^2-$$
$$(\sin\theta_2\cos\eta+\cos\theta_2\sin\eta)^2]$$
$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2}\right)_0=2Pl\sin\theta_2+4kl^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)$$
$$=\frac{1}{k}(4k^2l^2-P^2)>0$$

这表明,力函数在平衡位置 $\theta=\theta_2$ 上有极小,平衡是不稳定的。

例 4 在光滑圆柱上放置长为 $2l$,重同为 P 的两匀质杆。两杆用光滑铰链相联结,并在铅垂面内,试研究系统的平衡稳定性[9,12]。

解:系统有两个自由度。设铰链 A 与圆柱中心 O 连线 AO 与杆的夹角为 φ,AO 与铅垂线的夹角为 θ,如图 5.14 所示。取 φ,θ 为广义坐标,且

$$-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2},0<\varphi<\frac{\pi}{2}$$

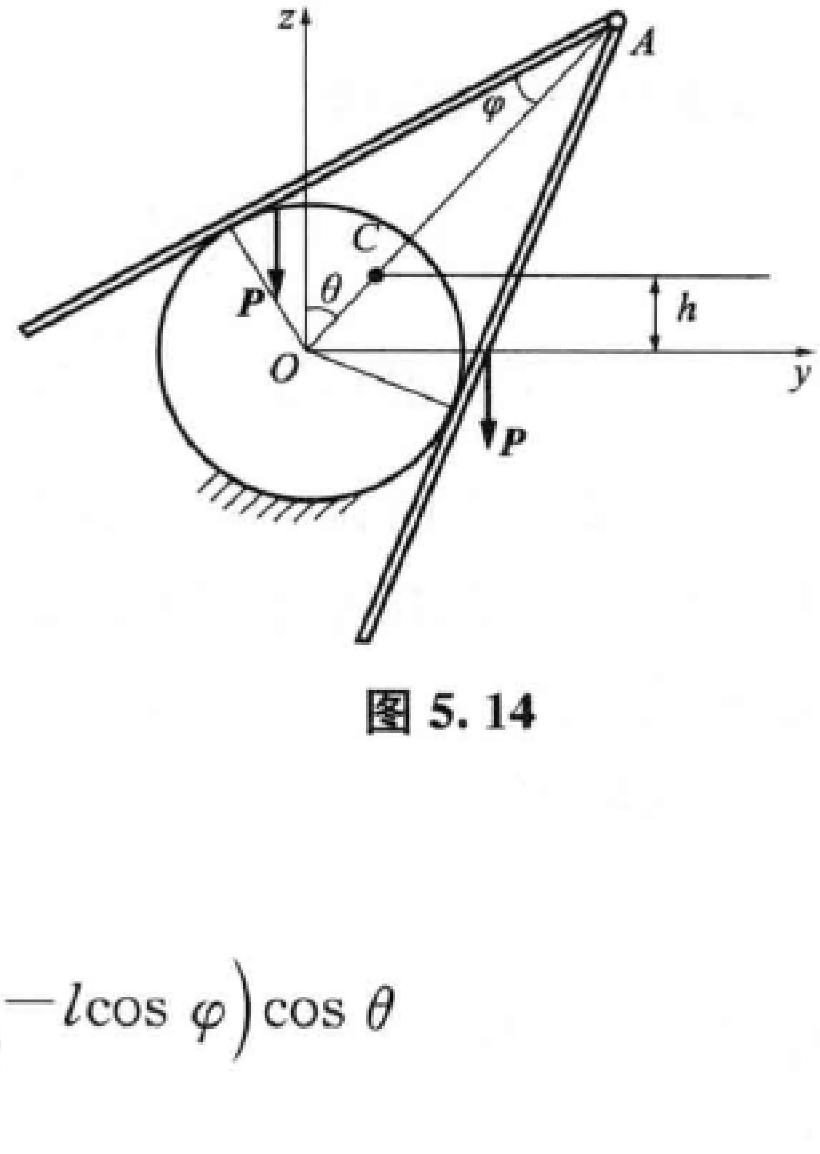


图 5.14

两杆系统重心 C 离点 O 的高度为

$$h=\overline{OC}\cos\theta=(\overline{OA}-\overline{AC})\cos\theta$$
$$=\left(\frac{a}{\sin\varphi}-l\cos\varphi\right)\cos\theta$$

力函数为

$$U=-2Ph=-2P\left(\frac{a}{\sin\varphi}-l\cos\varphi\right)\cos\theta$$

系统的平衡方程为

$$\frac{\partial U}{\partial \varphi}=-2P\left(-\frac{a\cos\varphi}{\sin^2\varphi}+l\sin\varphi\right)\cos\theta=0$$
$$\frac{\partial U}{\partial \theta}=2P\left(\frac{a}{\sin\varphi}-l\cos\varphi\right)\sin\theta=0$$

于是有

$$\sin\theta=0,-\frac{a\cos\varphi}{\sin^2\varphi}+l\sin\varphi=0$$

即

$$\theta=0, l\tan^3\varphi-a(1+\tan^2\varphi)=0$$

由后一方程得一实根 $\tan\varphi_0$，即得一平衡位置

$$\theta=0, \varphi=\varphi_0$$

为判断平衡位置的稳定性，需计算二阶偏导数，有

$$\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2}=-2P\left(a\,\frac{2\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}{\sin^3\varphi}+l\cos\varphi\right)\cos\theta$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial\theta^2}=2P\left(\frac{a}{\sin\varphi}-l\cos\varphi\right)\cos\theta=-U$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi\partial\theta}=2P\left(-a\,\frac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi}+l\sin\varphi\right)\sin\theta$$

将 $\theta=0, \varphi=\varphi_0$ 代入上式，得

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2}\right)_0=-2P\left(a\,\frac{2\cos^2\varphi_0+\sin^2\varphi_0}{\sin^3\varphi_0}+l\cos\varphi_0\right)<0$$

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial\theta^2}\right)_0=2P\left(\frac{a}{\sin\varphi_0}-l\cos\varphi_0\right)=2P\cdot\overline{OC}$$

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi\partial\theta}\right)_0=0$$

力函数取极大归为条件

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2}\right)_0\left(\frac{\partial^2 U}{\partial\theta^2}\right)_0-\left(\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi\partial\theta}\right)_0>0$$

即 $\overline{OC}<0$。这表明，当两杆系统重心在圆柱中心 O 的下方时，平衡是稳定的。

例 5 质量为 m 的质点在铅垂面内光滑曲线 $y=ax^3$ 上在重力作用下运动，轴 Oy 铅垂向上，如图 5.15 所示。试研究平衡位置的稳定性[19]。

解：力函数为

$$U=-mgax^3$$

平衡方程给出

$$\frac{\partial U}{\partial x}=-3mgax^2=0$$

于是得平衡位置为

$$x=0, y=0$$

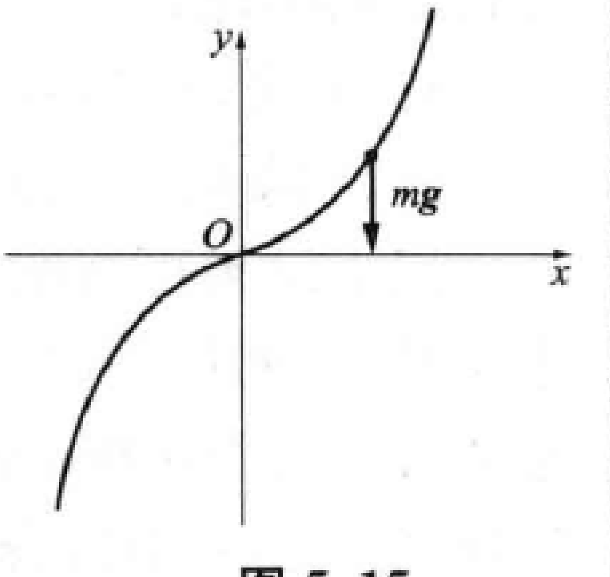


图 5.15

力函数 U 在平衡位置邻域内可取正值，由定理 3 知，平衡是不稳定的。

例 6 一质量为 m 的小球 A 可沿铅垂放置的半径为 r 的光滑固定圆环滑动,并用刚度系数为 k,原长为 l_0 的弹簧与圆环上的 B 点连接($kr>mg$),如图 5.16 所示。试求小球 A 的平衡位置,并讨论其稳定性[19]。

解:将小球当作质点,取角 θ 为广义坐标,力函数为

$$U=mgr\cos^2\theta-\frac{1}{2}k(2r\cos\theta-l_0)^2$$

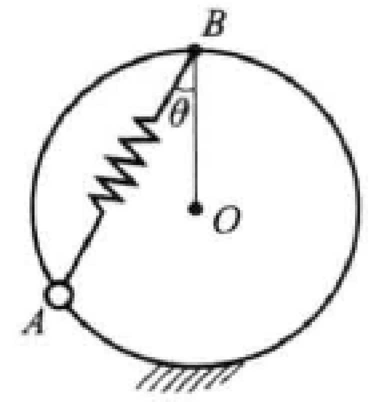


图 5.16

平衡方程为

$$\frac{\partial U}{\partial\theta}=2r\sin\theta(kr-mg)(\cos\theta-\sigma)=0$$

其中

$$\sigma=\frac{kl_0}{2(kr-mg)}$$

平衡位置为

$$\theta_1=0,\theta_2=\arccos\sigma$$

其中 θ_2 仅在 $\sigma<1$,即 $k>k_{cr}$

$$k_{cr}=\frac{2mg}{2r-l_0}$$

条件下存在。

计算 U 对 θ 的二阶导数,得到

$$\frac{\partial^2 U}{\partial\theta^2}=2r(kr-mg)(\cos 2\theta-\sigma\cos\theta)$$

于是有

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial\theta^2}\right)_{\theta_1}=2r(kr-mg)(1-\sigma)$$

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial\theta^2}\right)_{\theta_2}=2r(kr-mg)(\sigma^2-1)$$

可得下列结论:

$\sigma>1$ 或 $k<k_{cr}$:θ_1 稳定,θ_2 不存在;

$\sigma<1$ 或 $k>k_{cr}$:θ_1 不稳定,θ_2 稳定。

以上结果可用图 5.17 表示。可以看出,当 σ 由大于 1 变化到小于 1 时,平衡位置由 1 个变为 3 个,力函数曲线也发生突变。这种当参数等于某个值时,动力学性态发生突变的现象称为分岔现象。图 5.18 用实线和虚线分别表示稳定和不稳定平衡状态,可直观地说明运动性态随参数变化的**分岔**现象。

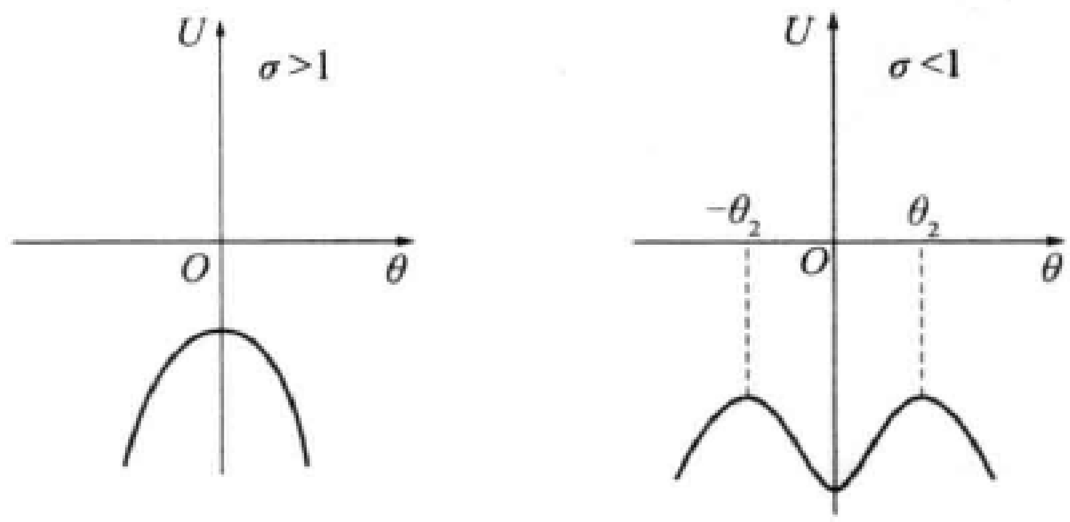


图 5.17

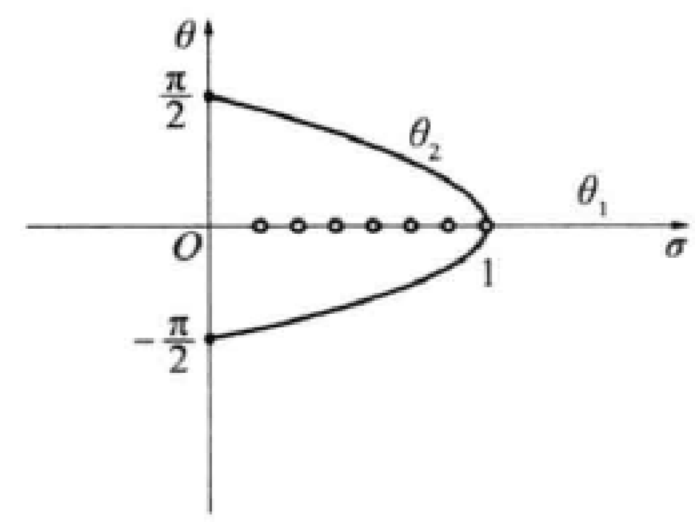


图 5.18

本章讨论的虚位移原理具有公理性质，因此不需要证明。虚位移原理是分析力学的一个基本原理，这个原理将整个静力学概括为一个原理，是静力学的普遍方程。虚位移原理与 d'Alembert 原理结合为动力学普遍方程，而动力学普遍方程是整个分析动力学的基础。

思考题

5.1 下述关于虚位移原理的各种表述是否准确？

1)具有完整、定常、理想约束的质点系，……

2)受有定常理想约束的质点系，……

3)对于具有理想约束的质点系，……

4)质系的约束都是理想约束，……

5.2 关于平衡稳定性的下述表达是否准确？

1)只有势能取极小值时平衡是稳定的。

2)在稳定的平衡位置处，系统势能具有极小值。

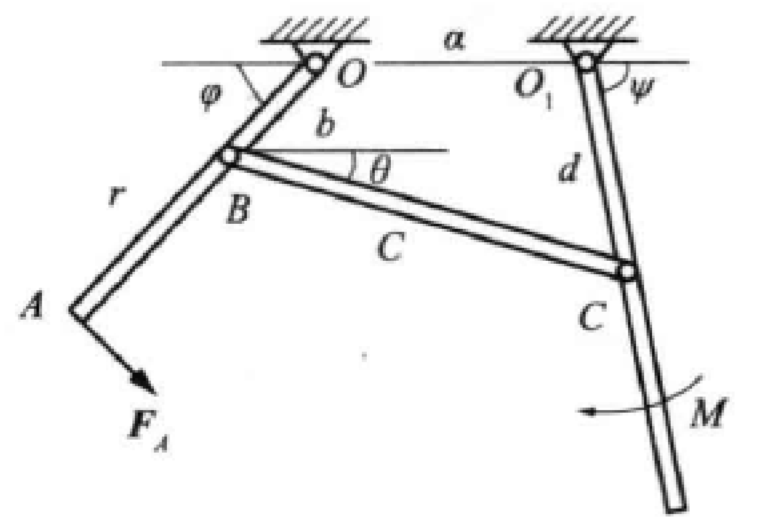
3)若势能为非极小值，则其平衡是不稳定的。

4)对单自由度系统，平衡位置稳定的充分必要条件是系统的势能在平衡位置取极小值。

习题

5.1 公共汽车上用来开启车门的机构，如图所示。求垂直于手柄 OA 的力 $\boldsymbol{F}_A$ 和门的阻力矩 M 之间的关系，假设系统处于平衡。

答：$M=\dfrac{F_A r d\sin(\psi-\theta)}{b\sin(\varphi+\theta)}$



题 5.1 图

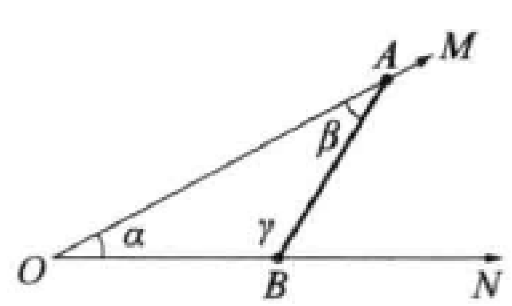
5.2 A,B 两点用一不可伸长的线联结，它们分别沿固定直线 OM 和 ON 无摩擦地滑动，OM 和 ON 夹角为 α，如图所示。这两点均受点 O 排斥，排斥力与距离成正比，比例系数分别为 k_1 和 k_2。求平衡时的角 β 和 γ。

答：$\tan 2\beta=\dfrac{k_1\sin 2\alpha}{k_2+k_1\cos 2\alpha}$，$\tan 2\gamma=\dfrac{k_2\sin 2\alpha}{k_2+k_1\cos 2\alpha}$

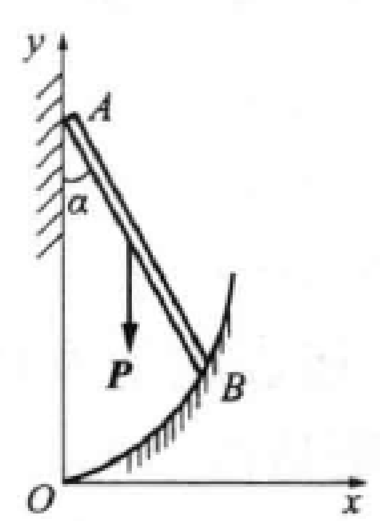
5.3 均质杆 AB 长 a 重 $\boldsymbol{P}$，一端 A 靠在光滑墙上，另一端 B 放在固定光滑曲面上，如图所示。欲使杆子在铅垂面内任意位置都能平衡，试求曲面的形状。

答：$x_B^2+(a-2y_B)^2=a^2$

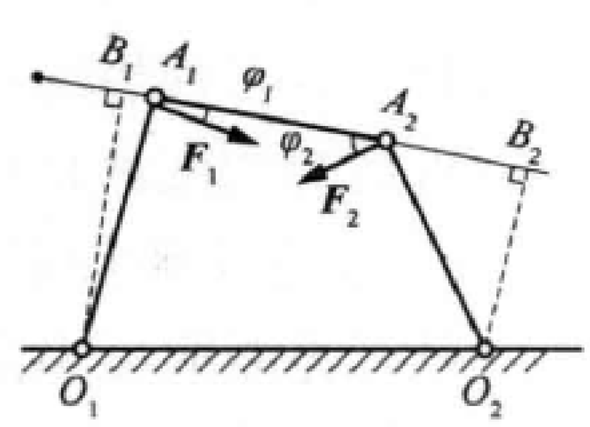
5.4 在铰接四连杆机构 $O_1A_1A_2O_2$ 的铰链 A_1 和 A_2 处作用有力 $\boldsymbol{F}_1$ 和 $\boldsymbol{F}_2$，此二力分别垂直于杆 O_1A_1 和 O_2A_2，如图所示，四连杆处于平衡状态。求力 $\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2$ 之比与转轴 O_1，O_2 到杆 A_1A_2 的最短距离的关系。



题 5.2 图



题 5.3 图



题 5.4 图

答：$\dfrac{F_1}{F_2}=\dfrac{O_1B_1}{O_1A_1}\,\dfrac{O_2A_2}{O_2B_2}$

5.5 如图所示，在滑道连杆机构中，当曲柄 OC 绕水平轴 O 摆动时，滑块 A 沿曲柄 OC 滑动，并带动一沿铅垂导板 K 运动的杆 AB。已知 $OC=R$，$OK=l$。问点 C 垂直力 Q 多大才能平衡 $\boldsymbol{P}$。

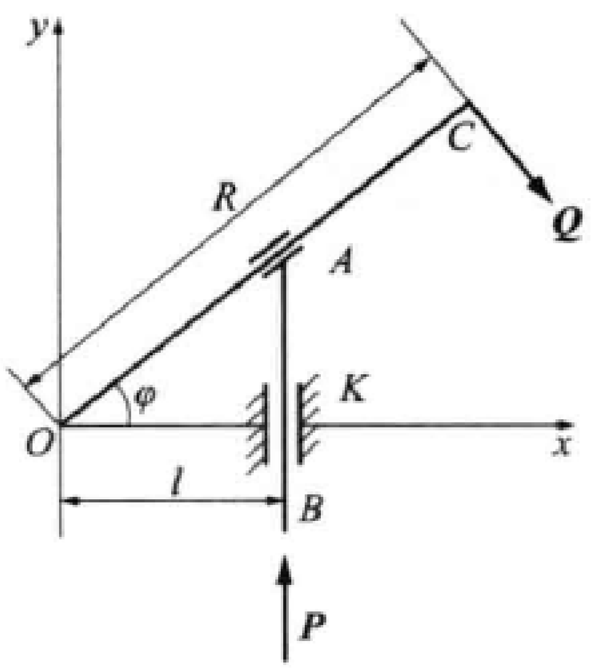
答：$Q=\dfrac{Pl}{R\cos^2\varphi}$

5.6 如图所示，一小球 M 在一光滑管内，此管呈一长轴 $2a$ 的椭圆形状并位于水平面内。此球受椭圆两焦点 C_1 和 C_2 的吸引，引力与距离平方成反比，比例系数分别为 k_1^2 和 k_2^2。试求小球在平衡位置时的矢径 $\boldsymbol{r}_1$ 和 $\boldsymbol{r}_2$ 的大小。

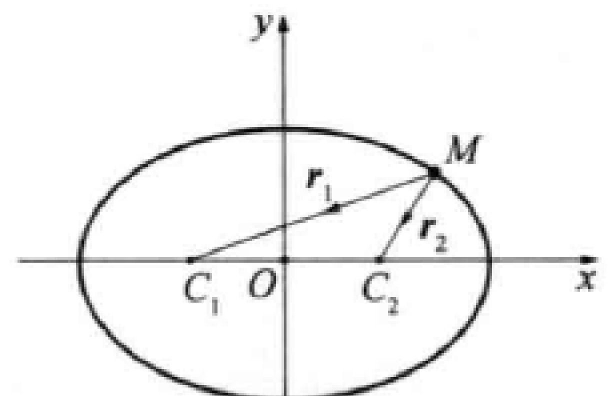
答：$r_1=\dfrac{2ak_1}{k_1+k_2}$，$r_2=\dfrac{2ak_2}{k_1+k_2}$

5.7 如图所示，已知 $AC=2a$，$OA=OB=a$，杆 OA 重 P，杆 AC 重 $2P$。试求平衡时的角 φ。

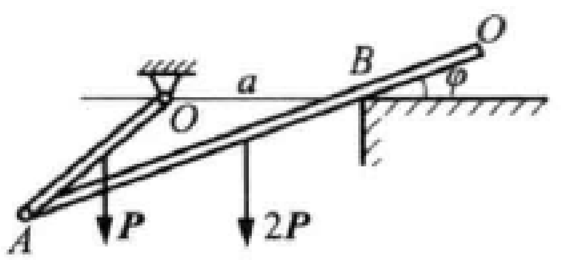
答：$\cos\varphi=0.1+\sqrt{0.51}$



题 5.5 图



题 5.6 图



题 5.7 图

5.8 如图所示，一均质杆长 l 重 P，其两端可沿曲线 $f(x,y)=0$ 无摩擦地滑动。求杆的平衡位置。

答：$f(x_1,y_1)=0$，$f(x_2,y_2)=0$

$(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2=l^2$

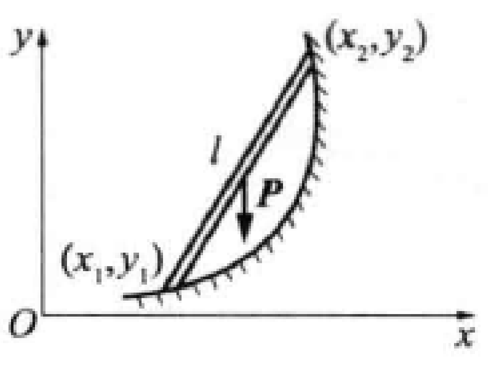
$(x_2-x_1)\left(\dfrac{\partial f}{\partial y_1}\dfrac{\partial f}{\partial x_2}+\dfrac{\partial f}{\partial y_2}\dfrac{\partial f}{\partial x_1}\right)-2(y_2-y_1)\dfrac{\partial f}{\partial x_1}\dfrac{\partial f}{\partial x_2}=0$

5.9 如图所示，铰接平行四边形 $ABCD$，其对角线用绳 AC 和 BD 联结，绳中张力为 $\boldsymbol{T}_1$ 和 $\boldsymbol{T}_2$，试证平衡时满足

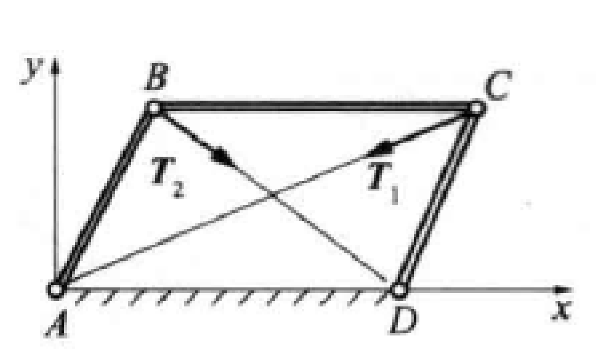
$$\frac{T_1}{T_2}=\frac{AC}{BD}$$

5.10 求如图所示桁架中杆 3 的内力，已知 $AD=DB=8$ m，$DC=4$ m，$P=30$ kN。

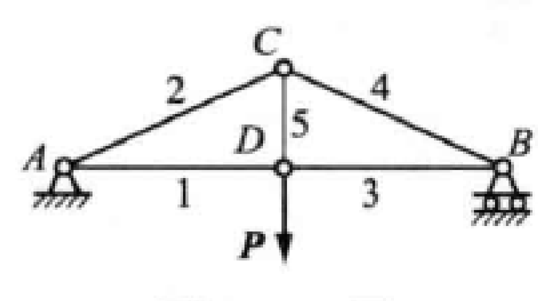
答：$S_3=P$



题 5.8 图



题 5.9 图



题 5.10 图

5.11 如图所示，梁 AB 和 BD 用圆柱铰链 B 相连。水平梁 AB 在断面 A 处插在铅直墙内。梁 BD 搁在光滑的凸角 E 上面与铅垂线成夹角 α。沿梁 BD 方向作用力 $\boldsymbol{F}$。求插入端断面 A 处反力的水平分量。两梁的重量不计。

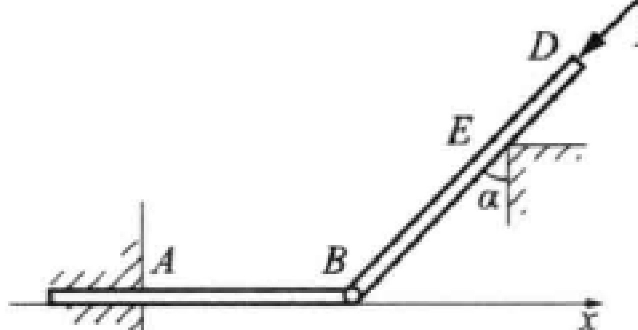
答:$F_{Ax}=F\sin\alpha$

5.12 如图所示,钢架由直杆 AC 和直角弯杆 BC 组成,并用中间铰链连接。钢架上端刚性地插在混凝土墙内,下端搁在滚动支座上。求当 $\boldsymbol{P}_1$ 和 $\boldsymbol{P}_2$ 两力作用时,插入端 A 处的铅垂反力。

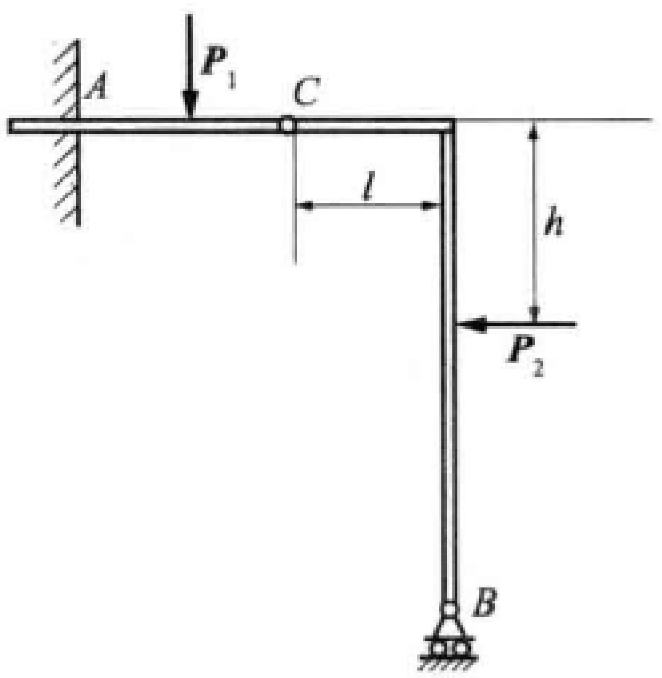
答:$F_{Ay}=P_1-P_2\dfrac{h}{l}$

5.13 两根梁 BC 和 CD 在 C 处铰接,再用圆柱铰链 B 和立柱 AB 相连。立柱在断面 A 处固支。梁 CD 又用圆柱铰链 D 连于地板,地板是光滑的。梁上有水平力 $\boldsymbol{P}_1$ 和 $\boldsymbol{P}_2$ 作用。求立柱断面 A 处的反力水平分量,尺寸如图所示。

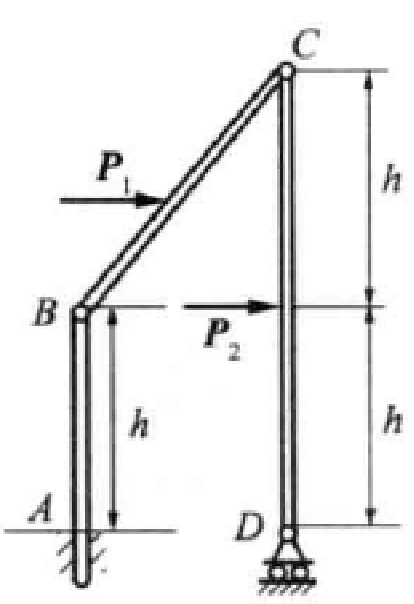
答:$F_{Ax}=P_1+\dfrac{1}{2}P_2$



题 5.11 图



题 5.12 图



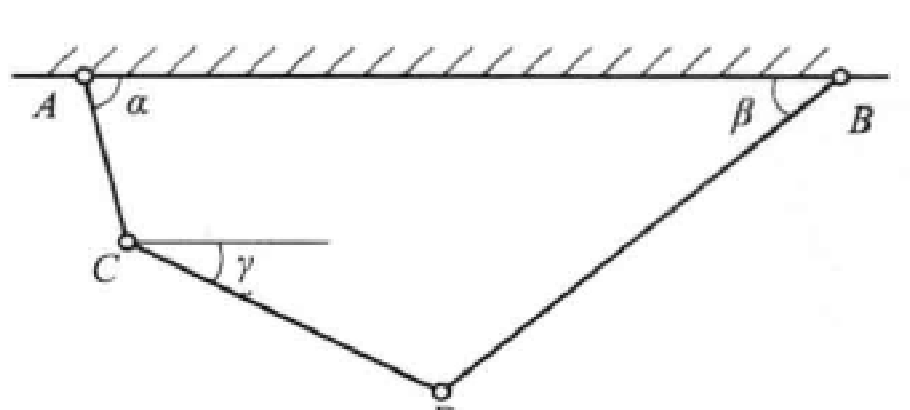
题 5.13 图

5.14 三均质细杆以铰链相连,其 A 端和 B 端另以铰链连接在固定水平线 AB 上,如图所示。已知各杆质量与其长度成正比,$AC=a$,$CD=2a$,$BD=3a$,设铰链为光滑铰链。试求平衡时角 α,β,γ 之间的关系。

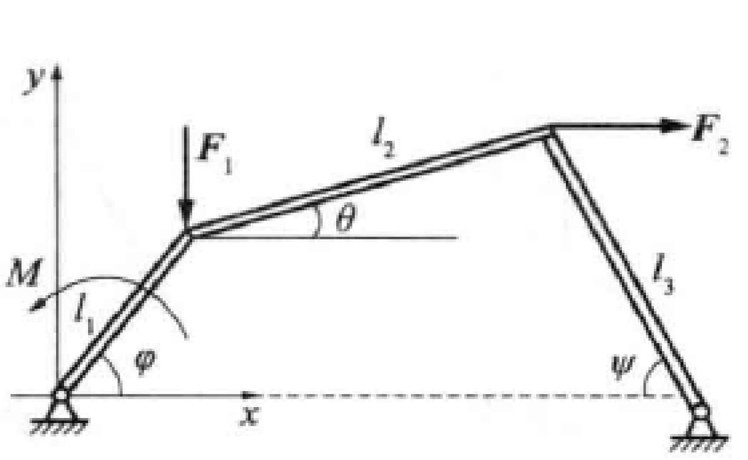
答:$5\cos\alpha\sin(\beta+\gamma)=3\cos\beta\sin(\gamma-\alpha)+2\cos\alpha\sin(\alpha+\beta)$

5.15 平面四连杆机构如图所示,受到力 $\boldsymbol{F}_1$,$\boldsymbol{F}_2$ 和力矩 M 的作用,其中 $\boldsymbol{F}_1$ 铅垂向下,$\boldsymbol{F}_2$ 水平向右,M 为逆时针,不计杆重。试求平衡时 $\boldsymbol{F}_1$,$\boldsymbol{F}_2$ 和 M 的关系。

答:$M-F_1l_1\cos\varphi+F_2\dfrac{l_1\sin(\varphi-\theta)\sin\psi}{\sin(\psi+\theta)}=0$



题 5.14 图



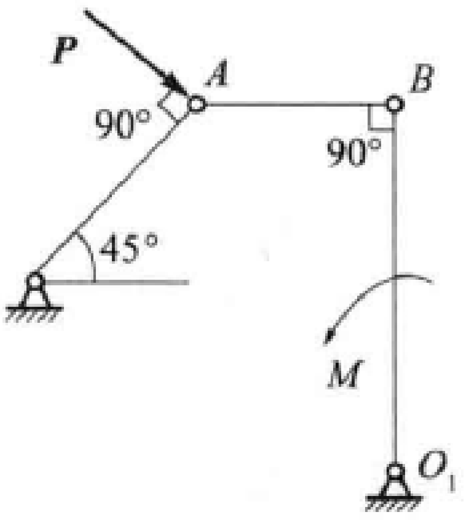
题 5.15 图

5.16 如图所示,在铰接四连杆机构的连杆 OA 上作用一力 $\boldsymbol{P}$。为使机构在给定位置上平衡,求作用于长度为 r 的连杆 O_1B 上的力偶矩 M。

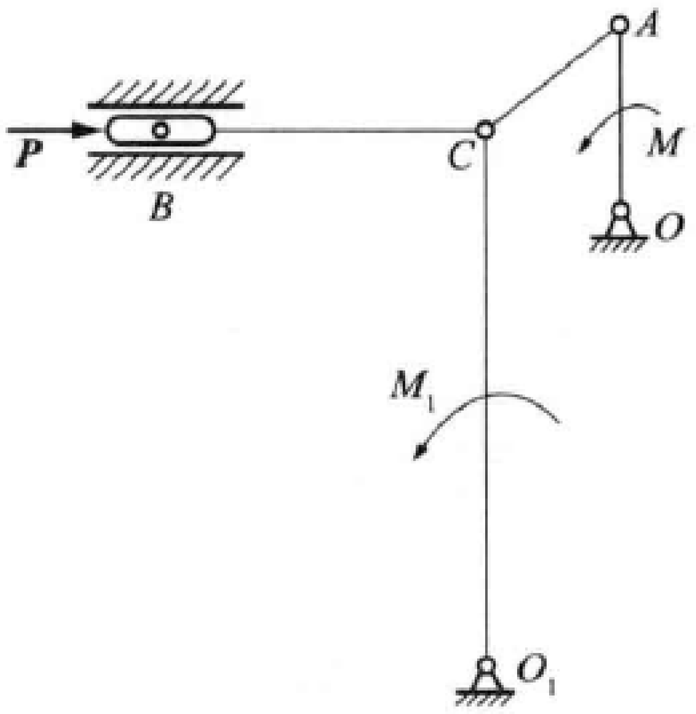
答：$M=\sqrt{2}Pr$

5.17 如图所示，在机构的活塞 B 上施加一力 $\boldsymbol{P}$。在曲柄 O_1C 上施加力矩 $M_1=\dfrac{3}{2}Pr$。不计摩擦，曲柄长 $OA=r$，$O_1C=3r$，且都处于铅垂位置。试求机构平衡而作用于曲柄 OA 上的力矩 M。

答：$M=\dfrac{1}{2}Pr$



题 5.16 图



题 5.17 图

5.18 如图所示，长 l 的均质杆 AB，放在半径为 r 的光滑圆柱上，其 A 端抵在光滑墙上。试证，平衡时的角 θ 满足

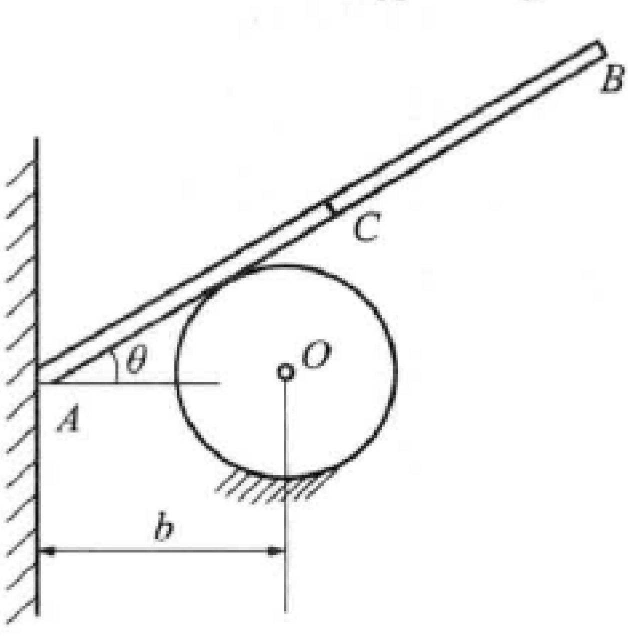
$$l\cos^3\theta+r\sin\theta-b=0$$

其中 b 为圆柱中心到墙的距离。

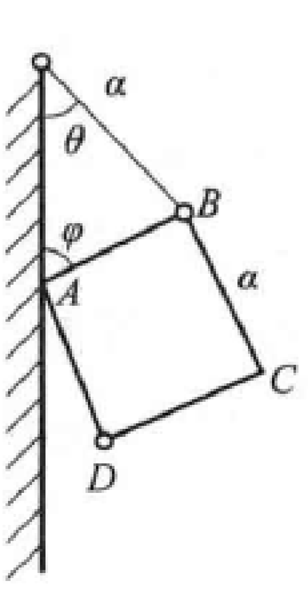
5.19 边长为 a 的正方形均质薄板 $ABCD$ 的顶点 A 靠在光滑墙上，并在顶点 B 用一长 l 的软绳拉住，如图所示。试证明，平衡位置是稳定的。

5.20 大小忽略不计的小球 A 和 B 用长 l 不计重量的直杆相连，放在一半径为 r 的光滑半圆槽内，如图所示。设 $m_A>m_B$。求平衡时的位置，并证明此位置是稳定的。

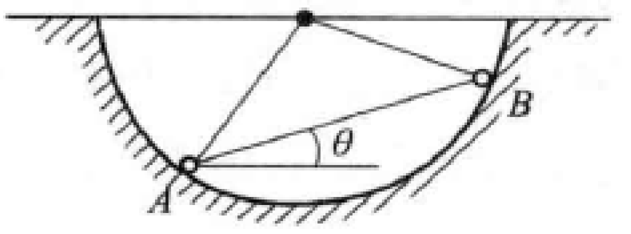
答：$\tan\theta=\dfrac{(m_A-m_B)\cot\alpha}{m_A+m_B}\quad \alpha=\arccos\dfrac{l}{2r}$



题 5.18 图



题 5.19 图



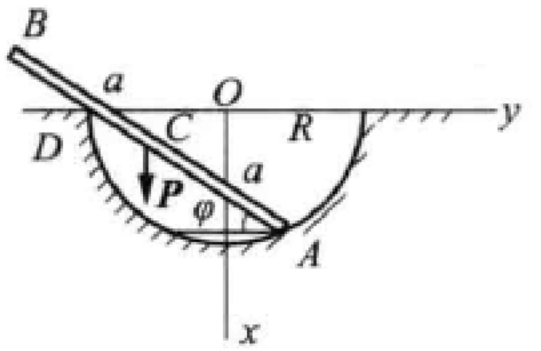
题 5.20 图

5.21 如图所示,一均质杆 AB,长 $2a$,靠在半径为 R 的光滑半圆导板上。试求平衡位置,并讨论其稳定性。

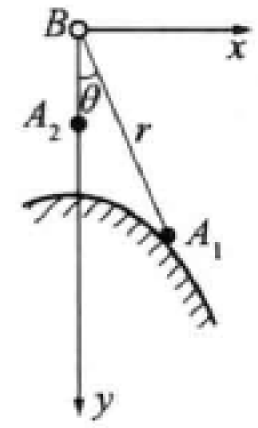
答:$\cos\varphi=\frac{1}{8R}[a+\sqrt{a^2+32R^2}]$,稳定

5.22 如图所示,质量为 m_1,m_2 的两质点 A_1,A_2,用长 l 的细线相连,挂在光滑的固定销钉 B 上,A_2 铅垂向下,A_1 放在与线在同一铅垂面内的光滑曲线上。不论 A_1 在曲线什么位置,都处于平衡。试问曲线是何形状?

答:圆锥曲线 $r=\frac{l}{1-\varepsilon\cos\theta}$,离心率 $\varepsilon=\frac{m_1}{m_2}$



题 5.21 图



题 5.22 图

5.23 试研究§5.7的例2在 $r=h$ 时的平衡稳定性。

参考文献

[1] Lagrange J L. Mécanique Analytique [M]. T1, Quatrième Éd. Paris: Jacques Gabay, 2006.

[2] Appell P. Traité de Mécanique Rationnelle [M]. T1, TⅡ, 5 ième Éd. Paris: Gauthier-Villars, 1953.

[3] H. H. 蒲赫哥尔茨. 理论力学基本教程[M]. 下册. 钱尚武,钱敏,译. 北京:高等教育出版社,1957.

[4] Воронков ИМ. Курс Теоретической Механики[M]. Изд Восьмое, Москва: ГИФМЛ, 1959.

[5] Суслов ГК. Теоретическая Механика[M]. Москва: ГИФМЛ, 1946.

[6] Гантмахер ФР. Лекции по Аналитической Механике[M]. Москва: ГИФМЛ, 1960.

[7] Лурье АИ. Аналитическая Механика[M]. Москва: ГИФМЛ, 1961.

[8] 周培源. 理论力学[M]. 北京:人民教育出版社,1952.

[9] 汪家诛. 分析动力学[M]. 北京:高等教育出版社,1958.

[10] Marcolongo R. Theoretische Mechanik [M]. Leipzig und Berlin: Druck und Verlag von B G Teubner, 1911.

[11] Карапетян АВ. Об устойчивости равновесия неголономных систем [J]. ПММ, 1975, 39(6): 1135-1140.

[12] 梅凤翔,刘桂林. 分析力学基础[M]. 西安:西安交通大学出版社,1987.

[13]朱照宣,周起钊,殷金生．理论力学[M]．下册．北京:北京大学出版社,1982.

[14]高为炳．运动稳定性基础[M]．北京:高等教育出版社,1987.

[15]王照林．运动稳定性及其应用[M]．北京:高等教育出版社,1992.

[16] Wintner A. The Analytical Foundations of Celestial Mechanics[M]. Princeton Univ. Press,1941.

[17]Поляхов НН, Зегжда СА, Юшков МП. Теоретическая Механика[M]. Москва: Высшая Школа, 2000.

[18]吴永祯,张本悟,陈定圻．理论力学[M]．下册．南京:河海大学出版社,1990.

[19]刘延柱,杨海兴,朱本华．理论力学[M]．第二版．北京:高等教育出版社,2001.

6 运动学基础

运动学本身有极其丰富的内容。本章作为分析动力学的基础，简述有关点的运动学和刚体运动学的知识。

§6.1　点的运动学

本节讨论点的运动学，包括点的运动的矢量描述、点的运动的坐标描述等。

6.1.1　点的运动的矢量描述

1. 点的运动方程

在选定的参考空间中，任选一个固定点 O，称为参考点。点 M 在该参考空间中的位置可由点 M 相对于点 O 的矢量 $\overrightarrow{OM}$ 唯一确定，记作 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}$，称为点 M 的矢径。当 M 运动时，相应的矢径 $\boldsymbol{r}$ 的大小和方向随时间 t 连续改变，是 t 的单值连续矢量函数

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t) \tag{6.1.1}$$

式(6.1.1)称为点的矢量形式的运动方程。随着点 M 的运动，矢径 $\boldsymbol{r}$ 的矢端在参考空间中划出的曲线就是点 M 的轨迹，也称为**矢径端图**。

2. 点的速度和加速度

点 M 的速度 $\boldsymbol{v}$ 是矢径 $\boldsymbol{r}$ 对时间 t 的导数

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \tag{6.1.2}$$

加速度 $\boldsymbol{a}$ 是**速度端图**的速度，是速度 $\boldsymbol{v}$ 对时间 t 的导数

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} \tag{6.1.3}$$

6.1.2 点的运动的坐标描述

1)直角坐标系

在与参考空间固连的直角坐标系 $Oxyz$ 中,点 M 的位置可由它的 3 个坐标 (x,y,z) 唯一确定。点 M 的运动方程为

$$x=x(t),y=y(t),z=z(t) \tag{6.1.4}$$

点 M 的速度在直角坐标轴上的投影为

$$v_x=\dot{x},v_y=\dot{y},v_z=\dot{z} \tag{6.1.5}$$

加速度在直角坐标轴上的投影为

$$a_x=\dot{v}_x=\ddot{x},a_y=\dot{v}_y=\ddot{y},a_z=\dot{v}_z=\ddot{z} \tag{6.1.6}$$

例 1 半径为 R 的轮子沿直线轨道做无滑动地滚动,如图 6.1 所示。设轮子保持在同一铅直平面内,且轮心速度大小为 u,加速度大小为 a。试分析轮子边缘点 M 的运动[1]。

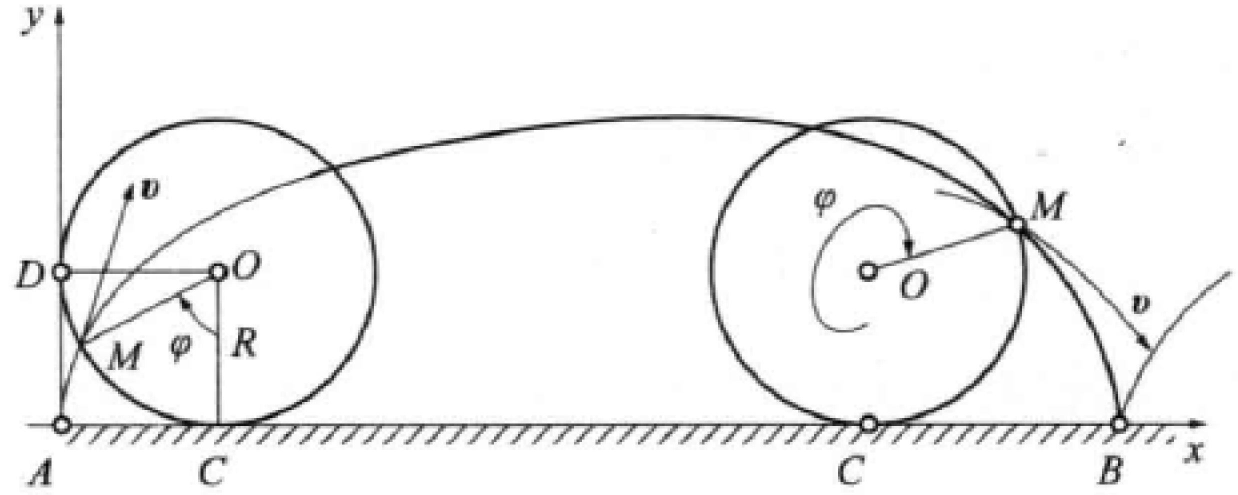


图 6.1

解:取轮子所在平面为平面 Axy,直线轨道为轴 Ax。设点 M 为轮子边缘上的任意一点,在初始时刻点 M 与坐标原点 A 重合。设任意时刻轮子边缘与地面接触点为 C,则当轮子转过一角度 φ 后,轮心的坐标为

$$x_0=R\varphi,y_0=R$$

轮心的轨迹是一直线,因此,轮心的速度和加速度方向都沿轴 Ax,分别为

$$\boldsymbol{v}_0=u\boldsymbol{i}=\dot{x}_0\boldsymbol{i}=R\dot{\varphi}\boldsymbol{i}$$

$$\boldsymbol{a}_0=a\boldsymbol{i}=\ddot{x}_0\boldsymbol{i}=R\ddot{\varphi}\boldsymbol{i}$$

由此求得

$$\dot{\varphi}=\frac{u}{R},\ddot{\varphi}=\frac{a}{R}$$

点 M 的坐标为

$$x=AC-OM\sin\varphi=R(\varphi-\sin\varphi)$$

$$y=OC-OM\cos\varphi=R(1-\cos\varphi)$$

这是旋轮线的参数方程,因此,点 M 的轨迹为旋转线。点 M 的矢径为

$$\boldsymbol{r}_{AM}=x\boldsymbol{i}+y\,\boldsymbol{j}=R(\varphi-\sin\varphi)\boldsymbol{i}+R(1-\cos\varphi)\boldsymbol{j}$$

点 M 的速度为

$$\boldsymbol{v}=\dot{x}\boldsymbol{i}+\dot{y}\,\boldsymbol{j}=u(1-\cos\varphi)\boldsymbol{i}+(u\sin\varphi)\boldsymbol{j}$$

可见,当点 M 与地面接触时,即 $\varphi=2k\pi(k=0,1,2,\cdots)$时,点 M 的速度为零。这是纯滚动的一个重要性质。当点 M 位于轮子最高点时,即 $\varphi=(2k+1)\pi,(k=0,1,2,\cdots)$时,点 M 的速度大小为 $2u$,方向与轮心速度方向一致。

因

$$\boldsymbol{r}_{CM}=\boldsymbol{r}_{AM}-\boldsymbol{r}_{AC}=(-R\sin\varphi)\boldsymbol{i}+R(1-\cos\varphi)\boldsymbol{j}$$

故有 $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{r}_{CM}=0$,即点 M 的速度始终垂直于 CM。点 M 在任意时刻的速度大小为

$$v=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}=\left|2R\dot{\varphi}\sin\frac{\varphi}{2}\right|=|r_{CM}\dot{\varphi}|$$

点 M 的加速度为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}&=\ddot{x}\,\boldsymbol{i}+\ddot{y}\,\boldsymbol{j}=R[\ddot{\varphi}(1-\cos\varphi)+\varphi^2\sin\varphi]\boldsymbol{i}+R(\ddot{\varphi}\sin\varphi+\dot{\varphi}^2\cos\varphi)\boldsymbol{j}\\&=\left[a(1-\cos\varphi)+\frac{u^2}{R}\sin\varphi\right]\boldsymbol{i}+\left(a\sin\varphi+\frac{u^2}{R}\cos\varphi\right)\boldsymbol{j}\end{aligned}$$

当点 M 与地面接触时,即 $\varphi=2k\pi,(k=0,1,2,\cdots)$时,点 M 的加速度不等于零,其大小为$\dfrac{u^2}{R}$,方向指向轮心。如果轮心的速度为常数,即 $a=0$,则当点 M 位于轮子最高点时,即 $\varphi=(2k+1)\pi,(k=0,1,2,\cdots)$时,点 M 的加速度大小也为$\dfrac{u^2}{R}$,方向指向轮心。

例 2 绳子一端连在小车的点 A 上,另一端跨过点 B 的小滑轮绕在鼓轮 C 上。滑轮 B 离地面的高度为 h,如图 6.2 所示。如果小车以匀速度 v 沿水平方向向右运动,试求当 $\theta=45°$时,B,C 之间绳上一点 P 的速度和加速度。

解:因点 P 的速度大小就是 A,B 间绳长 l 随时间的变化率,故 $v_P=\dot{l}$,$a_P=\ddot{l}$。由几何关系,有

$$x^2=l^2-h^2$$

将其两端对时间 t 求导数,得

$$x\dot{x}=l\dot{l}\tag{a}$$

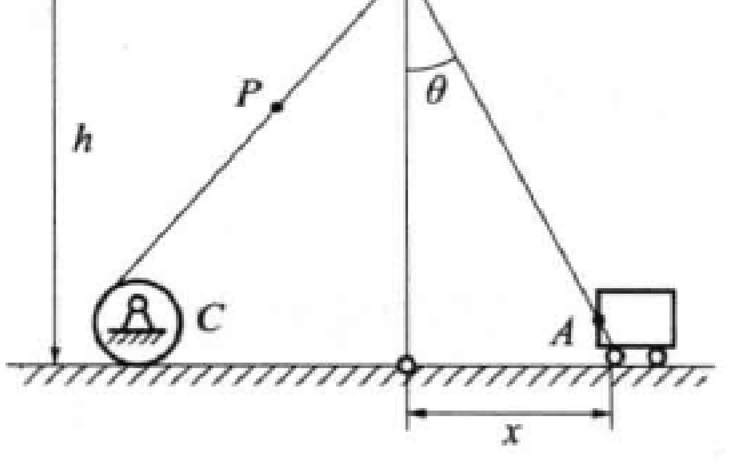


图 6.2

由此得

$$v_P=\dot{l}=\frac{x\dot{x}}{l}=\dot{x}\sin\theta=v\sin\theta \tag{b}$$

当 $\theta=45°$ 时，有

$$v_P=\frac{\sqrt{2}}{2}v \tag{c}$$

将式(a)两端对 t 求导数，得

$$\dot{x}^2+x\ddot{x}=\dot{l}^2+l\ddot{l}$$

由 $\ddot{x}=0$，得

$$a_P=\ddot{l}=\frac{\dot{x}^2-\dot{l}^2}{l}=\frac{v^2}{h}\cos^3\theta \tag{d}$$

当 $\theta=45°$ 时，有

$$a_P=\frac{\sqrt{2}}{4}\frac{v^2}{h} \tag{e}$$

例 3 如图 6.3 所示，点 B 以匀速 $\boldsymbol{u}$ 在高为 b 处做水平飞行。点 A 的速度 $\boldsymbol{v}$ 始终指向点 B，大小为常量。开始时，点 A 在地面 O 处，点 B 在其正上方。试讨论点 A 能否追上点 B[2]。

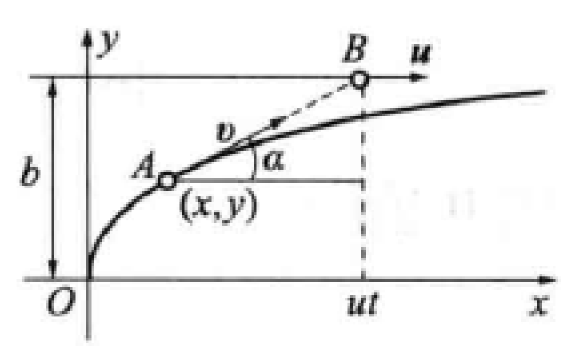


图 6.3

解：建立直角坐标系 Oxy，如图 6.3 所示。令 $AB=c$，点 A 的坐标为 (x,y)，则有

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}&=v\cos\alpha=\frac{v}{c}(ut-x)\\ \dot{y}&=v\sin\alpha=\frac{v}{c}(b-y)\end{aligned}\right\} \tag{a}$$

其中

$$c^2=(ut-x)^2+(b-y)^2$$

将式(a)两式相除，得

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{ut-x}{b-y} \tag{b}$$

令 $s=\overset{\frown}{OA}$，则 $s=vt$，式(b)成为

$$(b-y)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}+x=ks \tag{c}$$

$$k=\frac{u}{v}$$

将式(c)对 y 求导数，得

$$(b-y)\frac{d^2x}{dy^2}=k\frac{ds}{dy} \tag{d}$$

由 $ds^2=dx^2+dy^2$，得

$$\frac{ds}{dy}=\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}$$

引进记号

$$g=\frac{dx}{dy}$$

则式(d)成为

$$(b-y)\frac{dg}{dy}=k\sqrt{1+g^2} \tag{e}$$

即

$$\frac{dg}{\sqrt{1+g^2}}=\frac{k dy}{b-y}$$

积分得

$$\ln(g+\sqrt{1+g^2})=-k\ln\left(1-\frac{y}{b}\right)+\ln c$$

因开始时

$$g=\frac{dx}{dy}=0$$

故 $c=1$。进而有

$$2\frac{dx}{dy}=\left(1-\frac{y}{b}\right)^{-k}-\left(1-\frac{y}{b}\right)^{k} \tag{f}$$

当 $k\neq1$，积分得点 A 的轨道方程为

$$2x=\frac{2kb}{1-k^2}+\frac{b}{1+k}\left(1-\frac{y}{b}\right)^{k+1}-\frac{b}{1-k}\left(1-\frac{y}{b}\right)^{1-k} \tag{g}$$

两点 A,B 间距为

$$c=(b-y)\sqrt{1+g^2}=\frac{b}{2}\left[\left(1-\frac{y}{b}\right)^{1-k}+\left(1-\frac{y}{b}\right)^{1+k}\right] \tag{h}$$

当 $k=1$ 时，轨道方程为

$$2x=-\ln\left(1-\frac{y}{b}\right)-y+\frac{y^2}{2b} \tag{i}$$

当 $k>1$ 时，即点 B 的速度大于点 A 的速度，则距离 c 增大，而当 $y\to b$ 时，$x\to\infty$，即 A 追不上 B；当 $k=1$ 时，有 $c\to\frac{b}{2}$，此时 A 追不上 B；当 $k<1$ 时，待求曲线与直线 $y=b$ 相交，即 A 可追上 B。此时，

可求得经过多长时间，A 追上了 B。令 $t=T$ 时，A 追上了 B。将 $x=uT$，$y=b$ 代入轨道方程(g)，得

$$2uT=\frac{2kb}{1-k^2}$$

由此解得

$$T=\frac{kb}{u(1-k^2)}=\frac{bv}{v^2-u^2}$$

特别地，当 $v=2u$ 时，有

$$T=\frac{2b}{3u}$$

2）自然轴系

曲线在任一点处的切线、主法线和副法线组成正交系，称为曲线在该点的**自然轴系**。

如果已知点的轨迹，可在其上取一点作为弧长 s 的起点，当点运动时，弧长随时间连续变化

$$s=s(t) \tag{6.1.7}$$

点的速度在切线、主法线和副法线上的投影分别为

$$v_t=\dot{s},v_n=0,v_b=0 \tag{6.1.8}$$

而加速度的投影为

$$a_t=\ddot{s},a_n=\frac{\dot{s}^2}{\rho},a_b=0 \tag{6.1.9}$$

其中 ρ 为曲率半径；a_t 和 a_n 分别称为切向加速度和法向加速度。

例 4 如果点的加速度的切向和法向分量在运动中是常数，试证：运动的方向在时间 t 转过的角度 θ 由下式确定

$$\theta=A\ln(1+Bt)$$

其中 A，B 为常数。

证明：令切向加速度常数为 c_1，法向加速度常数为 c_2，有

$$a_t=\frac{dv}{dt}=c_1 \tag{a}$$

$$a_n=\frac{v^2}{\rho}=c_2 \tag{b}$$

积分式(a)，得

$$v=c_1t+c_3 \tag{c}$$

因

$$\rho=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta}=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\theta}=\frac{v}{\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}}$$

故式(b)可表示为

$$v\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=c_2$$

代入式(c),得

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\frac{c_2}{c_1t+c_3}$$

积分得

$$\theta=\frac{c_2}{c_1}\ln(c_1t+c_3)+c_4=\frac{c_2}{c_1}\ln\left(1+\frac{c_1}{c_3}t\right)+\frac{c_2}{c_1}\ln c_3+c_4$$

取初值 $t=0,\theta=0$,则有

$$\theta=A\ln(1+Bt)$$

其中

$$A=\frac{c_2}{c_1},B=\frac{c_1}{c_3}$$

3)柱坐标系

点在柱坐标(ρ,φ,z)中的运动方程为

$$\rho=\rho(t),\varphi=\varphi(t),z=z(t) \tag{6.1.10}$$

点的速度在柱坐标中的投影为

$$v_\rho=\dot{\rho},v_\varphi=\rho\dot{\varphi},v_z=\dot{z} \tag{6.1.11}$$

其中 v_ρ 和 v_φ 分别称为径向速度和横向速度。加速度的投影为

$$a_\rho=\ddot{\rho}-\rho\dot{\varphi}^2,a_\varphi=\rho\ddot{\varphi}+2\dot{\rho}\dot{\varphi},a_z=\ddot{z} \tag{6.1.12}$$

其中 a_ρ 和 α_φ 分别称为径向加速度和横向加速度。

当点在 $z=0$ 平面上运动时,其运动方程在极坐标中为

$$\rho=\rho(t),\varphi=\varphi(t) \tag{6.1.13}$$

其中 ρ 称为极半径;φ 称为极角。

4)球坐标系

在球坐标(r,θ,φ)中点的运动方程为

$$r=r(t),\theta=\theta(t),\varphi=\varphi(t) \tag{6.1.14}$$

其中 r 为点 M 到坐标原点的距离;φ 为经度;θ 为纬度的余角。点的速度在球坐标中的投影为

$$v_r=\dot{r},v_\theta=r\dot{\theta},v_\varphi=r\dot{\varphi}\sin\theta \tag{6.1.15}$$

而加速度的投影为

$$
\begin{aligned}
a_r &= \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2\sin^2\theta \\
a_\theta &= r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta \\
a_\varphi &= r\ddot{\varphi}\sin\theta + 2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta
\end{aligned}
\tag{6.1.16}
$$

例 5 一点 M 在平面上运动，如图 6.4 所示。θ 是它距两固定点 C_1 和 C_2 的距离之比的对数，ψ 是它们之间的夹角，$2k$ 是两固定点间距离。试证：点 M 速度大小为[3]

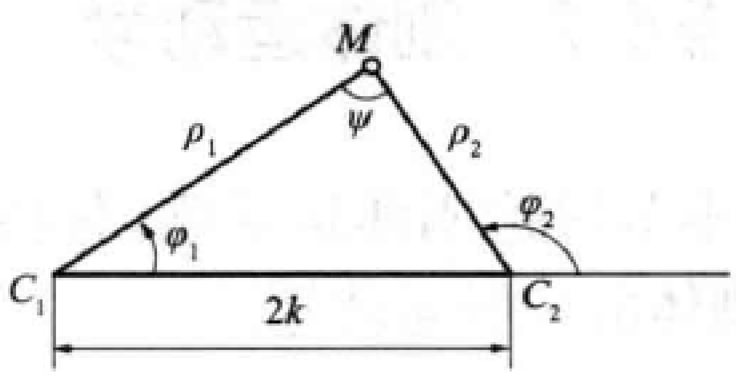


图 6.4

$$v_M = \frac{k\sqrt{\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2}}{\cosh\theta - \cos\psi}$$

证明：用极坐标 ρ_1,φ_1 表示点 M 的速度，有

$$v_M = \sqrt{\dot{\rho}_1^2 + \rho_1^2\dot{\varphi}_1^2} \tag{a}$$

现将 ρ_1,φ_1 用 ψ,θ 表示。解三角形 MC_1C_2，得

$$\rho_1 = \frac{2k\sin(\psi+\varphi_1)}{\sin\psi}, \rho_2 = \frac{2k\sin\varphi_1}{\sin\psi} \tag{b}$$

又知

$$\ln\frac{\rho_1}{\rho_2} = \theta$$

故有

$$\rho_1 = \rho_2\exp\theta \tag{c}$$

由式(b)，(c)得

$$\frac{\sin(\psi+\varphi_1)}{\sin\varphi_1} = \exp\theta$$

由此解得

$$\varphi_1 = \arctan\left(\frac{\sin\psi}{\exp\theta - \cos\psi}\right) \tag{d}$$

将式(a)代入式(b)，得到

$$\rho_1 = 2k\exp\theta(1+\exp2\theta - 2\exp\theta\cos\psi)^{-\frac{1}{2}} \tag{e}$$

将式(a)，(e)对时间 t 求导数，得

$$\dot{\varphi}_1 = [-\dot{\theta}\exp\theta\sin\psi + \dot{\psi}(-1+\exp\theta\sin\psi)][1+\exp2\theta - 2\exp\theta\cos\psi]^{-1}$$

$$\dot{\rho}_1 = 2k\exp\theta[\dot{\theta}(1-\exp\theta\cos\psi) - \dot{\psi}\exp\theta\sin\psi][1+\exp2\theta - 2\exp\theta\cos\psi]^{-\frac{1}{2}}$$

将其代入式(a),整理得

$$v_M=\frac{k\sqrt{\dot{\theta}^2+\dot{\psi}^2}}{\cosh\theta-\cos\psi}$$

§6.2 刚体运动学

本节讨论刚体运动学,包括刚体的平移、刚体的定轴转动、刚体的平面运动、刚体的一般运动等。

6.2.1 刚体的平移

刚体内任意一条直线在刚体运动过程中始终保持平行,这样的运动称为刚体的平移。平移刚体上各点的轨迹形状完全相同。当刚体做平移时,其上各点有相同的速度和相同的加速度。

6.2.2 刚体的定轴转动

刚体运动时,刚体内(或延拓部分)始终存在一条固定不动的直线,那么整个刚体绕此线转动,这种运动称为刚体的定轴转动,不动直线称为转轴。除转轴外,刚体上各点分别在与转轴垂直的各平面内做圆周运动。

定轴转动刚体上点 M 的速度大小为

$$v_M=R_M\omega \tag{6.2.1}$$

其中 R_M 为点 M 到转轴的距离;ω 为刚体角速度。点 M 的速度方向垂直于 R_M 顺着角速度转向。点 M 的加速度分为切向加速度 a_M^t 和法向加速度 a_M^n,分别为

$$a_M^t=R_M\alpha,\ a_M^n=R_M\omega^2 \tag{6.2.2}$$

切向加速度方向垂直于 R_M 顺着角加速度 a 转向,法向加速度方向指向转轴。

6.2.3 刚体的平面运动

1)平面图形运动的分析方法

刚体运动时,刚体上任一点始终在平行于一固定平面的平面内运动,这种运动称为刚体的平面平行运动,简称为平面运动。刚体的平面运动可简化为对一个平截面图形 S 在其自身平面内的运动。

在平面图形 S 上建立直角坐标系 Oxy,如图 6.5 所示。平面图形的位置由其上任意一有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 确定,而要表示这个有向线段的位置需要 3 个坐标,即点

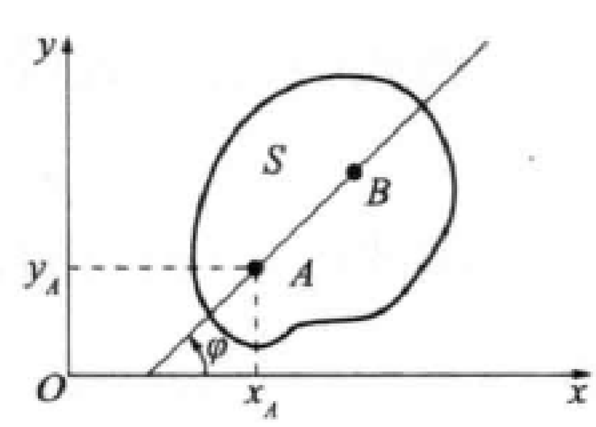


图 6.5

A 的坐标(x_A, y_A)，以及$\overrightarrow{AB}$与轴 Ox 的夹角 φ。点 A 称为基点，角 φ 称为方位角，其正向为从不动边轴 Ox 转向有向线段$\overrightarrow{AB}$。平面运动的运动方程为

$$x_A = x_A(t), y_A = y_A(t), \varphi = \varphi(t) \tag{6.2.3}$$

设点 C 为平面图形上任一点，则其运动方程为

$$x_C = x_A + l\cos\varphi, y_C = y_A + l\sin\varphi$$

其中 l 为 A，C 两点间距离。对上式求对时间 t 的一次导数和二次导数，可求得点 C 的速度和加速度在直角坐标轴上的投影。

点 C 的速度投影为

$$\dot{x}_C = \dot{x}_A - l\dot{\varphi}\sin\varphi, \dot{y}_C = \dot{y}_A + l\dot{\varphi}\cos\varphi$$

表示为矩阵形式，有

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_C \\ \dot{y}_C \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}_A \\ \dot{y}_A \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\dot{\varphi} & 0 \\ \dot{\varphi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l\cos\varphi \\ l\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \tag{6.2.4}$$

点 C 的加速度表示为矩阵形式，有

$$\begin{pmatrix} \ddot{x}_C \\ \ddot{y}_C \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddot{x}_A \\ \ddot{y}_A \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\ddot{\varphi} & 0 \\ \ddot{\varphi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l\cos\varphi \\ l\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\dot{\varphi}^2 & 0 & 0 \\ 0 & -\dot{\varphi}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l\cos\varphi \\ l\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \tag{6.2.5}$$

2)平面图形运动的矢量方法

平面图形上任意两确定点 A，B 的矢径有如下关系

$$\boldsymbol{r}_B = \boldsymbol{r}_A + \boldsymbol{r}_{AB}$$

其中 $\boldsymbol{r}_{AB}$ 为由 A 指向 B 的矢量。将其对时间 t 求导数，得

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_B}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_A}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_{AB}}{\mathrm{d}t}$$

因 $\boldsymbol{r}_{AB}$ 是大小不变，仅方向改变的矢量，故有

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_{AB}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_{AB}$$

于是有

$$\boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_{AB} \tag{6.2.6}$$

这就是平面图形上两点速度的关系。将式(6.2.6)在$\overrightarrow{AB}$方向上投影，得到

$$[\boldsymbol{v}_B]_{AB} = [\boldsymbol{v}_A]_{AB} \tag{6.2.7}$$

这一关系称为速度投影定理，它表明，平面图形上任意两点的速度在其连线上投影相等。

将式(6.2.6)对时间 t 求导数，得

$$\boldsymbol{a}_B = \boldsymbol{a}_A + \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{r}_{AB} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_{AB}) \tag{6.2.8}$$

这就是平面图形上两点的加速度关系，其中右端第二项为图形绕 A 点以角加速度 $\boldsymbol{\alpha}$ 转动时点 B 所具有的切向加速度，第三项为图形绕 A 点以角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 转动时点 B 所具有的法向加速度。

例 1 试求柱形侧面的物体沿平面滚动而不滑动的条件[3]。

解：基线方向认为是已知的，这条曲线在柱体侧面的横截面中得到，用固结于柱体的坐标来表示。为确定柱体截面在其平面上的位置，可选三个参数：基点 A 的坐标 (x,y) 以及固结于柱体的坐标系 $A\xi\eta\zeta$ 的转角 θ，如图 6.6 所示。

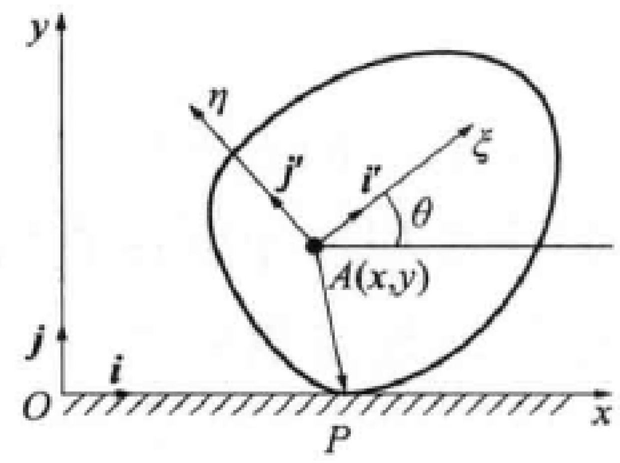


图 6.6

滚动而不滑动的条件表示接触点 P 的速度为零，由式(6.2.6)给出

$$\boldsymbol{v}_P=\boldsymbol{v}_A+\boldsymbol{\omega}\times\overrightarrow{AP}=0 \tag{a}$$

注意到

$$\boldsymbol{\omega}=\dot{\theta}\boldsymbol{k}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AP}&=\xi_P\boldsymbol{i}'+\eta_P\boldsymbol{j}'=\xi_P(\boldsymbol{i}\cos\theta+\boldsymbol{j}\sin\theta)+\eta_P(-\boldsymbol{i}\sin\theta+\boldsymbol{j}\cos\theta)\\&=\boldsymbol{i}(\xi_P\cos\theta-\eta_P\sin\theta)+\boldsymbol{j}(\xi_P\sin\theta+\eta_P\cos\theta)\end{aligned}$$

其中 ξ_P,η_P 为接触点 P 在 $A\xi\eta\zeta$ 中的坐标，对给定的柱面基线，它们是确定的。将 $\boldsymbol{\omega},\overrightarrow{AP}$ 代入式(a)，得

$$\boldsymbol{i}[\dot{x}-\dot{\theta}(\xi_P\sin\theta+\eta_P\cos\theta)]+\boldsymbol{j}[\dot{y}+\dot{\theta}(\xi_P\cos\theta-\eta_P\sin\theta)]=0$$

于是得

$$\begin{aligned}&\dot{x}-\dot{\theta}(\xi_P\sin\theta+\eta_P\cos\theta)=0\\&\dot{y}+\dot{\theta}(\xi_P\cos\theta-\eta_P\sin\theta)=0\end{aligned} \tag{b}$$

6.2.4 刚体的一般运动

1)刚体任意位移的解析表达

刚体的一般运动由沿某轴的平移和绕该轴的转动合成。在与参考空间固连的直角坐标系 $Oxyz$ 中，转轴通过点 $A(a,b,c)$，方向角为(α,β,γ)。沿此轴平移为 d，绕此轴转角为 φ。刚体上原位置上任一点 $P(x,y,z)$ 经平移 d 达到点 $R(\xi,\eta,\zeta)$，有

$$\xi=x+d\cos\alpha,\eta=y+d\cos\beta,\zeta=z+d\cos\gamma$$

再绕轴转过一角 φ 而达到点 $Q(X,Y,Z)$，则有[4]

$$X=x+d\cos\alpha-(1-\cos\varphi)\{(x-a)\sin^2\alpha-(y-b)\cos\alpha\cos\beta-(z-c)\cos\alpha\cos\gamma\}+\sin\varphi\{(z-c)\cos\beta-(y-b)\cos\gamma\}$$
$$Y=y+d\cos\beta-(1-\cos\varphi)\{(y-b)\sin^2\beta-(z-c)\cos\beta\cos\gamma-(x-a)\cos\beta\cos\alpha\}+\sin\varphi\{(x-a)\cos\gamma-(z-c)\cos\alpha\}$$
$$Z=z+d\cos\gamma-(1-\cos\varphi)\{(z-c)\sin^2\gamma-(x-a)\cos\gamma\cos\alpha-(y-b)\cos\gamma\cos\beta\}+\sin\varphi\{(y-b)\cos\alpha-(x-a)\cos\beta\}\tag{6.2.9}$$

2)小转动的合成

将上面的一般公式(6.2.9)应用于无限小转动，转轴通过坐标原点，并且没有平移的情形。用 $\delta\psi$ 表示转角 φ，它是一小量，其平方可忽略，式(6.2.9)成为

$$\begin{aligned}X&=x+(z\cos\beta-y\cos\gamma)\delta\psi\\Y&=y+(x\cos\gamma-z\cos\alpha)\delta\psi\\Z&=z+(y\cos\alpha-x\cos\beta)\delta\psi\end{aligned}\tag{6.2.10}$$

这些方程也可由刚体绕轴 Ox 一无限小转动 $\cos\alpha\delta\psi$，绕轴 Oy 一无限小转动 $\cos\beta\delta\psi$ 和绕轴 Oz 一无限小转动 $\cos\gamma\delta\psi$ 来得到。因此，绕线 OK 的任一无限小转动等价于顺次绕轴 Ox 的小转动 $\cos\widehat{KOx}\cdot\delta\psi$，绕轴 Oy 的小转动 $\cos\widehat{KOy}\cdot\delta\psi$ 和绕轴 Oz 的小转动 $\cos\widehat{KOy}\cdot\delta\psi$，其中轴 Ox,Oy,Oz 是三互相垂直的线，与 OK 相交于点 O。

3)绕定点运动的 Euler 参数表示

假设刚体不发生平移，转轴通过原点，则式(6.2.9)中 $d=0,a=b=c=0$，于是式(6.2.9)给出

$$\begin{aligned}X&=x-2\sin^2\frac{1}{2}\varphi(x\sin^2\alpha-y\cos\alpha\cos\beta-z\cos\alpha\cos\gamma)+2\sin\frac{1}{2}\varphi\cos\frac{1}{2}\varphi(z\cos\beta-y\cos\alpha)\\Y&=y-2\sin^2\frac{1}{2}\varphi(y\sin^2\beta-z\cos\beta\cos\gamma-x\cos\beta\cos\alpha)+2\sin\frac{1}{2}\varphi\cos\frac{1}{2}\varphi(x\cos\gamma-z\cos\alpha)\\Z&=z-2\sin^2\frac{1}{2}\varphi(z\sin^2\gamma-x\cos\gamma\cos\alpha-y\cos\gamma\cos\beta)+2\sin\frac{1}{2}\varphi\cos\frac{1}{2}\varphi(y\cos\alpha-x\cos\beta)\end{aligned}\tag{6.2.11}$$

引进 Euler 参数 ξ,η,ζ,χ，由下述方程确定

$$\xi=\cos\alpha\sin\frac{1}{2}\varphi,\eta=\cos\beta\sin\frac{1}{2}\varphi,\zeta=\cos\gamma\sin\frac{1}{2}\varphi,\chi=\cos\frac{1}{2}\varphi\tag{6.2.12}$$

这些参数满足

$$\xi^2+\eta^2+\zeta^2+\chi^2=1 \tag{6.2.13}$$

这样,式(6.2.11)成为

$$\begin{aligned}
X&=(\xi^2-\eta^2-\zeta^2+\chi^2)x+2(\xi\eta-\zeta\chi)y+2(\xi\zeta+\eta\chi)z\\
Y&=2(\xi\eta+\zeta\chi)x+(-\xi^2+\eta^2-\zeta^2+\chi^2)y+2(\eta\zeta-\xi\chi)z\\
Z&=2(\xi\zeta-\eta\chi)x+2(\eta\zeta+\xi\chi)y+(-\xi^2-\eta^2+\zeta^2+\chi^2)z
\end{aligned}$$

两组坐标轴 $OXYZ$ 与 $Oxyz$ 的方向余弦由下式给出

	X	Y	Z
x	$\xi^2-\eta^2-\zeta^2+\chi^2$	$2(\xi\eta+\zeta\chi)$	$2(\zeta\xi-\chi\eta)$
y	$2(\xi\eta-\zeta\chi)$	$-\xi^2+\eta^2-\zeta^2+\chi^2$	$2(\eta\zeta+\chi\xi)$
z	$2(\xi\zeta+\eta\chi)$	$2(\eta\zeta-\xi\chi)$	$-\xi^2-\eta^2+\zeta^2+\chi^2$

(6.2.14)

4)Euler 角

Euler 用三次转动,将固定坐标系 $Oxyz$ 转到与刚体相固连的坐标系 $O\xi\eta\zeta$。首先,绕轴 Oz 转一角 ψ,称为进动角,如图 6.7(a)所示。

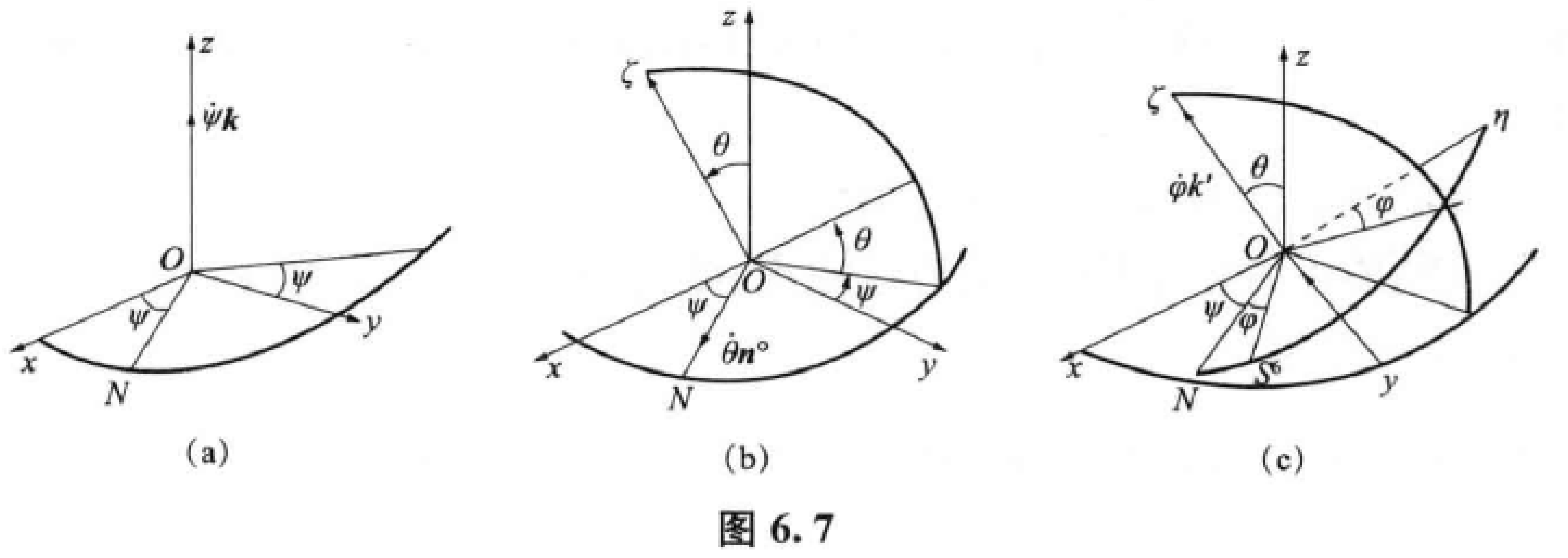


图 6.7

其次,绕节线 ON 转一角 θ,称为章动角,如图 6.7(b)所示。最后,绕 $O\zeta$ 转一角 φ,称为自转角,如图 6.7(c)所示。第一次转动对应的转动矩阵为

$$\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}\cos\psi & \sin\psi & 0\\ -\sin\psi & \cos\psi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

第二次转动对应的转动矩阵为

$$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & \sin\theta\\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

第三次转动对应的转动矩阵为

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi & 0\\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

三次转动矩阵的积为

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{CD})=\begin{pmatrix}\cos\varphi\cos\psi-\cos\theta\sin\varphi\sin\psi & \cos\varphi\sin\psi+\cos\theta\cos\psi\sin\varphi & \sin\varphi\sin\theta\\ -\sin\varphi\cos\psi-\cos\theta\sin\psi\cos\varphi & -\sin\varphi\sin\psi+\cos\theta\cos\psi\cos\varphi & \cos\varphi\sin\theta\\ \sin\theta\sin\psi & -\sin\theta\cos\psi & \cos\theta\end{pmatrix} \tag{6.2.15}$$

将式(6.2.15)与式(6.2.14)比较，可得到用 Euler 角表示 Euler 参数的公式[4]

$$\begin{aligned}&\xi=\sin\frac{1}{2}\theta\cos\frac{1}{2}(\psi-\varphi),\eta=\sin\frac{1}{2}\theta\sin\frac{1}{2}(\psi-\varphi)\\&\zeta=\cos\frac{1}{2}\theta\sin\frac{1}{2}(\psi+\varphi),\chi=\cos\frac{1}{2}\theta\cos\frac{1}{2}(\psi+\varphi)\end{aligned} \tag{6.2.16}$$

5)角速度

定点运动刚体的角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 可用 Euler 角及其导数表示出

$$\boldsymbol{\omega}=\dot{\psi}\boldsymbol{k}+\dot{\theta}\boldsymbol{n}^{\circ}+\dot{\varphi}\boldsymbol{k}'$$

如图 6.7 所示，投影到固定轴系 $Oxyz$，有

$$\begin{aligned}\omega_x&=\dot{\theta}\cos\psi+\dot{\varphi}\sin\theta\sin\varphi\\ \omega_y&=\dot{\theta}\sin\psi-\dot{\varphi}\sin\theta\cos\varphi\\ \omega_z&=\dot{\varphi}\cos\theta+\dot{\psi}\end{aligned} \tag{6.2.17}$$

投影到固连轴系 $O\xi\eta\zeta$，有

$$\begin{aligned}\omega_\xi&=\dot{\theta}\cos\varphi+\dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi\\ \omega_\eta&=-\dot{\theta}\sin\varphi+\dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi\\ \omega_\zeta&=\dot{\varphi}+\dot{\psi}\cos\theta\end{aligned} \tag{6.2.18}$$

例 2 杆 AB 两端通过球铰链与套筒 A,B 相连，如图 6.8 所示。已知套筒 A 以速度 $v_A=8$ m/s 向上运动，设杆 AB 的角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 方向与 AB 垂直。试求图 6.8 所示瞬时杆 AB 的角速度和套筒 B 的速度 $\boldsymbol{v}_B$。

解:以 A 为原点建立与 A 同规律的平移系，如图 6.8 所示。研究点 B 的速度，有

$$\boldsymbol{v}_B=\boldsymbol{v}_A+\boldsymbol{\omega}\times\overrightarrow{AB} \tag{a}$$

令固定轴系 $Oxyz$ 各轴向单位矢量为 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$,有

$$\boldsymbol{v}_A=8\boldsymbol{k}$$

点 B 的速度方向沿 CD,有

$$\boldsymbol{v}_B=\frac{4}{5}v_B\boldsymbol{k}-\frac{3}{5}v_B\boldsymbol{i}$$

而

$$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{r}_B-\boldsymbol{r}_A=1.5\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{k}-(2\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k})=1.5\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$$

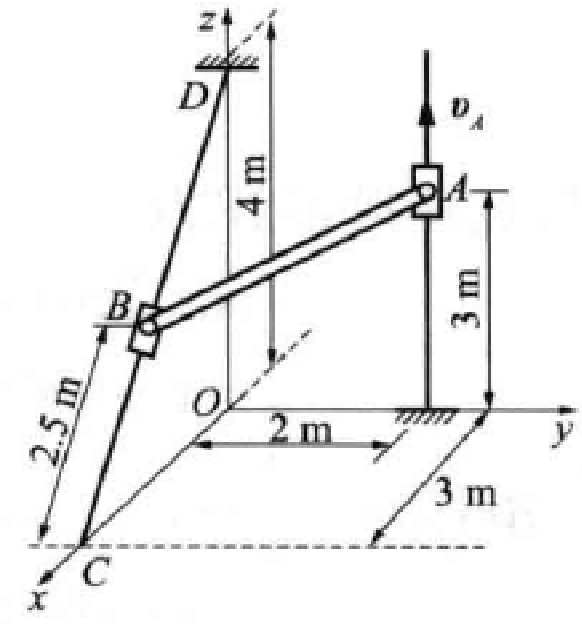


图 6.8

令杆 AB 的角速度矢量为

$$\boldsymbol{\omega}=\omega_x\boldsymbol{i}+\omega_y\boldsymbol{j}+\omega_z\boldsymbol{k}$$

将以上 4 式代入式(a),得

$$\frac{4}{5}v_B\boldsymbol{k}-\frac{3}{5}v_B\boldsymbol{i}=8\boldsymbol{k}+(\omega_x\boldsymbol{i}+\omega_y\boldsymbol{j}+\omega_z\boldsymbol{k})\times(1.5\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k})$$

由此得

$$-\frac{3}{5}v_B=-\omega_y+2\omega_z \tag{b}$$

$$0=\omega_x+1.5\omega_z \tag{c}$$

$$\frac{4}{5}v_B=8-2\omega_x-1.5\omega_y \tag{d}$$

由假设 $\boldsymbol{\omega}$ 与 $\overrightarrow{AB}$ 相垂直,有 $\boldsymbol{\omega}\cdot\overrightarrow{AB}=0$

即

$$1.5\omega_x-2\omega_y-\omega_z=0 \tag{e}$$

由式(c),(e)得

$$\omega_z=-\frac{1}{1.5}\omega_x,\ \omega_y=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1.5}+1.5\right)\omega_x$$

将其代入式(b),(d)得

$$v_B=\frac{72.5}{18}\omega_x \qquad v_B=10-\frac{36.25}{8}\omega_x$$

由此解得

$$\omega_x=1.17\ \text{rad/s}$$
$$v_B=4.71\ \text{m/s}$$

进而求得

$$\omega_y=1.27\ \text{rad/s},\ \omega_z=-0.78\ \text{rad/s}$$

§6.3 点的复合运动

6.3.1 绝对运动，相对运动，牵连运动

物体相对定系的运动，称为**绝对运动**。物体相对动系的运动，称为**相对运动**。而动系相对于定系的运动，称为**牵连运动**。

6.3.2 变矢量的绝对导数与相对导数

变矢量 $\boldsymbol{A}$ 相对定系的导数为 $\mathrm{d}\boldsymbol{A}/\mathrm{d}t$，相对动系的导数为 $\tilde{\mathrm{d}}\boldsymbol{A}/\mathrm{d}t$，两者关系为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}=\frac{\tilde{\mathrm{d}}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{A} \tag{6.3.1}$$

其中 $\boldsymbol{\omega}$ 为动系相对定系的角速度。

6.3.3 速度合成定理

设动点 M 相对定系的绝对矢径为 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$，相对动系的相对矢径为 $\boldsymbol{r}'=\boldsymbol{r}'(t)$，而动空间的参考点 O' 的绝对矢径为 $\boldsymbol{r}_{O'}=\boldsymbol{r}_{O'}(t)$，它们满足

$$\boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{r}_{O'}(t)+\boldsymbol{r}'(t)$$

将其对时间 t 求导数，得

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_{O'}}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}'}{\mathrm{d}t}$$

上式左端表示点 M 的**绝对速度** $\boldsymbol{v}_a$，右端第一项是动系参考点 O' 相对于定系的绝对速度 $\boldsymbol{v}_{O'}$，第二项是相对矢径的绝对导数，有

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}'}{\mathrm{d}t}=\frac{\tilde{\mathrm{d}}\boldsymbol{r}'}{\mathrm{d}t}+\boldsymbol{\omega}_e\times\boldsymbol{r}'=\boldsymbol{v}_r+\boldsymbol{\omega}_e\times\boldsymbol{r}'$$

其中 $\boldsymbol{\omega}_e$ 为动系的角速度。于是有

$$\boldsymbol{v}_a=\boldsymbol{v}_{O'}+\boldsymbol{\omega}_e\times\boldsymbol{r}'+\boldsymbol{v}_r \tag{6.3.2}$$

在动空间中对动点 M 的绝对运动产生直接影响的是此瞬时动系上与动点相重合的点 N 的运动。将重合点 N 相对定系的绝对速度定义为点 M 的**牵连速度** $\boldsymbol{v}_e$ *，表示为

$$\boldsymbol{v}_e=\boldsymbol{v}_N=\boldsymbol{v}_{O'}+\boldsymbol{\omega}_e\times\boldsymbol{r}' \tag{6.3.3}$$

于是得到点的速度合成定理

$$\boldsymbol{v}_a=\boldsymbol{v}_e+\boldsymbol{v}_r \tag{6.3.4}$$

它表明，在任一瞬时，**动点的绝对速度等于其相对速度与牵连速度的矢量和。**

---

* e 是法文 entrainement 的第一个字母，表示“带动”之意。经朱照宣先生研究，英文里也有类似的词 entrainment。

6.3.4 加速度合成定理

将式(6.3.4)对时间 t 求导数,得

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_{\mathrm{a}}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_{\mathrm{e}}}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_{\mathrm{r}}}{\mathrm{d}t} \tag{6.3.5}$$

上式左端表示点 M 的绝对加速度 $\boldsymbol{a}_{\mathrm{a}}$,右端第一项为

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_{\mathrm{e}}}{\mathrm{d}t}&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{v}_{O'}+\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{e}}\times\boldsymbol{r}')\\
&=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_{O'}}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{e}}}{\mathrm{d}t}\times\boldsymbol{r}'+\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{e}}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}'}{\mathrm{d}t}\\
&=\boldsymbol{a}_{O'}+\boldsymbol{\alpha}_{\mathrm{e}}\times\boldsymbol{r}'+\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{e}}\times\left(\frac{\tilde{\mathrm{d}}\boldsymbol{r}'}{\mathrm{d}t}+\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{e}}\times\boldsymbol{r}'\right)\\
&=\boldsymbol{a}_{O'}+\boldsymbol{\alpha}_{\mathrm{e}}\times\boldsymbol{r}'+\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{e}}\times\boldsymbol{v}_{\mathrm{r}}+\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{e}}\times(\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{e}}\times\boldsymbol{r}')
\end{aligned}$$

上式第一、第二和第四项合起来恰好是动系上与动点相重合的点 N 的绝对加速度,定义为动点的牵连加速度 $\boldsymbol{a}_{\mathrm{e}}$,即

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{e}}=\boldsymbol{a}_{O'}+\boldsymbol{\alpha}_{\mathrm{e}}\times\boldsymbol{r}'+\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{e}}\times(\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{e}}\times\boldsymbol{r}') \tag{6.3.6}$$

于是有

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_{\mathrm{e}}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{a}_{\mathrm{e}}+\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{e}}\times\boldsymbol{v}_{\mathrm{r}} \tag{6.3.7}$$

式(6.3.5)右端第二项为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_{\mathrm{r}}}{\mathrm{d}t}=\frac{\tilde{\mathrm{d}}\boldsymbol{v}_{\mathrm{r}}}{\mathrm{d}t}+\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{e}}\times\boldsymbol{v}_{\mathrm{r}}=\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}+\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{e}}\times\boldsymbol{v}_{\mathrm{r}} \tag{6.3.8}$$

由式(6.3.7)看出,牵连速度的绝对导数一般并不等于牵连加速度,而是多出了一项 $\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{e}}\times\boldsymbol{v}_{\mathrm{r}}$,这是由于相对运动的存在。在动系中看到的重合点不是动系中的不变点,由于重合点的改变而产生了该项附加加速度。由式(6.3.8)看出,相对速度的绝对导数一般并不等于**相对加速度**,而是多出了一项 $\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{e}}\times\boldsymbol{v}_{\mathrm{r}}$,这是由于牵连速度使得相对速度的方向在定系中发生变化而产生的附加加速度。这两项之和用 $\boldsymbol{a}_{\mathrm{c}}$ 表示,称为**科氏加速度**,是法国人 Coriolis GG(1792—1843)于 1835 年在其论文《物体系统相对运动方程》中给出的。科氏加速度表示为

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{c}}=2\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{e}}\times\boldsymbol{v}_{\mathrm{r}} \tag{6.3.9}$$

于是式(6.3.5)成为

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{a}}=\boldsymbol{a}_{\mathrm{e}}+\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}+\boldsymbol{a}_{\mathrm{c}} \tag{6.3.10}$$

这就是点的加速度合成定理,表述为:**在任一瞬时,动点的绝对加速度等于其相对加速度,牵连加速度与科氏加速度的矢量和。**

§6.4 刚体的复合运动

刚体的**复合运动**是研究同一刚体在两个不同参考系中的运动关系。刚体

在定系中的运动通常可分解为运动形式相对简单的相对运动与牵连运动。反之，两个简单的运动也可复合为一个复杂的运动。

6.4.1 刚体平面运动的角速度合成定理

刚体平面运动的绝对角速度等于相对角速度与牵连角速度的矢量和，表示为

$$\boldsymbol{\omega}_a=\boldsymbol{\omega}_e+\boldsymbol{\omega}_r \tag{6.4.1}$$

角加速度合成定理表示为

$$\boldsymbol{\alpha}_a=\boldsymbol{\alpha}_e+\boldsymbol{\alpha}_r \tag{6.4.2}$$

6.4.2 刚体平面运动分解为两个转动

如果平面图形 S 在运动过程中，其上有一点 A 到定系中某一固定点 O 的距离始终保持不变，那么点 A 在定系中的轨迹是以 O 为圆心，以 OA 为半径的圆周曲线。对满足这样条件的平面运动，引入与两点 O,A 连线固连的动系 $Ox_1'x_2'$ 和定系 Ox_1x_2，如图 6.9 所示。动系相对定系绕轴 O 做定轴转动，图形 S 相对动系绕轴 A 做定轴转动。于是，这类刚体的平面运动可分解为两个转动，相对运动是相对于动系绕轴 A 的转动，牵连运动是随同动系绕轴 O 的转动。由于这两个轴彼此平行，因此又称这样的平面运动为绕两平行轴转动的合成。转动合成满足式(6.4.1)和式(6.4.2)。

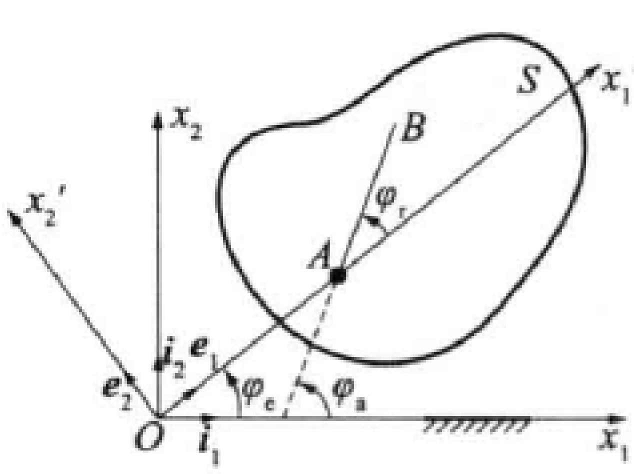


图 6.9

在特殊情况下，如果任意瞬时均有 $\omega_e=-\omega_r$，则 $\omega_a=0$，$\alpha_a=0$，此时刚体的绝对运动为平移，这样的运动称为**转动偶**。

例 1 追踪轨道问题[5]。

设两点 A 和 B 在平面上运动。被追踪点 B 以常速 $\boldsymbol{u}$ 在离水平轴为常距离 l 的直线上运动。追踪点 A 以速度大小为常数 $v(>u)$，方向沿 A,B 两点连线而运动。开始时，两点连线垂直于水平轴。试求 A,B 两点相遇的时间。

解：取固定直角坐标系 Oxy，其原点 O 为开始时点 A 的位置，轴 Ox 水平，轴 Oy 铅垂向上。在点 A 处平移动系 $Ax'y'$，其中 $Ax'/\!/Ox$，$Ay'/\!/Oy$，如图 6.10 所示。取点 B 为动点，$Ax'y'$ 为动系。设点 B 在 $Ax'y'$ 中的坐标为(x', y')，水平方向单位矢量为 $\boldsymbol{i}$，铅垂方向单位矢量为 $\boldsymbol{j}$，则有

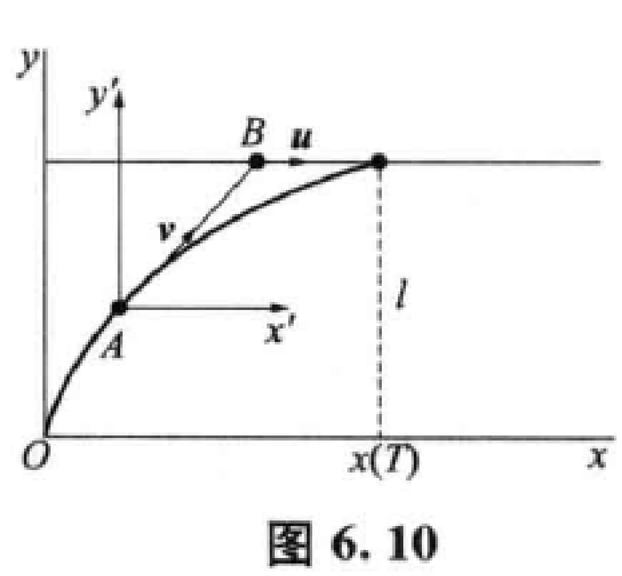


图 6.10

$$\boldsymbol{v}_a=u\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{v}_r=\dot{x}'\boldsymbol{i}+\dot{y}'\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{e}}=\boldsymbol{v}=\frac{vx'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}\boldsymbol{i}+\frac{vy'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}\boldsymbol{j}$$

速度合成定理给出

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{a}}=\boldsymbol{v}_{\mathrm{e}}+\boldsymbol{v}_{\mathrm{r}}$$

即

$$\dot{x}'=u-\frac{vx'}{\sqrt{x'^2+y'^2}},\ \dot{y}'=-\frac{vy'}{\sqrt{x'^2+y'^2}} \tag{a}$$

由此得

$$\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}y'}=-\frac{u}{v}\sqrt{1+\left(\frac{x'}{y'}\right)^2}+\frac{x'}{y'}$$

令

$$\alpha=\frac{x'}{y'},\ \beta=\ln y'$$

则有

$$\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}\beta}=-k\sqrt{1+\alpha^2} \tag{b}$$

其中

$$k=\frac{u}{v} \tag{c}$$

当 $t=0$ 时,$x'=0$,$y'=l$,因此有

$$\alpha(0)=0,\ \beta(0)=\ln l \tag{d}$$

在条件(d)下积分方程(b),得到

$$\alpha=-\mathrm{sh}\, k(\beta-\ln l) \tag{e}$$

由式(b),(e),得

$$\dot{\beta}=-\frac{v}{\sqrt{1+\alpha^2}}\exp(-\beta) \tag{f}$$

由此得

$$\int \exp\beta \mathrm{ch}\, k(\beta-\ln l)\,\mathrm{d}\beta=-vt+C$$

积分得

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{l^k(k+1)}\exp[\beta(k+1)]+\frac{l^k}{1-k}\exp[\beta(1-k)]\right\}=-vt+C \tag{g}$$

由初条件(d)求得积分常数 C 为

$$C=\frac{1}{2}\left(\frac{l}{1+k}+\frac{l}{1-k}\right) \tag{h}$$

当 $t=T$ 时，A,B 两点相遇，此时 $\beta\to-\infty$，因此有

$$-vT+\frac{l}{2}\left(\frac{1}{1+k}+\frac{1}{1-k}\right)=0$$

由此解得

$$T=\frac{l}{v(1-k^2)}=\frac{lv}{v^2-u^2}$$

当 $v=2u$ 时，有

$$T=\frac{2l}{3u}$$

例 2 在图 6.11 所示的机构中，$OA=OO'=b$，$\angle A=90°$，折杆 OAC 以角速度 ω 顺时针匀速转动，试求 $\varphi=120°$时杆 BD 的速度。

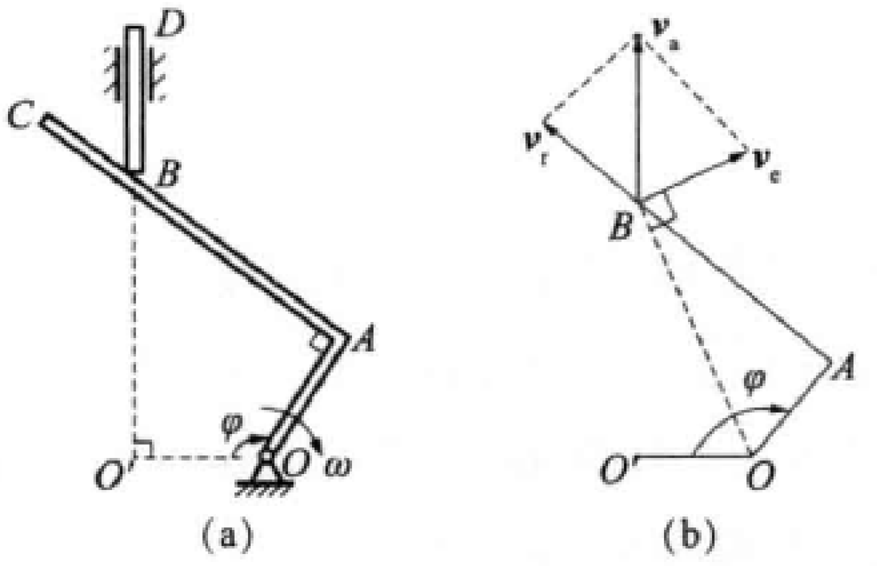


图 6.11

解：取 BD 杆上的点 B 为动点，与折杆 OAC 固连的坐标系为动系。与动点 B 相重合的点的速度 $\boldsymbol{v}_e\perp OB$，大小为 $v_e=\omega\cdot OB$。在动系上看到点 B 的速度是相对速度 $\boldsymbol{v}_r$，它的方向沿 AB。动点的绝对速度 $\boldsymbol{v}_a$ 的方向沿铅垂线。由速度合成定理，有

$$\boldsymbol{v}_a=\boldsymbol{v}_e+\boldsymbol{v}_r$$

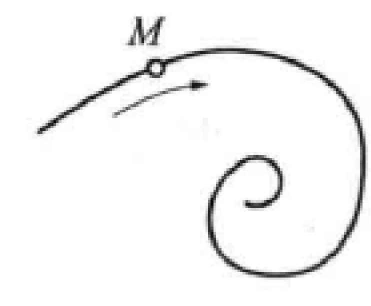
速度合成矢量图如图 6.11(b)所示。解速度矢量图，在 $\varphi=120°$时，容易得到

$$v_a=v_e=2b\omega$$

运动学作为理论力学的一个分支学科，从几何角度研究物体的运动。运动学为动力学、机械学提供理论基础，也包含有自然科学和工程技术众多学科所需要的基本知识。本章作为后续分析动力学的运动学基础，介绍了点的运动学和刚体运动学的基本知识，更详细的内容可参考有关理论力学的教材。

思考题

6.1 如图所示,点 M 沿螺线自外向内运动,它走过的弧长与时间成正比,问点的加速度是越来越大还是越来越小?点 M 越跑越快还是越跑越慢?



思考题 6.1 图

6.2 刚体运动时,其上有两条相交直线始终与各自初始位置保持平行,则刚体运动一定是平移。这个结论对否?

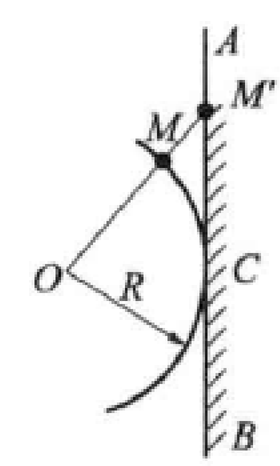
6.3 在什么情况下,点的牵连速度的绝对导数不等于牵连加速度?

6.4 在刚体的一般运动中,刚体上的点的速度与刚体角速度的标积是一不变量。对否?

习题

6.1 试用点的运动学方法研究§6.4中的例2。

6.2 半径为 R 的圆弧与墙 AB 相切,在圆心 O 处有一光源,点 M 从切点 C 处开始以匀速 v_0 沿圆弧运动,如图所示。试求点 M 在墙上的影子 M' 的速度大小和加速度大小。



题 6.2 图

答:$v_{M'}=v_0\sec^2\left(\dfrac{v_0}{R}t\right),a_{M'}=\dfrac{2v_0^2}{R}\sin\left(\dfrac{v_0}{R}t\right)\Big/\cos^3\left(\dfrac{v_0}{R}t\right)$

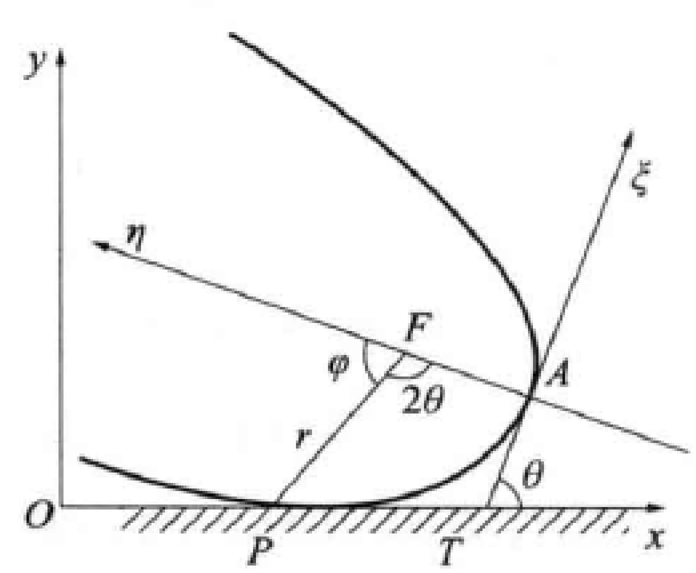
6.3 试用极坐标法解§6.4中的例1。

6.4 已知点在平面上的运动方程 $x=x(t),y=y(t)$,试证轨道的曲率半径为

$$\rho=\frac{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{3/2}}{|\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x}|}$$

6.5 试利用§6.2中例1的结果,研究柱面基线为抛物线的情形,如图所示。抛物线方程的极坐标表示为

$$r=\frac{p}{1-\cos\theta}$$



题 6.5 图

答:$\dot{x}+\dfrac{1}{2}p\,\dot{\theta}+\tan\theta\sin\theta=0$

$\dot{y}-\dfrac{1}{2}p\,\dot{\theta}(2+\tan^2\theta)\sin\theta=0$

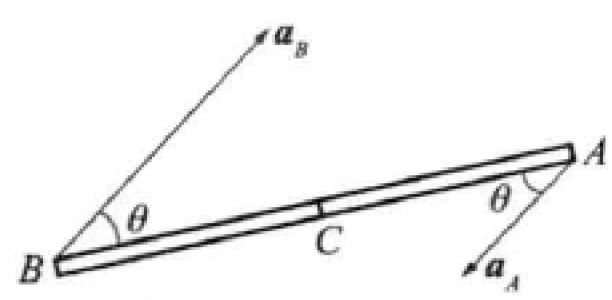
6.6 如图所示,已知杆 AB 做平面运动,其上两端的加速度为 $a_A=a,a_B=2a$,已知这两点加速度反向均与 AB 成 θ 角,试求杆 AB 中点 C 的加速度。

答:$a_C=\frac{1}{2}a$

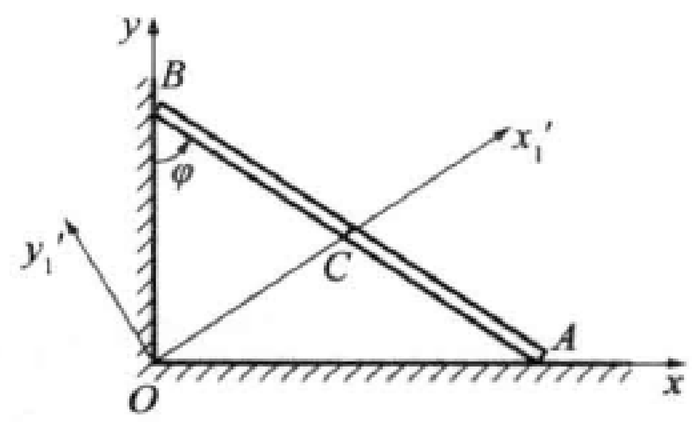
6.7 如图所示,杆 AB 长 l,其上 A 端沿水平地面运动,B 端沿铅垂墙运动。如以 φ 为坐标,动系的轴过点 O 和杆 AB 的中点 C。试求点 A 相对于动系的轨迹、速度和加速度。

答:$\left(x'_A-\frac{l}{2}\right)^2+y'^2_A=\left(\frac{l}{2}\right)^2$,$v_{rx'}=l\dot{\varphi}\sin 2\varphi$,

$a_{ry'}=2l\dot{\varphi}^2\sin 2\varphi-l\ddot{\varphi}\cos 2\varphi$

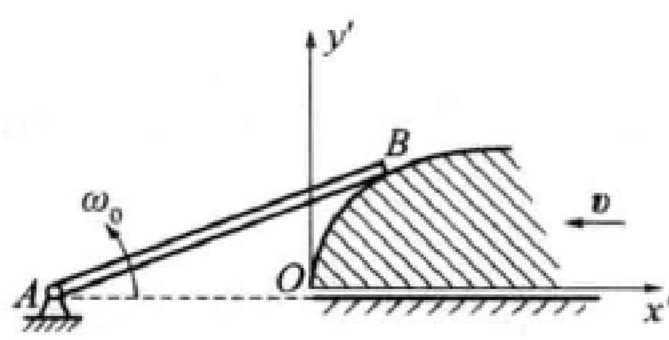


题 6.6 图



题 6.7 图

6.8 如图所示,凸轮沿水平直线以匀速 v 水平向左平移,凸轮外形在与凸轮固连的坐标系中的方程为 $y'=f(x')$。直杆 AB 长 l,一端 A 与固定支座铰接,另一端搁在凸轮上。由于凸轮的平移带动杆 AB 做定轴转动。若要求杆以匀角速度 ω 转动,试求凸轮外形曲线方程。



题 6.8 图

答:$x'=\frac{v}{\omega}\arcsin\frac{y'}{l}+\sqrt{l^2-y'^2}-l$

参考文献

[1]朱照宣,周起钊,殷金生. 理论力学[M]. 上册. 北京:北京大学出版社,1982.

[2]Павленко ЮГ. Задач по Теоретической Механике[M]. Москва:ФИЗМАТЛИТ,2003.

[3]梅凤翔,尚玫. 理论力学 I [M]. 北京:高等教育出版社,2012.

[4] Whittaker ET. A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies[M]. 4th Ed. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1952.

[5]Журавлев ВФ. Основы Теоретической Механики[M]. Москва:ФИЗМАТЛИТ, 2008.

7

d'Alembert-Lagrange 原理

d'Alembert 原理将牛顿定律推广到受约束的质点系，并为**动力学普通方程**(d'Alembert-Lagrange 原理)奠定了基础，而 d'Alembert-Lagrange 原理是分析动力学的基础。本章讨论 d'Alembert 原理和 d'Alembert-Lagrange 原理。

§7.1 d'Alembert 原理

本节从 d'Alembert 的原述以及后人的理解来讨论 **d'Alembert 原理**。

7.1.1 d'Alembert 的原述

1743 年，d'Alembert J le Rond(1717—1783)发表《动力学论》(Traité de Dynamique)，书中有如下一段文字：

"设系统由 A,B,C 等组成。假设这些物体发生运动 a,b,c 等，而这些物体的运动由于其相互作用而强制改变。显然，联系物体 A 的运动 a 可作为实际完成的运动 a' 和某另外的运动 α 的组合来研究。类似地，联系运动 b,c 等可分别作为运动 b' 和 β，c' 和 γ 等的组合来研究。显然，如果 a,b,c 等的方向分别用同时一对方向 a' 和 α，b' 和 β，c' 和 γ 等来替代，那么物体 A,B,C 等的运动仍然是一样的。但是，根据假设，物体 A,B,C 等实际完成了运动 a',b',c' 等。因此，运动 α,β,γ 等在运动 a',b',c' 等中应不改变，即如果物体仅得到这些运动 α,β,γ 等，那么它们会相互抵消而物体处于静止。

由此得到寻求彼此作用多个物体运动的下述法则。需将运动 a,b,c 等的每一个分成两个运动：a' 和 α，b' 和 β，c' 和 γ 等，并且后面的运动应是这样的：如果物体仅传递运动 a',b',c' 等，那么物体能保持这些运动，而不彼此混合；如果物体仅传递运动 α,β,γ 等，那么物体就会停止。显然，a',b',c' 等将是这样的运动，它们使物体承受相互作用的结果"[1]。

7.1.2 后人对 d'Alembert 原理的理解

(1)Lagrange 在其著作中写道[2]：

“d'Alembert 1743 年出版的《动力学论》,对所有人们想到的动力学问题,提供了一种直接和普遍的方法去解或至少列写方程。这个方法将物体运动的所有规律归结为其平衡规律,也将动力学归为静力学。”

“这个原理没有直接提供解动力学问题的必要方程,但是得知将其归为平衡条件。这样,将这个原理与通常的杠杆平衡原理或力的合成原理相联合,总可以找到每个问题的方程。”

(2)苏联著名力学史家 Моисеев НД(1902—1955)1961 年出版《力学发展史》,书中有关 d'Alembert 原理的一段说明如下[3]：

“作者这样的提法后来称为 d'Alembert 原理,不是别的,正是 J. Bernoulli 原理,激发运动损失的平衡原理的推广表示。这些激发运动损失,在 d'Alembert 提法中就是‘运动’α,β,γ 等,它们作为‘联系运动’(或‘无约束激发运动’)a,b,c 等与‘完成运动’(或‘真实激发运动’)a',b',c'等的几何差。”

“仅就原理将系统运动条件归结为平衡条件,d'Alembert 原理还没有给出系统任何的运动微分方程。为得到这些方程,还需将 d'Alembert 原理与静力学原理结合,……”。

(3)在 Суслов ГК(1857—1932)的著作《理论力学》第 197 节“d'Alembert 原理”中,将量 $\boldsymbol{F}_\nu-m_\nu\boldsymbol{W}_\nu$ 称为**损失力**;在第 198 节“虚位移原理”中指出,损失力与约束力平衡[4]。

(4)在朱照宣、周起钊、殷金生的《理论力学》下册,有如下表述：

“按照 d'Alembert 原始思想,可将力 $\boldsymbol{F}$ 分解为两部分:一部分使质点产生加速度 $\boldsymbol{a}$,叫做发动力 $\boldsymbol{F}_{发动}$,有关系式

$$\boldsymbol{F}_{发动}=m\boldsymbol{a} \tag{1}$$

余下的一部分叫损失力,所以有关系

$$\boldsymbol{F}_{损失}=\boldsymbol{F}-\boldsymbol{F}_{发动} \tag{2}$$

即损失力等于主动力加上$(-m\boldsymbol{a})$。

d'Alembert 原理表述为:作用于质点上的损失力在每一瞬时位置上都为约束力所平衡,它的表达式为

$$\boldsymbol{F}_{损失}+\boldsymbol{N}=0 \tag{3}$$

……”

“d'Alembert 原理的主题思想是把牛顿定律推广,用于受约束的质点,这就为后来的非自由质点系动力学奠定了基础。J le Rond d'Alembert(1717—1783)在《动力学教程》(1743 年)中提出这个原理以后一百多年来,即到了 19 世纪前半叶,人们开始把$-m\boldsymbol{a}$ 这个量叫做**惯性力**,原理被解释为,在加上惯性力

$\boldsymbol{F}_{惯}=-m\boldsymbol{a}$ 以后，质点的主动力与惯性力的向量和（就是损失力）为约束力所平衡，即式(3)成为

$$\boldsymbol{F}+\boldsymbol{F}_{惯}+\boldsymbol{N}=0 \tag{4}$$

在现代的许多著作中，特别是一些工程技术书籍里，突出了 d'Alembert 原理中动力学问题可以采取静力学形式这一特点，而不强调"受约束"这个前提。他们解释说：牛顿定律是 $\boldsymbol{F}=m\boldsymbol{a}$（如果有约束力，则也包括在外力 $\boldsymbol{F}$ 之中），如果人为地引进一个惯性力 $\boldsymbol{F}_{惯}=-m\boldsymbol{a}$，假设（只是假设而已）把惯性力也加到质点上去，那么就应该有关系式

$$\boldsymbol{F}+\boldsymbol{F}_{惯}=0$$

注意这个关系式中的 $\boldsymbol{F}$ 含义不一样，这里的 $\boldsymbol{F}$ 包含了约束力。他们把以下的内容叫做 d'Alembert 原理：质点在运动过程中每一瞬时外力与惯性力平衡。人们的原意是讨论质点的动力学问题，现在 d'Alembert 原理说，只要引入惯性力，则动力学问题也可以用静力学平衡问题一样处理，于是'动'与'静'就相通了。"[5]

(5) Rosenberg 在《离散系统分析动力学》中有关 d'Alembert 原理的一段文字如下：

"d'Alembert 原理指出：

在质点系动力学问题中，约束力的总体可以不予考虑。

这个原理在 Lagrange 力学中具有深远意义。事实上，它是与质点系牛顿力学中的第三定律相对应的。在质点系牛顿力学中，将力分为外力和内力的结果，导致了有关内力的一个特别的公理。同样，在受约束的系统的 Lagrange 力学中，将力分为给定力和约束力也需要有一个关于约束力的公理。这个公理就是 d'Alembert 原理。"[6]

书中还有一段评论：

"由于对于 d'Alembert 原理存在广泛的误解，所以，我们必须再谈一点评论性的意见。

人们经常发现 d'Alembert 原理'应用于'单个质点的不受约束的运动。这样做的作者们按如下程序进行：他们将单个质点的牛顿第二定律

$$m\ddot{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{F} \tag{a}$$

改写为如下形式

$$\boldsymbol{F}-m\ddot{\boldsymbol{r}}=0 \tag{b}$$

其中 $\boldsymbol{F}$ 是作用在质点上所有力的合力，他们称(a)为牛顿定律，而(b)为 d'Alembert 原理。他们争辩说，如果(b)中的 $\boldsymbol{F}$ 是一个力，而它可以加到 $-m\ddot{\boldsymbol{r}}$ 上去，那么由齐次性的要求可知 $-m\ddot{\boldsymbol{r}}$ 也是一个力（通常称为'反向有效力'，而 $m\ddot{\boldsymbol{r}}$ 则称为'惯性力'）。于是，(b)表明两个力之和等于零。这是一个静力学问题的说法，因此，动力学问题(a)已经化为静力学问题(b)。

(a)和(b)显然是相同的方程,它们仅有的差别是在(b)中所有的非零项都已移到等号的同一边了。毫无疑问,(b)不会包含在(a)中所没有的任何新的'原理'。Hamel 称这种对 d'Alembert 原理的解释是对 d'Alembert 的大不敬。"[6]

7.1.3 d'Alembert 原理的表述

1)第一种表述

d'Alembert 原理强调了"受约束"的前提,因此需将约束力写在方程的一边,将其他力写在方程的另一边,对质点系表示为

$$\boldsymbol{F}_i-m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i=-\boldsymbol{F}_{Ni}\qquad(i=1,2,\cdots,N)\tag{7.1.1}$$

或者表示为

$$m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i-\boldsymbol{F}_i=\boldsymbol{F}_{Ni}\qquad(i=1,2,\cdots,N)\tag{7.1.2}$$

其中 $\ddot{\boldsymbol{r}}_i$ 为第 i 个质点的加速度;m_i 为其质量;$\boldsymbol{F}_i$ 为作用在第 i 个点上的主动力的合力;$\boldsymbol{F}_{Ni}$ 为作用其上的约束力的合力。以上的表述出现在 Hamel[7]、Бухгольц[8]、Rosenberg[6]、朱照宣[5]等的著作中,表明损失力等于主动力加上惯性力。正是这样强调受约束,再利用理想约束条件,才发现了动力学普遍方程。

2)第二种表述

对 N 个质点组成的质点系,d'Alembert 原理表述为:在每一瞬时,主动力、约束力和假想的惯性力处于"平衡",即有

$$\boldsymbol{F}_i+\boldsymbol{F}_{Ni}+\boldsymbol{F}_{Ii}=0\qquad(i=1,2,\cdots,N)\tag{7.1.3}$$

其中 $\boldsymbol{F}_{Ii}=-m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i$ 为惯性力。

如果系统中第 i 个质点所受外力的合力,包括外主动力和外约束力,记作 $\boldsymbol{F}_i^{(e)}$,根据平衡力系的主矢和对任一点 A 的主矩皆为零,可列写如下"平衡方程"

$$\sum\boldsymbol{F}_i^{(e)}+\sum\boldsymbol{F}_{Ii}=0\tag{7.1.4}$$

$$\sum M_A(\boldsymbol{F}_i^{(e)})+\sum M_A(\boldsymbol{F}_{Ii})=0$$

这就是动静法给出的方程。利用方程(7.1.4),可将动力学问题按静力学方法求解。

由 d'Alembert 原理发展起来的动静法,理论上与动量和动量矩定理等价,应用上可以利用静力学中的各种平衡方程及解题技巧。

d'Alembert 原理在经典力学由牛顿力学向 Lagrange 力学发展过程中起了重要的历史作用。

§7.2 d'Alembert-Lagrange 原理

本节讨论 **d'Alembert-Lagrange 原理**,包括原理的建立、原理的表述,以及直

角坐标下的表达等。

7.2.1 原理的建立

1)Lagrange 和 Appell 的有关论述

Lagrange 在其著作中写道[2]：

“按坐标 x,y,z 激励并使其增大的力

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2},\qquad m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2},\qquad m\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}$$

的矩为

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\delta x,\qquad m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\delta y,\qquad m\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\delta z$$

这些矩的和应表示为公式

$$\int m\left(\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\delta x+\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\delta y+\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\delta z\right)$$

假设积分号$\int$遍及系统所有物体。

现假设 $P,Q,R,\cdots$为给定的加速力，这些力加在系统的每个物体 m 上指向其中心；假设 $p,q,r,\cdots$为每个物体对中心的直线距离。微分 $\delta p,\delta q,\delta r,\cdots$表示线 $p,q,r,\cdots$的变分，由物体 m 坐标 x,y,z 的变分导出；但是，因为力 $P,Q,R,\cdots$使这些线变短，其虚速度应表示为$-\delta p,-\delta q,-\delta r,\cdots$；因此，力 $mP,mQ,mR,\cdots$的矩应表示为$-mP\delta p,-mQ\delta q,-mR\delta r,\cdots$，而所有这些力的矩的和将表示为

$$-\int m(P\delta p+Q\delta q+R\delta r+\cdots)$$

这两个和相等，有

$$\int m\left(\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\delta x+\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\delta y+\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\delta z\right)=-\int m(P\delta p+Q\delta q+R\delta r+\cdots)$$

移第二项，有

$$\int m\left(\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\delta x+\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\delta y+\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\delta z\right)+\int m(P\delta p+Q\delta q+R\delta r+\cdots)=0$$

这就是对任何物体系统运动的动力学普遍公式。”

在 Lagrange 时代还没有功的概念，他所指“力矩”实际上是虚功。他给出的动力学普遍公式就是 d'Alembert-Lagrange 原理的雏形。

Appell 在其著作第 431 节“带无摩擦约束系统动力学普遍方程”中写道[9]：

“根据 d'Alembert 原理，在每一瞬时，给定力、惯性力和约束力之间处于平衡。因此，如果系统发生任何可能位移，那么给定力、惯性力和约束力的功之和将等于零。但如果可能位移是时刻 t 为约束允许，那么约束力的功之和本身就等于零。因此，惯性力和给定力的功之和等于零。”

2)由 d'Alembert 原理和虚位移原理导出

d'Alembert 原理的第二种表述是将动力学问题归结为静力学问题,亦即归结为所有施加在质点系上的力(包括惯性力)作用下的平衡问题。按照虚位移原理,质点系平衡的必要和充分条件是:所有作用在质点系上的主动力在任何虚位移上所做的元功之和等于零(双面理想约束下)。将这一条件应用到运动的质点系上,写出在主动力和惯性力作用下质点系的平衡条件,就得到

$$\sum_{i=1}^{N}(\boldsymbol{F}_i - m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i)\cdot\delta\boldsymbol{r}_i = 0 \tag{7.2.1}$$

这就是双面理想约束下的 d'Alembert-Lagrange 原理。

3)由理想约束条件导出

将 d'Alembert 原理的第一种表述式(7.1.1)两端同时乘以虚位移 $\delta\boldsymbol{r}_i$ 并对 i 求和,得到

$$\sum_{i=1}^{N}(\boldsymbol{F}_i - m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i)\cdot\delta\boldsymbol{r}_i = -\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{F}_{Ni}\cdot\delta\boldsymbol{r}_i \tag{7.2.2}$$

对双面理想约束系统,有

$$\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{F}_{Ni}\cdot\delta\boldsymbol{r}_i = 0 \tag{7.2.3}$$

对单面理想约束系统,有

$$\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{F}_{Ni}\cdot\delta\boldsymbol{r}_i \geqslant 0 \tag{7.2.4}$$

将式(7.2.3)代入式(7.2.2),得到

$$\sum_{i=1}^{N}(\boldsymbol{F}_i - m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i)\cdot\delta\boldsymbol{r}_i = 0 \tag{7.2.5}$$

将式(7.2.4)代入式(7.2.2),得到[4]

$$\sum_{i=1}^{N}(\boldsymbol{F}_i - m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i)\cdot\delta\boldsymbol{r}_i \leqslant 0 \tag{7.2.6}$$

7.2.2 原理的表述

d'Alembert-Lagrange 原理表述如下:

对具有双面理想约束的质点系,在运动的每一瞬时,作用于质点系上的主动力和惯性力,在质点系该瞬时所在位置的任何虚位移上所做元功之和等于零,表述为式(7.2.1)。

对具有单面理想约束的质点系,在运动的每一瞬时,作用于质点系上的主动力和惯性力,在质点系该瞬时所在位置的任何虚位移上所做元功之和小于或等于零,表述为式(7.2.6)。

d'Alembert-Lagrange 原理有几种叫法。Appell 和 Суслов 称其为 d'Alembert 原理,Бухгольц 称其为 d'Alembert-Lagrange 方程式,也叫动力学普遍方程。

7.2.3 原理的应用

对某些特殊类约束,可由 d'Alembert-Lagrange 原理导出动力学普遍定理。

假设约束允许系统虚位移在某方向 $\boldsymbol{s}^{\circ}$,即设所有质点的虚位移 $\delta\boldsymbol{r}_i$ 可选同样的

$$\delta\boldsymbol{r}_i=\delta s\cdot\boldsymbol{s}^{\circ}$$

将其代入原理(7.2.1),得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\left(\sum_{i=1}^{N}m_i\boldsymbol{v}_i\right)\cdot\boldsymbol{s}^{\circ}\right]=\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{F}_i\cdot\boldsymbol{s}^{\circ}$$

因为内力成对出现,求和为零,由此得到

$$\dot{\boldsymbol{p}}_s=\boldsymbol{F}_{RS}^{(e)} \tag{7.2.7}$$

这就是动量定理,它表明系统的动量对时间的导数在 $\boldsymbol{s}^{\circ}$方向的投影等于外力主矢在此方向的投影。

如果约束允许系统虚位移绕某轴 Oz 转动,则有

$$\delta\boldsymbol{r}_i=\delta\alpha\boldsymbol{z}^{\circ}\times\boldsymbol{r}_i$$

其中 $\delta\alpha$ 是系统绕轴 Oz 的无限小转角。将其代入原理(7.2.1),并简化,得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\left(\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{r}_i\times m_i\boldsymbol{v}_i\right)\cdot\boldsymbol{z}^{\circ}\right]=\left(\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{F}_i\right)\cdot\boldsymbol{z}^{\circ}$$

它可表示为

$$\dot{L}_Z=M_Z^{(e)} \tag{7.2.8}$$

这就是对轴 Oz 的动量矩定理,它表明系统动量矩对时间的导数在轴 Oz 的投影等于外力矩在此方向的投影。

假设完整约束不依赖于时间,而非完整约束相对速度是齐次的,可以证明,动能的微分等于主动力的元功。实际上,在此情形下,实位移是虚位移之一,可取虚位移为实位移,即

$$\delta\boldsymbol{r}_i=\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i$$

将其代入原理(7.2.1),得到

$$\mathrm{d}T=\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{F}_i\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i \tag{7.2.9}$$

注意到,因为 d'Alembert-Lagrange 原理中消除了理想约束力,因此由原理导出的动量定理(7.2.7)和动量矩定理(7.2.8)中也没有理想约束力,是动力学普遍定理的特殊情形。动能定理的微分形式(7.2.9)也是特殊情形,在此情形下,理想约束力的实功也为零。

7.2.4 原理的直角坐标表达

原理(7.2.1)可写成直角坐标形式

$$\sum_{i=1}^{N}\{(F_{ix}-m_i\ddot{x}_i)\delta x_i+(F_{iy}-m_i\ddot{y}_i)\delta y_i+(F_{iz}-m_i\ddot{z}_i)\delta z_i\}=0 \tag{7.2.10}$$

它可表示为

$$\sum_{\mu=1}^{3N}(F_\mu-M_\mu\ddot{\xi}_\mu)\delta\xi_\mu=0 \tag{7.2.11}$$

其中

$$\xi_1=x_1,\xi_2=y_1,\xi_3=z_1,\cdots,\xi_{3N-2}=x_N,\xi_{3N-1}=y_N,\xi_{3N}=z_N,$$
$$F_1=F_{1x},F_2=F_{1y},F_3=F_{1z},\cdots,F_{3N-2}=F_{Nx},F_{3N-1}=F_{Ny},F_{3N}=F_{Nz},$$
$$M_1=M_2=M_3=m_1,\cdots,M_{3N-2}=M_{3N-1}=M_{3N}=m_N$$

如果 $\xi_\mu(\mu=1,2,\cdots,3N)$不是彼此独立的，而受有双面理想约束

$$f_\alpha(\xi_\mu,t)=0 \qquad (\alpha=1,2,\cdots,d) \tag{7.2.12}$$

约束(7.2.12)加在虚位移 $\delta\xi_\mu$ 上的限制为

$$\sum_{\mu=1}^{3N}\frac{\partial f_\alpha}{\partial\xi_\mu}\delta\xi_\mu=0 \qquad (\alpha=1,2,\cdots,d) \tag{7.2.13}$$

利用类似于§5.4 中的 Lagrange 乘子法，由原理(7.2.11)和式(7.2.13)，得到带乘子的方程

$$F_\mu-M_\mu\ddot{\xi}_\mu+\sum_{\alpha=1}^{d}\lambda_\alpha\frac{\partial f_\alpha}{\partial\xi_\mu}=0 \qquad (\mu=1,2,\cdots,3N) \tag{7.2.14}$$

方程(7.2.14)联合约束方程(7.2.12)，便可研究系统的运动，并可求得理想约束力，因为带乘子 λ_α 的项就是约束力。

§7.3 d'Alembert-Lagrange 原理的广义坐标表达

本节讨论 d'Alembert-Lagrange 原理的广义坐标表达，包括 Euler-Lagrange形式、Nielsen 形式，以及 Appell 形式等。

7.3.1 Euler-Lagrange 形式

假设系统的位形由 n 个广义坐标 $q_s(s=1,2,\cdots,n)$来确定，系统中第 i 个点的矢径 $\boldsymbol{r}_i$ 可表示为

$$\boldsymbol{r}_i=\boldsymbol{r}_i(q_s,t) \qquad (i=1,2,\cdots,N;s=1,2,\cdots,n) \tag{7.3.1}$$

点的速度表示为

$$\boldsymbol{v}_i=\dot{\boldsymbol{r}}_i=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_s}\dot{q}_s+\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial t} \tag{7.3.2}$$

点的加速度表示为

$$\boldsymbol{a}_i=\dot{\boldsymbol{v}}_i=\ddot{\boldsymbol{r}}_i=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_s}\ddot{q}_s+\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2\boldsymbol{r}_i}{\partial q_s\partial q_k}\dot{q}_s\dot{q}_k+2\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial^2\boldsymbol{r}_i}{\partial q_s\partial t}\dot{q}_s+\frac{\partial^2\boldsymbol{r}_i}{\partial t^2} \tag{7.3.3}$$

由式(7.3.1)和(7.3.2),可得到两个经典 Lagrange 关系

$$\frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial \dot{q}_s}=\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_s},\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_s}=\frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial q_s} \tag{7.3.4}$$

引进动能

$$T=\frac{1}{2}\sum m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\dot{\boldsymbol{r}}_i$$

做计算

$$\frac{\partial T}{\partial q_s}=\sum_{i=1}^{N}m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial q_s}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}=\sum_{i=1}^{N}m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial \dot{q}_s}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}=\sum_{i=1}^{N}m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial \dot{q}_s}+\sum_{i=1}^{N}m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial \dot{q}_s}$$

利用关系(7.3.4),得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial T}{\partial q_s}=\sum_{i=1}^{N}m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_s} \tag{7.3.5}$$

考虑到

$$\delta\boldsymbol{r}_i=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_s}\delta q_s \tag{7.3.6}$$

以及广义力

$$Q_s=\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{F}_i\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_s} \tag{7.3.7}$$

则 d'Alembert-Lagrange 原理(7.2.1)给出

$$\sum_{s=1}^{n}\left(Q_s-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}+\frac{\partial T}{\partial q_s}\right)\delta q_s=0 \tag{7.3.8}$$

这就是 d'Alembert-Lagrange 原理的 **Euler-Lagrange 形式。**

7.3.2 Nielsen 形式

引进动能对时间的导数 $\dot{T}$[10],有

$$\dot{T}=\sum m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\dot{\boldsymbol{r}}_i \tag{7.3.9}$$

于是有

$$\frac{\partial \dot{T}}{\partial \dot{q}_s}=\sum_{i=1}^{N}m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\frac{\partial \ddot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial \dot{q}_s}+\sum_{i=1}^{N}m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial \dot{q}_s}$$

由式(7.3.3),容易得到

$$\frac{\partial \ddot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial \dot{q}_s}=2\frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial q_s} \tag{7.3.10}$$

它可称为**经典 Nielsen 关系**[11]。考虑到式(7.3.4),则有

$$\frac{\partial \dot{T}}{\partial \dot{q}_s}-2\frac{\partial T}{\partial q_s}=\sum_{i=1}^{N}m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_s}\tag{7.3.11}$$

将式(7.3.11)代入 d'Alembert-Lagrange 原理(7.2.1),得到

$$\sum_{s=1}^{n}\left(Q_s-\frac{\partial \dot{T}}{\partial \dot{q}_s}+2\frac{\partial T}{\partial q_s}\right)\delta q_s=0\tag{7.3.12}$$

这就是 d'Alembert-Lagrange 原理的 **Nielsen 形式**。

7.3.3 Appell 形式

引进**加速度能**[9]

$$S=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\ddot{\boldsymbol{r}}_i\tag{7.3.13}$$

则有

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_s}=\sum_{i=1}^{N}m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\frac{\partial \ddot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial \ddot{q}_s}$$

由式(7.3.3)得

$$\frac{\partial \ddot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial \ddot{q}_s}=\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_s}\tag{7.3.14}$$

于是有

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_s}=\sum_{i=1}^{N}m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_s}\tag{7.3.15}$$

将式(7.3.15)代入 d'Alembert-Lagrange 原理(7.2.1),得到

$$\sum_{s=1}^{n}\left(Q_s-\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_s}\right)\delta q_s=0\tag{7.3.16}$$

这就是 d'Alembert-Lagrange 原理的 **Appell 形式**。

取二阶函数[9]

$$R=S-\sum_{s=1}^{n}Q_s\ddot{q}_s\tag{7.3.17}$$

假设广义力 Q_s 不依赖于广义加速度,则原理(7.3.16)可表示为

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial R}{\partial \ddot{q}_s}\delta q_s=0\tag{7.3.18}$$

函数 S 称为 Gibbs-Appell 函数,简称 **Appell 函数**,1901 年,Saint-Germain 称其为加速度能[12]。

d'Alembert-Lagrange 原理,又称为动力学普遍方程,它是分析动力学的基础。原理在广义坐标下表达的三种形式(7.3.8),(7.3.12),(7.3.16)的前提是,约束是双面理想的,不论约束是否定常,也不论约束是否完整,都是对的。

例 1 给定两直线 AO 和 BO，放在铅垂面内与水平成角 α 和 β，如图 7.1 所示。重质点 m_1，m_2，m_3 和 m_4 无摩擦地沿直线滑动，彼此用不可伸长的无重软绳相连，并在点 O 跨过无限小滑轮。需确定系统的运动。

解：令 Om_1 为 x，各质点惯性力为

$$-m_i\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\qquad(i=1,2,3,4)$$

因为各点位移一样。惯性力的虚功之和为

$$-m_1\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}-m_2\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}-m_3\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}-m_4\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$$

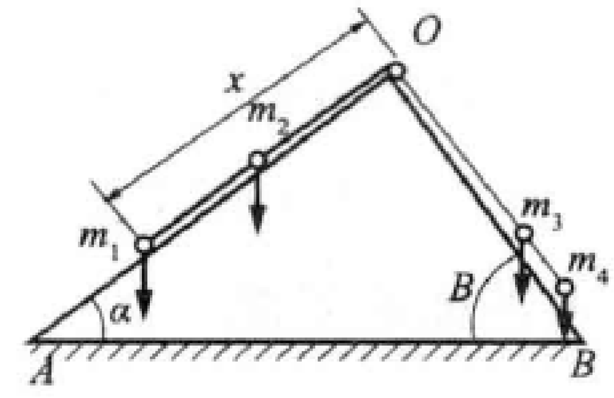


图 7.1

而重力的虚功之和为

$$m_1g\sin\alpha\delta x+m_2g\sin\alpha\delta x-m_3g\sin\beta\delta x-m_4g\sin\beta\delta x$$

d'Alembert-Lagrange 原理(7.2.10)给出

$$(m_1g\sin\alpha-m_1\ddot{x}+m_2g\sin\alpha-m_2\ddot{x}-m_3g\sin\beta-m_3\ddot{x}-m_4g\sin\beta-m_4\ddot{x})\delta x=0$$

因 $\delta x\neq0$，得到

$$\ddot{x}(m_1+m_2+m_3+m_4)=(m_1+m_2)g\sin\alpha-(m_3+m_4)g\sin\beta$$

由此知，系统的加速度 $\ddot{x}$ 是常数，因此运动是匀加速的。如果

$$(m_1+m_2)g\sin\alpha-(m_3+m_4)g\sin\beta=0$$

则运动是匀速的。当其中一个点越过点 O 时，方程应改变。

例 2 一质量为 m 的质点，在重力作用下沿铅垂面内光滑曲线 $y=ax^2(a>0)$ 运动。试证：系统的机械能守恒。

证明：约束 $y=ax^2$ 是双面理想且不依赖于时间的，此时动能定理中不出现约束力的功，有形式(7.2.9)，即

$$\mathrm{d}T=\sum\boldsymbol{F}_i\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i=-mg\,\mathrm{d}y$$

或表示为

$$\mathrm{d}(T+mgy)=0$$

由此得到

$$T+mgy=\text{const.}$$

例 3 一质量为 m 的质点，在重力作用下沿铅垂面内光滑直线 $y=kx(k=\text{const.})$ 上运动，试求所受理想约束力。

解：方程(7.2.14)给出

$$-m\ddot{x}-\lambda k=0$$

$$-mg-m\ddot{y}+\lambda=0$$

注意到

$$\ddot{y}=k\ddot{x}$$

可求得

$$\lambda=\frac{mg}{1+k^2}$$

这就是理想约束力在 y 轴上投影，而在 x 轴上投影为

$$-\lambda k=-\frac{mgk}{1+k^2}$$

以上各例是 d'Alembert-Lagrange 原理对简单问题的直接应用。对复杂力学系统动力学问题可直接应用其广义坐标形式导出的运动微分方程。

思考题

7.1 d'Alembert 原理有如下表述：

1)d'Alembert 原理……又称为动静法；

2)不论 d'Alembert 本人作何解释，等式两边只是一种数值关系，其结果与 Newton 运动方程中把 $m_i\boldsymbol{a}_i$ 移项完全相同。

以上两种表述是否正确？

7.2 d'Alembert-Lagrange 原理的前提表述为"在理想约束的条件下"或"受理想约束的质点系"，是否准确？

7.3 将 d'Alembert-Lagrange 原理表示为

$$\sum_{i=1}^{N}(-m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i+\boldsymbol{F}_i+\boldsymbol{F}_{Ni})\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=0$$

能导出动能定理吗？

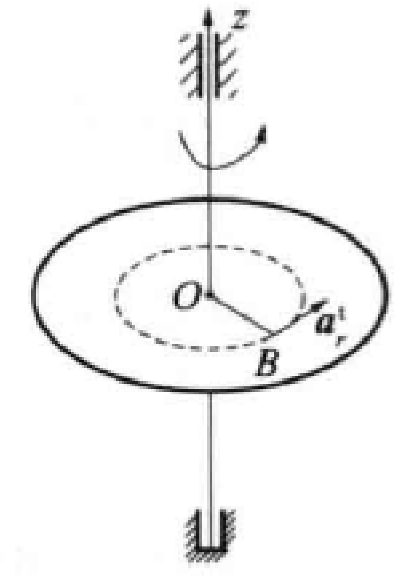
7.4 文献[13]指出，动力学普遍方程包含了给定的带理想双面约束的系统在给定主动力作用下运动的全部信息。应怎样理解？

习题

7.1 如图所示，一圆形水平平台可绕通过其重心 O 的铅垂轴 Oz 无摩擦地转动。重为 Q 的人 B，在平台上沿以 O 为中心，半径为 r 的圆周，相对平台以切向加速度 $a_r^t=b$(b 为常数)而运动。将平台当作重为 P 半径为 R 的均质圆盘，

试确定平台的角加速度 α。

答：$\alpha=-\dfrac{2Qbr}{PR^2+2Qr^2}$



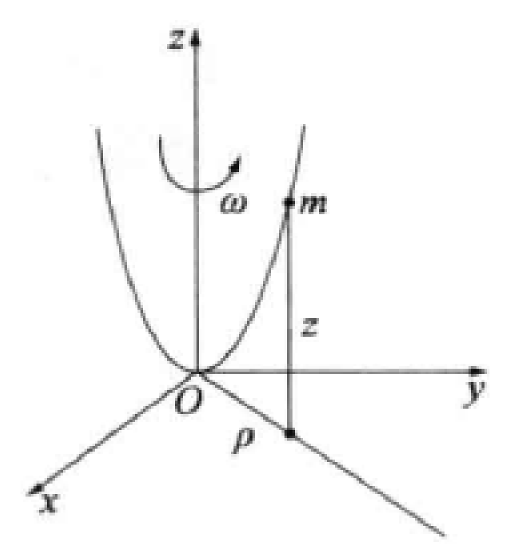
题 7.1 图

7.2 如图所示，质量为 m 的小珠串在光滑铁丝上。铁丝的形状是一抛物线，在平面 $O\rho z$ 中的方程为 $\rho^2=2az$（a 为常数）。铁丝以匀角速度 ω 绕铅垂轴 Oz 转动，试用动力学普遍方程列写质点的运动微分方程。

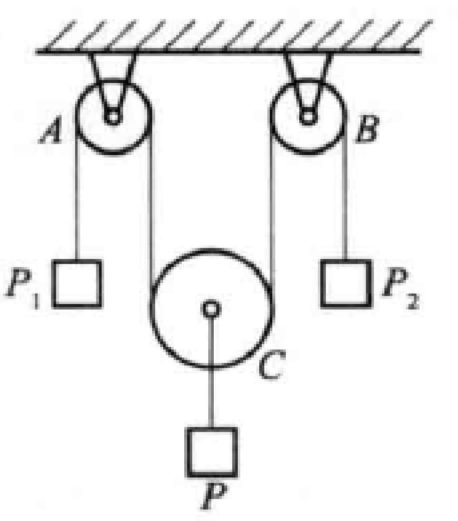
答：$(a^2+\rho^2)\ddot{\rho}+\rho\dot{\rho}^2+a\rho(g-a\omega^2)=0$

7.3 如图所示，已知 $P_1=20$ N，$P_2=30$ N，$P=40$ N，滑轮及绳重及轴上摩擦均不计。试求三个重物的加速度。

答：$a=\dfrac{1}{11}g(\uparrow)$，$a_1=\dfrac{1}{11}g(\uparrow)$，$a_2=\dfrac{3}{11}g(\downarrow)$



题 7.2 图



题 7.3 图

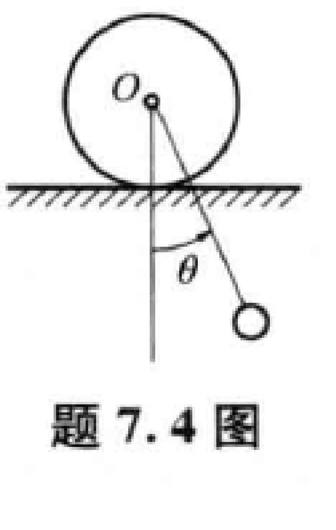
7.4 一重 P_1 的单摆，其支点固定在一圆轮中心 O。圆轮重 P_2，放在水平面上，圆轮与平面间有足够的摩擦力阻止滑动。设圆轮可当作均质圆盘。求在图示位置无初速地开始运动时轮心的加速度。

答：$a=\dfrac{P_1\sin 2\theta}{3P_2+2P_1\sin^2\theta}g$

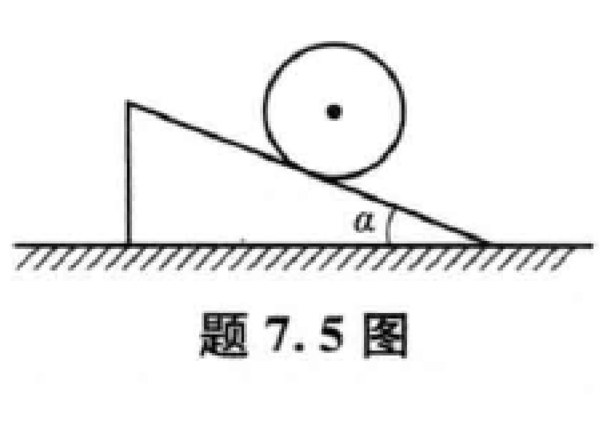
7.5 一重 P_1 的斜面置于光滑水平面上，在斜面上放一半径为 r 重为 P_2 的均质圆柱，如图所示。圆柱只能在斜面上滚动，不计滚阻摩擦。求圆柱中心相对斜面的加速度 $\boldsymbol{a}_r$ 以及斜面运动的加速度 $\boldsymbol{a}$。

答：$a_r=\dfrac{2(P_1+P_2)\sin\alpha}{3(P_1+P_2)-2P_2\cos^2\alpha}g$

$a=\dfrac{P_2\sin 2\alpha}{3(P_1+P_2)-2P_2\cos^2\alpha}g$



题 7.4 图



题 7.5 图

7.6 一质量为 m 的质点在重力作用下在铅垂面内运动，所受理想约束为 $\dot{y}=t\dot{x}$（Oy 向上为正，Ox 水平向右）。试用动力学普遍方程列写问题的微分方程，并证明机械能守恒。

参考文献

[1]d'Alembert Jean. Traité de Dynamique[M]. Paris:Jacques Gabay,1990.

[2]Lagrange JL. Mécanique Analytique[M]. Vol 1 Quatrièm Éd. Paris:Jacques Gabay,2006.

[3]Моисеев НД. Очерки Развития Механики[M]. Москва:Изд Моск Унив,1961.

[4]СусловГК. Теоретическая Механика[M]. Москва:Гостехиздат,1946.

[5]朱照宣,周起钊,殷金生. 理论力学[M]. 下册. 北京:北京大学出版社,1982.

[6]Rosenberg RM. ,Analytical Dynamics of Discrete Systems[M]. New York: Pleum Press,1977.

[7]Hamel G. Theoretische Mechanik[M]. Berlin:Springer-Verlag,1949.

[8]蒲赫哥尔茨 HH. 理论力学基本教程[M]. 下册. 钱尚武,钱敏,译. 北京:高等教育出版社,1957.

[9] Appell P. Traité de Mécanique Rationnelle [M]. Tome Ⅱ, Sixième Éd. Paris:Gauthier-Villars,1953.

[10]Nielsen J. Vorlesungen Über Elementare Mechanik[M]. Berlin:Springer-Verlag,1935.

[11]梅凤翔,刘端,罗勇. 高等分析力学[M]. 北京:北京理工大学出版社,1991.

[12]Papastavridis JG. Analytical Mechanics[M]. New York:Oxford Univ. Press,2002.

[13]马尔契夫 АП. 理论力学[M]. 李俊峰,译. 北京:高等教育出版社,2006.

8

Lagrange 方程

本章讨论 Lagrange 方程，包括 Lagrange 方程的由来、Lagrange 方程的导出、Lagrange 方程的结构、有势力情形的 Lagrange 方程、Lagrange 方程的经典积分及降阶法、变量可分离的 Lagrange 方程和 Liouville 方程等。

§8.1 Lagrange 方程的由来

第一类 Lagrange 方程和**第二类Lagrange方程**的现代形式，出现在 Lagrange 原著的注记中。

8.1.1 第一类 Lagrange 方程

Lagrange 的著作中并未明显地给出 Lagrange 方程的现代形式，仅在 Lagrange著作第一卷注记 6 中给出第一类 Lagrange 方程[1]

$$
\begin{aligned}
m_i\frac{\mathrm{d}^2x_i}{\mathrm{d}t^2}&=X_i+\lambda_1\frac{\partial\Pi_1}{\partial x_i}+\lambda_2\frac{\partial\Pi_2}{\partial x_i}+\cdots+\lambda_{3n-k}\frac{\partial\Pi_{3n-k}}{\partial x_i}\\
m_i\frac{\mathrm{d}^2y_i}{\mathrm{d}t^2}&=Y_i+\lambda_1\frac{\partial\Pi_1}{\partial y_i}+\lambda_2\frac{\partial\Pi_2}{\partial y_i}+\cdots+\lambda_{3n-k}\frac{\partial\Pi_{3n-k}}{\partial y_i}\\
m_i\frac{\mathrm{d}^2z_i}{\mathrm{d}t^2}&=Z_i+\lambda_1\frac{\partial\Pi_1}{\partial z_i}+\lambda_2\frac{\partial\Pi_2}{\partial z_i}+\cdots+\lambda_{3n-k}\frac{\partial\Pi_{3n-k}}{\partial z_i}
\end{aligned}
\tag{8.1.1}
$$

其中

$$\Pi_1=0,\Pi_2=0,\cdots,\Pi_{3n-k}=0$$

为约束方程，而 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_{3n-k}$ 为待定乘子。

8.1.2 第二类 Lagrange 方程

在 Lagrange 著作第一卷注记 6 中还给出第二类 Lagrange 方程[1]

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial q_1'}-\frac{\partial T}{\partial q_1}=Q_1\\&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial q_2'}-\frac{\partial T}{\partial q_2}=Q_2\\&\cdots\\&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial q_k'}-\frac{\partial T}{\partial q_k}=Q_k\end{aligned}\tag{8.1.2}$$

其中 T 为系统动能，$Q_1,Q_2,\cdots,Q_k$ 为广义力，而 $\boldsymbol{q}'=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}}{\mathrm{d}t}$。

公式(8.1.1)和(8.1.2)是法国数学家、巴黎科学院院士 Bertrand JLF (1822—1900)在 Lagrange 著作第一卷注记 6 中给出的。这样，就把 Lagrange 的思想表达得更明显了。

§8.2 Lagrange 方程的导出

d'Alembert-Lagrange 原理是分析动力学的基本原理，由这个原理出发可以导出第一类 Lagrange 方程和第二类 Lagrange 方程。

8.2.1 第二类 Lagrange 方程的导出

d'Alembert-Lagrange 原理的 Euler-Lagrange 形式为式(7.3.8)，即

$$\sum_{s=1}^{n}\left(Q_s-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}+\frac{\partial T}{\partial q_s}\right)\delta q_s=0\tag{8.2.1}$$

对于完整约束系统，坐标 $q_s(s=1,2,\cdots,n)$是彼此独立的，因此，变分 $\delta q_s(s=1,2,\cdots,n)$也是彼此独立的，那么原理(8.2.1)中 δq_s 的系数都应为零，于是有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial T}{\partial q_s}=Q_s\qquad(s=1,2,\cdots,n)\tag{8.2.2}$$

这就是第二类 Lagrange 方程。第二类 Lagrange 方程(8.2.2)是对具有双面理想完整约束的力学系统建立的方程，不论约束是否定常，也不论力是否保守。

8.2.2 第一类 Lagrange 方程的导出

如果系统所受双面理想约束表示为直角坐标形式(7.2.12)，即

$$f_\alpha(\xi_\mu,t)=0\qquad(\alpha=1,2,\cdots,d)\tag{8.2.3}$$

则由 Lagrange 乘子法可得到方程(7.2.14)，即

$$F_\mu-M_\mu\ddot{\xi}_\mu+\sum_{\alpha=1}^{d}\lambda_\alpha\frac{\partial f_\alpha}{\partial \xi_\mu}=0\qquad(\mu=1,2,\cdots,3N)\tag{8.2.4}$$

其中

$$\xi_1=x_1,\xi_2=y_1,\xi_3=z_1,\cdots,\xi_{3N-2}=x_N,\xi_{3N-1}=y_N,\xi_{3N}=z_N,$$
$$F_1=F_{1x},F_2=F_{1y},F_3=F_{1z},\cdots,F_{3N-2}=F_{Nx},F_{3N-1}=F_{Ny},F_{3N}=F_{Nz},$$
$$M_1=M_2=M_3=m_1,\cdots,M_{3N-2}=M_{3N-1}=M_{3N}=m_N$$

方程(8.2.4)就是第一类 Lagrange 方程,它与约束方程(8.2.3)联合,便可求解运动。同时,也可求解约束力,因为带乘子 λ_α 的项就是约束力。

假设完整系统的位形由 n 个广义坐标 $q_s(s=1,2,\cdots,n)$ 来确定。为方便计算,可选 m 个多余坐标 $q_{n+1},q_{n+2},\cdots,q_{n+m}$,并有 m 个双面理想完整约束

$$f_\gamma(q_s,q_{n+\beta},t)=0 \qquad (s=1,2,\cdots,n;\gamma,\beta=1,2,\cdots,m) \tag{8.2.5}$$

约束(8.2.5)加在坐标变分上的限制为

$$\sum_{u=1}^{n+m}\frac{\partial f_\gamma}{\partial q_u}\delta q_u=0 \qquad (\gamma=1,2,\cdots,m) \tag{8.2.6}$$

d'Alembert-Lagrange 原理可表示为

$$\sum_{u=1}^{n+m}\left(Q_u-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_u}+\frac{\partial T}{\partial q_u}\right)\delta q_u=0 \tag{8.2.7}$$

由原理(8.2.7)和虚位移方程(8.2.6),利用 Lagrange 乘子法,可得到方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_u}-\frac{\partial T}{\partial q_u}=Q_u+\sum_{\gamma=1}^{m}\lambda_\gamma\frac{\partial f_\gamma}{\partial q_u} \qquad (u=1,2,\cdots,n+m) \tag{8.2.8}$$

这就是有多余坐标完整系统的运动微分方程,其实也是第一类 Lagrange 方程。方程(8.2.8)联合方程(8.2.5),不仅可求解系统的运动,还可求解系统所受的双面理想约束力。

§8.3 Lagrange 方程的结构

Lagrange 方程(8.2.2),实质上是建立系统以广义坐标表示运动的动力学微分方程的法则。如果完成方程(8.2.2)中所指出的对动能的全部运算,以及按照问题的条件计算出广义力的表达式,那么就可列出运动微分方程。因此,方程的最终形式决定于系统动能对广义坐标和广义速度的依赖关系,决定于作用于系统的主动力。

8.3.1 系统动能的结构

1)动能表示为广义速度的二次式、一次式和零次式

由 N 个质点组成的质点系的动能可表示为

$$T=T_2+T_1+T_0 \tag{8.3.1}$$

其中

$$\begin{aligned}
T_2&=\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}A_{sk}\dot{q}_s\dot{q}_k,\quad A_{sk}=\sum_{i=1}^{N}m_i\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_s}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k}\\
T_1&=\sum_{s=1}^{n}B_s\dot{q}_s,\quad B_s=\sum_{i=1}^{N}m_i\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_s}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t}\\
T_0&=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}m_i\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t}
\end{aligned} \tag{8.3.2}$$

这样，系统的动能分为三部分：广义速度的二次式 T_2、广义速度的一次式 T_1，以及广义速度的零次式 T_0。

将力学系统按定常和非定常的特征分类，这种分类对研究有重要意义。首先，如果加在系统的约束是非定常的，则直角坐标用广义坐标表示的公式明显地包含时间 t。此时，动能中全部的三项 T_2，T_1 和 T_0 都包含时间，这样的系统称为完全非定常系统。其次，如果在直角坐标中是非定常的，但在广义坐标中不显含 t，这样的系统称为半非定常系统，此时动能 T 包含三项，但每项都不含 t。最后，如果在直角坐标和广义坐标中都不包含时间 t，则 $T=T_2$，$T_1=T_0=0$，这样的系统称为**完全定常系统**。

2）动能的各种表达式

质点的动能为

$$T=\frac{1}{2}mv^2$$

质点系的动能为

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}m_iv_i^2$$

（1）质点系在复合运动中的动能。

将力学系统的运动分解为随系统质心 C 的平移以及相对于同质心一起平移的动坐标系的转动，则动能表示为

$$T=\frac{1}{2}Mv_C^2+T_C^{(r)} \tag{8.3.3}$$

其中

$$M=\sum_{i=1}^{N}m_i,\ T_C^{(r)}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}m_iv_{ir}^2$$

公式(8.3.3)称为**柯尼希(König)定理**：质点系在绝对运动中的动能等于质量全部集中在质心所具有的动能$\frac{1}{2}Mv_C^2$，加上相对于质心的动能 $T_C^{(r)}$。

（2）刚体的动能。

刚体做平移的动能为

$$T=\frac{1}{2}Mv^2$$

其中 M 为刚体的总质量；v 为刚体平移的速度。刚体做定轴转动的动能为

$$T=\frac{1}{2}J_z\omega^2$$

其中 J_z 为刚体对转动轴的转动惯量；ω 为刚体转动的角速度。刚体做平面运动的动能为

$$T=\frac{1}{2}Mv_C^2+\frac{1}{2}J_{Cz}\omega^2 \tag{8.3.4}$$

其中 J_{Cz} 为刚体对过质心 C 并垂直于平面图形的轴的转动惯量。刚体做定点运动的动能为

$$T=\frac{1}{2}(J_x\omega_x^2+J_y\omega_y^2+J_z\omega_z^2-2J_{xy}\omega_x\omega_y-2J_{yz}\omega_y\omega_z-2J_{zx}\omega_z\omega_x)$$

其中 J_x, J_y, J_z 分别为对轴 x, y, z 的转动惯量；J_{xy}, J_{yz}, J_{zx} 为惯性积。当连体坐标系为刚体的主轴坐标系时，上式简化为

$$T=\frac{1}{2}(J_x\omega_x^2+J_y\omega_y^2+J_z\omega_z^2) \tag{8.3.5}$$

刚体做一般运动的动能为

$$T=\frac{1}{2}Mv_C^2+\frac{1}{2}(J_x\omega_x^2+J_y\omega_y^2+J_z\omega_z^2-2J_{xy}\omega_x\omega_y-2J_{yz}\omega_y\omega_z-2J_{zx}\omega_z\omega_x)$$

即质量集中在质心所具有的动能加上绕质心转动的动能。

例 1 质量为 m 的质点无摩擦地在一平面 Π 上运动，平面 Π 通过一固定直线 Oz，它与铅垂线夹角为常值 α。平面 Π 以常角速度 ω 绕线 Oz 转动，如图 8.1 所示。试求质点的动能*。

解：取固定直角坐标系 $Oxyz$，使轴 Oz 为固定直线，平面 Oxz 为铅垂平面，轴 Ox 为水平。在平面 Π 与平面 Oxy 交线上取一正的指向 OR，取 OR 与 Ox 夹角为 θ，令 $t=0$ 时，$\theta=0$，于是 $\theta=\omega t$。平面 Π 的方程为

$$y=x\tan\omega t$$

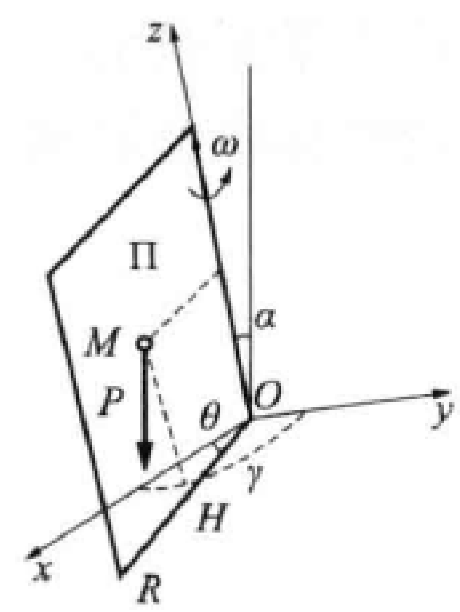


图 8.1

可见，约束是非定常的。质点运动有两个自由度。由点 M 平行于轴 Oz 投影到平面 Oxy 上得点 H，记作 $\overline{OH}=r$。因此，由 r, z 便可确定点 M 的位置。点的直角坐标用 r, z 表示为

$$x=r\cos\theta=r\cos\omega t$$
$$y=r\sin\theta=r\sin\omega t$$
$$z=z$$

对时间 t 求导数，得

* 取自胡助(1894—1977)教授 1963 年北京工业学院的油印讲义《分析力学》。

$$\dot{x}=\dot{r}\cos\omega t-r\omega\sin\omega t$$
$$\dot{y}=\dot{r}\sin\omega t+r\omega\cos\omega t$$
$$\dot{z}=\dot{z}$$

因此

$$\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2=\dot{r}^2+r^2\omega^2+\dot{z}^2$$

动能为

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\omega^2+\dot{z}^2)$$

系统为半非定常系统。

例 2 一系统由两个长为 l_1 和 l_2 的均质杆组成，长 l_1 的杆 OA 的 O 端固定，另一端 A 与第二杆 AB 光滑铰接，如图 8.2 所示。两杆的质量为 m_1 和 m_2。试求系统在铅垂平面内运动时的动能。

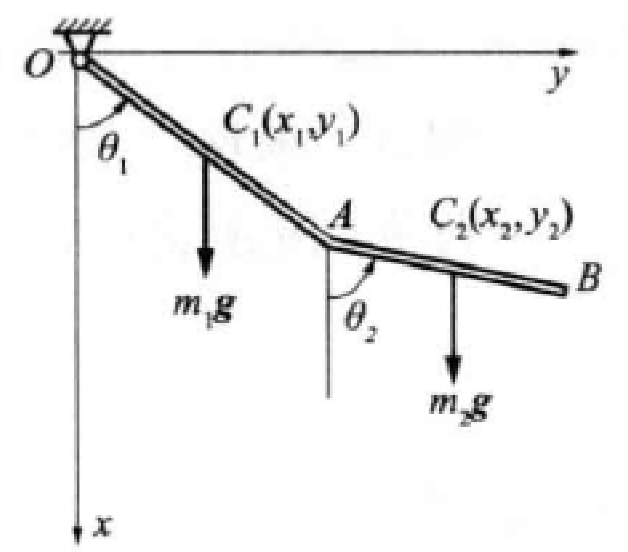


图 8.2

解：系统由两个刚体组成，长 l_1 的杆做定轴转动，长 l_2 的杆做平面运动。系统有两个自由度，取两杆与铅垂线的夹角 θ_1 和 θ_2 为广义坐标。两杆质心坐标为 $C_1(x_1, y_1)$ 和 $C_2(x_2, y_2)$，有

$$x_2=l_1\cos\theta_1+\frac{1}{2}l_2\cos\theta_2, y_2=l_1\sin\theta_1+\frac{1}{2}l_2\sin\theta_2$$

$$\dot{x}_2=-l_1\dot{\theta}_1\sin\theta_1-\frac{1}{2}l_2\dot{\theta}_2\sin\theta_2, \dot{y}_2=l_1\dot{\theta}_1\cos\theta_1+\frac{1}{2}l_2\dot{\theta}_2\cos\theta_2$$

于是

$$\dot{x}_2^2+\dot{y}_2^2=l_1^2\dot{\theta}_1^2+\frac{1}{4}l_2^2\dot{\theta}_2^2+l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_2-\theta_1)$$

杆 OA 的动能为

$$T_1=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}m_1l_1^2\right)\dot{\theta}_1^2$$

杆 AB 的动能为

$$T_2=\frac{1}{2}m_2\left[l_1^2\dot{\theta}_1^2+\frac{1}{4}l_2^2\dot{\theta}_2^2+l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_2-\theta_1)\right]+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{12}m_2l_2^2\right)\dot{\theta}_2^2$$

系统动能为

$$T=T_1+T_2$$

系统为完全定常系统。

8.3.2 广义力的计算

应用 Lagrange 方程组建力学系统的运动微分方程，除需计算动能外，尚需计算**广义力**。广义力可按定义计算，即按式(7.3.7)，有

$$Q_s = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_s} = \sum_{i=1}^{N} \left(F_{ix} \frac{\partial x_i}{\partial q_s} + F_{iy} \frac{\partial y_i}{\partial q_s} + F_{iz} \frac{\partial z_i}{\partial q_s} \right) \tag{8.3.6}$$

为计算广义力，也常用求虚功的方法。因广义坐标 $q_1, q_2, \cdots, q_n$ 是彼此独立的，故可取一组特殊的虚位移，令 $\delta q_k \neq 0$，其余 $\delta q_s = 0 (s \neq k)$，这时虚功为

$$\delta W = \delta W_k = Q_k \delta q_k$$

于是求得

$$Q_k = \frac{\delta W}{\delta q_k} \tag{8.3.7}$$

例 3 求例 2 中的广义力。

首先，按定义(8.3.6)来求广义力。两杆重力投影分别为

$$F_{1x} = m_1 g, F_{2x} = m_2 g$$
$$F_{1y} = 0, F_{2y} = 0$$

注意到

$$x_1 = \frac{l_1}{2}\cos\theta_1, y_1 = \frac{l_1}{2}\sin\theta_1$$

$$x_2 = l_1\cos\theta_1 + \frac{l_2}{2}\cos\theta_2, y_2 = l_1\sin\theta_1 + \frac{l_2}{2}\sin\theta_2$$

得

$$\frac{\partial x_1}{\partial \theta_1} = -\frac{l_1}{2}\sin\theta_1, \frac{\partial y_1}{\partial \theta_1} = \frac{l_1}{2}\cos\theta_1$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial \theta_2} = 0, \frac{\partial y_1}{\partial \theta_2} = 0$$

$$\frac{\partial x_2}{\partial \theta_1} = -l_1\sin\theta_1, \frac{\partial y_2}{\partial \theta_1} = l_1\cos\theta_1$$

$$\frac{\partial x_2}{\partial \theta_2} = -\frac{l_2}{2}\sin\theta_2, \frac{\partial y_2}{\partial \theta_2} = \frac{l_2}{2}\cos\theta_2$$

于是有

$$\begin{aligned} Q_1 &= F_{1x}\frac{\partial x_1}{\partial \theta_1} + F_{1y}\frac{\partial y_1}{\partial \theta_1} + F_{2x}\frac{\partial x_2}{\partial \theta_1} + F_{2y}\frac{\partial y_2}{\partial \theta_1} \\ &= -\left(\frac{1}{2}m_1 + m_2\right) g l_1 \sin\theta_1 \end{aligned}$$

$$Q_2 = F_{1x}\frac{\partial x_1}{\partial \theta_2} + F_{1y}\frac{\partial y_1}{\partial \theta_2} + F_{2x}\frac{\partial x_2}{\partial \theta_2} + F_{2y}\frac{\partial y_2}{\partial \theta_2}$$

$$= -\frac{1}{2}m_2 g l_2 \sin\theta_2$$

其次,用求虚功的方法计算广义力。现给一虚位移 $\delta\theta_2 \neq 0, \delta\theta_1 = 0$,则力 $m_1\boldsymbol{g}$ 不做虚功,仅 $m_2\boldsymbol{g}$ 做虚功

$$\delta W_2 = -\frac{1}{2}m_2 g l_2 \sin\theta_2 \delta\theta_2$$

于是有

$$Q_2 = \frac{\delta W_2}{\delta\theta_2} = -\frac{1}{2}m_2 g l_2 \sin\theta_2$$

再给一虚位移 $\delta\theta_1 \neq 0, \delta\theta_2 = 0$,则 $m_1\boldsymbol{g}$ 和 $m_2\boldsymbol{g}$ 都做虚功

$$\delta W_1 = -\frac{1}{2}m_1 g l_1 \sin\theta_1 \delta\theta_1 - m_1 g l_1 \sin\theta_1 \delta\theta_1$$

$$= -\left(\frac{1}{2}m_1 + m_2\right) g l_1 \sin\theta_1 \delta\theta_1$$

于是有

$$Q_1 = \frac{\delta W_1}{\delta\theta_1} = -\left(\frac{1}{2}m_1 + m_2\right) g l_1 \sin\theta_1$$

8.3.3 Lagrange 方程的显式

引入 Euler 算子

$$\mathrm{E}_s = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial}{\partial q_s} \tag{8.3.8}$$

则 Lagrange 方程(8.2.2)可表示为

$$\mathrm{E}_s(T) = Q_s$$

又

$$\mathrm{E}_s(T) = \mathrm{E}_s(T_2) + \mathrm{E}_s(T_1) + \mathrm{E}_s(T_0)$$

为求 Lagrange 方程的显式,分别计算 $\mathrm{E}_s(T_2)$,$\mathrm{E}_s(T_1)$和 $\mathrm{E}_s(T_0)$,有

$$\frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_s} = \sum_{k=1}^{n} A_{ks}\dot{q}_k$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_s} = \sum_{k=1}^{n} A_{ks}\ddot{q}_k + \sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}\frac{\partial A_{ks}}{\partial q_m}\dot{q}_m\dot{q}_k + \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial A_{ks}}{\partial t}\dot{q}_k$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial q_s} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}\frac{\partial A_{km}}{\partial q_s}\dot{q}_k\dot{q}_m$$

$$\mathrm{E}_s(T_2)=\sum_{k=1}^{n}A_{ks}\ddot{q}_k+\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}\left(\frac{\partial A_{ks}}{\partial q_m}-\frac{1}{2}\frac{\partial A_{km}}{\partial q_k}\right)\dot{q}_k\dot{q}_m+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial A_{ks}}{\partial t}\dot{q}_k$$

注意到

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}\frac{\partial A_{ks}}{\partial q_m}\dot{q}_k\dot{q}_m=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}\left(\frac{\partial A_{ks}}{\partial q_m}+\frac{\partial A_{ms}}{\partial q_k}\right)\dot{q}_k\dot{q}_m$$

这可由交换下标 k,m 得到。于是有

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}\left(\frac{\partial A_{ks}}{\partial q_m}-\frac{1}{2}\frac{\partial A_{km}}{\partial q_s}\right)\dot{q}_k\dot{q}_m=\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}[k,m;s]\dot{q}_k\dot{q}_m$$

其中量

$$[k,m;s]=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial A_{ks}}{\partial q_m}+\frac{\partial A_{ms}}{\partial q_k}-\frac{\partial A_{km}}{\partial q_s}\right) \tag{8.3.9}$$

是 T 的齐二次式 T_2 的系数矩阵的**第一类 Christoffel 记号**[2]。这样就有

$$\mathrm{E}_s(T_2)=\sum_{k=1}^{n}A_{ks}\ddot{q}_k+\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}[k,m;s]\dot{q}_k\dot{q}_m+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial A_{ks}}{\partial t}\dot{q}_k \tag{8.3.10}$$

类似地,求得

$$\mathrm{E}_s(T_1)=\frac{\partial B_s}{\partial t}-\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial B_k}{\partial q_s}-\frac{\partial B_s}{\partial q_k}\right)\dot{q}_k$$

量

$$\gamma_{sk}=-\gamma_{ks}=\frac{\partial B_k}{\partial q_s}-\frac{\partial B_s}{\partial q_k}$$

组成斜对称矩阵,γ_{sk} 称为**陀螺系数**,而表达式

$$\Gamma_s=\sum_{k=1}^{n}\gamma_{sk}\dot{q}_k \tag{8.3.11}$$

称为**广义陀螺力**,它的项 $\gamma_{sk}\dot{q}_k$ 为陀螺力。于是

$$\mathrm{E}_s(T_1)=\frac{\partial B_s}{\partial t}-\Gamma_s \tag{8.3.12}$$

将式(8.3.10),(8.3.12)代入 Lagrange 方程,得到显式

$$\sum_{k=1}^{n}A_{ks}\ddot{q}_k+\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}[k,m;s]\dot{q}_k\dot{q}_m=Q_s+\Gamma_s+\frac{\partial T_0}{\partial q_s}-\frac{\partial B_s}{\partial t}-\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial A_{ks}}{\partial t}\dot{q}_k$$
$$(s=1,2,\cdots,n) \tag{8.3.13}$$

如果 T 不明显依赖于 t,则显式(8.3.13)成为

$$\sum_{k=1}^{n}A_{ks}\ddot{q}_k+\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}[k,m;s]\dot{q}_k\dot{q}_m=Q_s+\Gamma_s+\frac{\partial T_0}{\partial q_s} \tag{8.3.14}$$

进而,如果 $T=T_2$,则有

$$\sum_{k=1}^{n}A_{ks}\ddot{q}_k+\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}[k,m;s]\dot{q}_k\dot{q}_m=Q_s \tag{8.3.15}$$

8.3.4 应用举例

应用 Lagrange 方程建立完整力学系统的运动微分方程,大致应遵循下述

步骤[3]：

(1)明确系统，弄清楚所论系统包括哪些物体，然后确定自由度，再选一套适当的广义坐标。坐标选得好，会使问题处理起来比较方便。

(2)将动能表示为广义坐标形式 $T=T(t,q_s,\dot{q}_s)$。

(3)计算广义力 Q_s。

(4)将 T,Q_s 代入 Lagrange 方程，得到 n 个二阶常微分方程，再由 $2n$ 个初始条件解出运动 $q_s=q_s(t)$。

例 4 一平台放在粗糙水平固定面上。在平台上放一圆柱。某瞬时在平台上加一常力 $\boldsymbol{F}$，此力通过平台重心在平台上的投影。假设圆柱沿平台无滑动地滚动，如图 8.3 所示。已知：平台重 P_1，圆柱重 P_2，半径为 R，平台与固定面之间的摩擦因数为 f_s。试确定系统的运动。

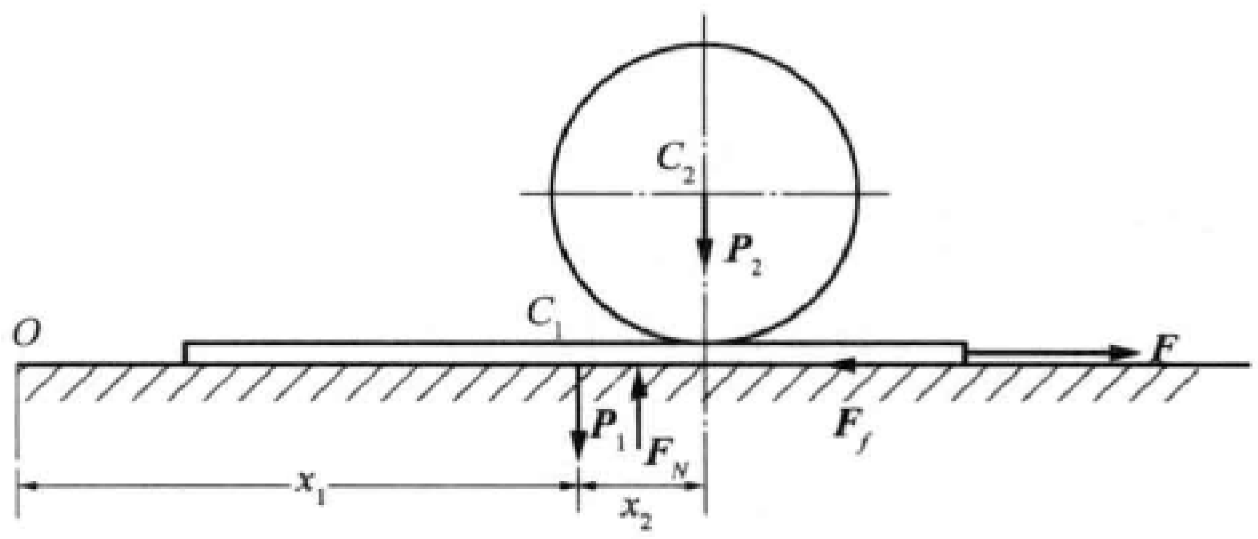


图 8.3

解：取圆柱和平台为对象。平台做平移运动，而圆柱在其上做无滑滚动。取平台重心坐标 x_1，圆柱重心相对于平台重心的坐标 x_2，以及圆柱沿平台滚动的转角 φ 为坐标。因圆柱对平台没有滑动，故两个坐标之间有关系 $x_2=R\varphi$。因此，系统有两个自由度，独立坐标可选为

$$q_1=x_1,\quad q_2=x_2$$

首先，计算系统的动能。平台做平移的动能为

$$T_1=\frac{1}{2}\frac{P_1}{g}\dot{x}_1^2$$

圆柱做平面运动的动能，等于质量集中在质心的动能加上相对质心转动的动能

$$\begin{aligned}T_2&=\frac{1}{2}\frac{P_2}{g}(\dot{x}_1+\dot{x}_2)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\frac{P_2}{g}R^2\right)\dot{\varphi}^2\\&=\frac{1}{2}\frac{P_2}{g}(\dot{x}_1+\dot{x}_2)^2+\frac{1}{4}\frac{P_2}{g}\dot{x}_2^2\end{aligned}$$

系统的动能为

$$T=T_1+T_2=\frac{P_1+P_2}{2g}\dot{x}_1^2+\frac{3}{4}\frac{P_2}{g}\dot{x}_2^2+\frac{P_2}{g}\dot{x}_1\dot{x}_2$$

其次,计算广义力。为求出广义力 Q_1,给系统特殊虚位移 $\delta x_1\neq 0$, $\delta x_2=0$,计算所有力的元功之和,并把摩擦力 $F_s=f_s(P_1+P_2)$ 当作主动力来处理,于是有

$$\delta W_1=(F-F_s)\delta x_1=[F-f_s(P_1+P_2)]\delta x_1$$

因此广义力为

$$Q_1=\frac{\delta W_1}{\delta x_1}=F-f_s(P_1+P_2)$$

为求出广义力 Q_2,再给系统特殊虚位移 $\delta x_1=0$, $\delta x_2\neq 0$。因圆柱沿平台做无滑滚动,圆柱与平台间的摩擦力不做功,故有

$$\delta W_2=0$$

于是广义力

$$Q_2=0$$

最后,列写系统的第二类 Lagrange 方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}-\frac{\partial T}{\partial x_1}=Q_1$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2}-\frac{\partial T}{\partial x_2}=Q_2$$

代入 T,Q_1,Q_2,得到

$$\frac{P_1+P_2}{g}\ddot{x}_1+\frac{P_2}{g}\ddot{x}_2=F-(P_1+P_2)f_s$$

$$\frac{P_2}{g}\ddot{x}_1+\frac{3}{2}\frac{P_2}{g}\ddot{x}_2=0$$

由此解得

$$\ddot{x}_1=\frac{3[F-(P_1+P_2)f_s]}{3P_1+P_2},\quad \ddot{x}_2=-\frac{2}{3}\ddot{x}_1$$

两个加速度都是常数。

例 5 质量分别为 m_1,m_2,m_3 的三个均质齿轮,如图 8.4 所示。给第一个齿轮以力矩 M_1,另两个轮上的反力矩的绝对值等于 M_2 和 M_3。求每个轮的角加速度以及每两轮之间的作用力。

解:取三个轮为研究对象,系统有一个自由度。选轮 1 转角为 φ_1,则轮 2 和轮 3 的转角分别为

$$\varphi_2=-\frac{r_1}{r_2}\varphi_1,\quad \varphi_3=\frac{r_1}{r_3}\varphi_1$$

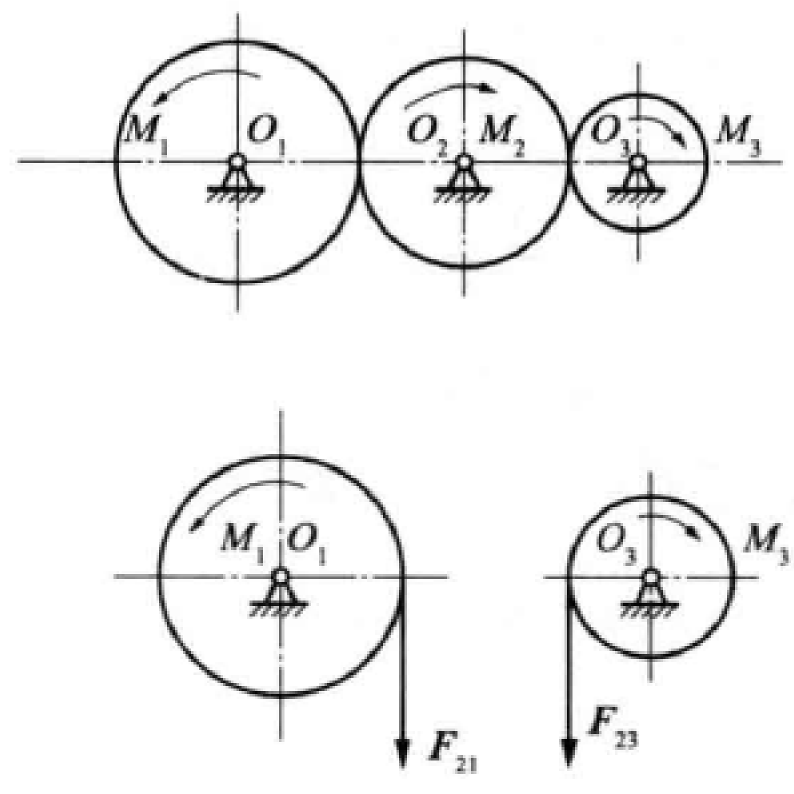


图 8.4

其中负号表示 φ_2 与 φ_1 转向相反。系统的动能为

$$T=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}m_1r_1^2\right)\dot{\varphi}_1^2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}m_2r_2^2\right)\left(\frac{r_1^2}{r_2^2}\dot{\varphi}_1^2\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}m_3r_3^2\right)\left(\frac{r_1^2}{r_3^2}\dot{\varphi}_1^2\right)$$
$$=\frac{1}{4}(m_1+m_2+m_3)r_1^2\dot{\varphi}_1^2$$

为求广义力 Q_1,给轮 1 以虚位移 $\delta\varphi_1$,诸力的虚功之和为

$$\delta W_1=M_1\delta\varphi_1+\left(-\frac{r_1}{r_2}\delta\varphi_1\right)M_2+\left(\frac{r_1}{r_3}\delta\varphi_1\right)(-M_3)$$
$$=\left(M_1-M_2\frac{r_1}{r_2}-M_3\frac{r_1}{r_3}\right)\delta\varphi_1$$

因此有

$$Q_1=\frac{\delta W_1}{\delta\varphi_1}=M_1-M_2\frac{r_1}{r_2}-M_3\frac{r_1}{r_3}$$

第二类 Lagrange 方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}_1}-\frac{\partial T}{\partial\varphi_1}=Q_1$$

代入 T 和 Q_1,得

$$\frac{1}{2}(m_1+m_2+m_3)r_1^2\ddot{\varphi}_1=M_1-M_2\frac{r_1}{r_2}-M_3\frac{r_1}{r_3}$$

因此,轮 1 的角加速度为

$$\alpha_1=\ddot{\varphi}_1=\frac{2\left(M_1-M_2\frac{r_1}{r_2}-M_3\frac{r_1}{r_3}\right)}{(m_1+m_2+m_3)r_1^2}$$

而轮 2 和轮 3 的角加速度分别为

$$\alpha_2=-\frac{r_1}{r_2}\alpha_1,\quad \alpha_3=\frac{r_1}{r_3}\alpha_1$$

为求轮 1 和轮 2 间的作用力,需以轮 1 为研究对象,它的动能和广义力分别为

$$T=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}m_1r_1^2\right)\dot{\varphi}_1^2$$

$$Q=M_1-F_{21}r_1$$

其中 F_{21} 为轮 2 对轮 1 的作用力。因此,轮 1 的 Lagrange 方程为

$$\frac{1}{2}m_1r_1^2\ddot{\varphi}_1=M_1-F_{21}r_1$$

由此得到

$$F_{21}=\frac{(m_2+m_3)M_1}{(m_1+m_2+m_3)r_1}+\frac{m_1}{m_1+m_2+m_3}\left(\frac{M_2}{r_2}+\frac{M_3}{r_3}\right)$$

类似地,以轮 3 为对象,建立 Lagrange 方程,可求得轮 2 对轮 3 的作用力为

$$F_{23}=\frac{(m_1+m_2)M_3}{(m_1+m_2+m_3)r_3}+\frac{m_2}{m_1+m_2+m_3}\left(\frac{M_1}{r_1}-\frac{M_2}{r_2}\right)$$

例 6 椭圆摆由一滑块和一单摆组成,如图 8.5 所示。滑块质量为 m_1,可无摩擦地沿水平面滑动。小球质量为 m_2,用长 l 的杆 AB 和滑块相联结。杆 AB 能绕与图面垂直,且与滑块 A 相连的轴 A 转动。不计杆的质量。试求椭圆摆的运动微分方程。

解:取滑块和小球为研究对象。因滑块对水平面无摩擦,故约束是双面理想的。系统有两个自由度。取滑块中心位移的坐标 y 以及杆 AB 的转角 φ 为广义坐标。滑块的动能为

$$T_1=\frac{1}{2}m_1\dot{y}^2$$

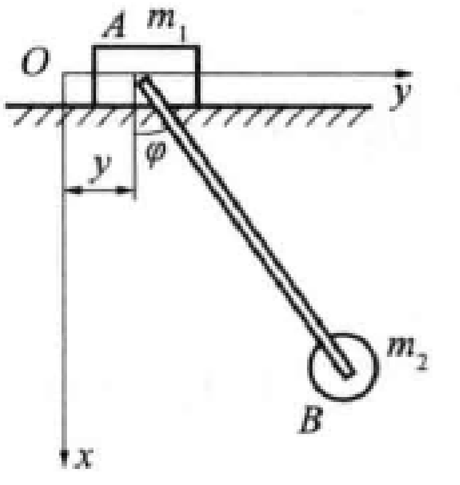


图 8.5

小球的动能为

$$T_2=\frac{1}{2}m_2[(l\dot{\varphi}\sin\varphi)^2+(\dot{y}+l\dot{\varphi}\cos\varphi)^2]$$

系统的动能为

$$T=T_1+T_2=\frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{y}^2+\frac{1}{2}m_2l^2\dot{\varphi}^2+m_2l\dot{\varphi}\dot{y}\cos\varphi$$

再计算广义力。给一虚位移 $\delta y\neq 0,\delta\varphi=0$,各力虚功之和为零,于是有

$$Q_y=0$$

再给一虚位移 $\delta y=0,\delta\varphi\neq0$，力 $m_2\boldsymbol{g}$ 的虚功为

$$\delta W_\varphi=-m_2gl\sin\varphi\delta\varphi$$

因此

$$Q_\varphi=\frac{\delta W_\varphi}{\delta\varphi}=-m_2gl\sin\varphi$$

系统的 Lagrange 方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial\dot{y}}-\frac{\partial T}{\partial y}=Q_y$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}}-\frac{\partial T}{\partial\varphi}=Q_\varphi$$

代入 T,Q_y 和 Q_φ，得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\{(m_1+m_2)\dot{y}+m_2l\dot{\varphi}\cos\varphi\}=0$$

$$m_2l^2\ddot{\varphi}+m_2l\ddot{y}\cos\varphi=-m_2gl\sin\varphi$$

例 7 一重物重 P，悬于绳上，绳长 l，重 P_1，绳的一部分绕在鼓轮上。鼓轮半径为 a，重 P_2，转轴水平。在初始时刻，系统静止，绳下垂长 l_0，如图 8.6 所示。假设鼓轮的质量均匀分布在边缘上，不计摩擦，求重物的运动。

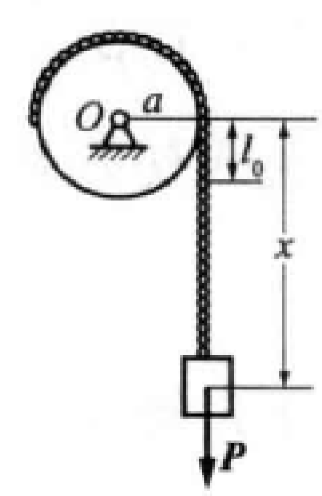


图 8.6

解：取重物、绳子、鼓轮为研究对象，系统仅有一个自由度。选重物的坐标 x 为广义坐标。重物的动能为

$$T_1=\frac{1}{2}\frac{P}{g}\dot{x}^2$$

绳子的动能为

$$T_2=\frac{1}{2}\frac{P_1}{g}\dot{x}^2$$

鼓轮的动能为

$$T_3=\frac{1}{2}\left(\frac{P_2}{g}a^2\right)\left(\frac{\dot{x}}{a}\right)^2$$

系统的动能为

$$T=T_1+T_2+T_3=\frac{1}{2g}(P_1+P_2+P)\dot{x}^2$$

其次，计算广义力 Q_x。重物和绳子在虚位移 δx 上做功之和为

$$\delta W=P\delta x+P_1\frac{x}{l}\delta x$$

由此得

$$Q_x=P+P_1\frac{x}{l}$$

将 T 和 Q_x 代入 Lagrange 方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial\dot{x}}-\frac{\partial T}{\partial x}=Q_x$$

得到

$$\frac{1}{g}(P_1+P_2+P)\ddot{x}=P+P_1\frac{x}{l}$$

它可表示为

$$\ddot{x}-\frac{P_1}{l(P_1+P_2+P)}gx=\frac{P}{P_1+P_2+P}g$$

下面解微分方程。运动的初始条件为

$$t=0,x=l_0,\dot{x}=0$$

方程的通解为

$$x=A\mathrm{sh}\sqrt{\frac{P_1g}{l(P_1+P_2+P)}}t+B\mathrm{ch}\sqrt{\frac{P_1g}{l(P_1+P_2+P)}}t-\frac{P}{P_1}l$$

求时间的导数,得

$$\dot{x}=\sqrt{\frac{P_1g}{l(P_1+P_2+P)}}\left\{A\mathrm{ch}\sqrt{\frac{P_1g}{l(P_1+P_2+P)}}t+B\mathrm{sh}\sqrt{\frac{P_1g}{l(P_1+P_2+P)}}t\right\}$$

代入初始条件,得到积分常数

$$l_0=B-\frac{P}{P_1}l,\quad 0=A$$

于是解为

$$x=\left(l_0+\frac{P}{P_1}l\right)\mathrm{ch}\sqrt{\frac{P_1g}{l(P_1+P_2+P)}}t-\frac{P}{P_1}l$$

注意到,这个解适用于

$$l_0\leqslant x<l$$

例 8 图 8.7 为某测振仪的示意图,系统处于铅垂面内。小球 A 的质量为 m,对中心的惯动惯量为 J_A,不计各杆质量。令 $bc>(a-b)^2$,试求系统在铅垂位置附近做微振动的周期。

解:系统仅有一个自由度,但是选两个坐标 φ 和 x 并带有一个约束方程较方便。坐标 φ 和 x 之间的关系由 ΔOO_1B 给出

$$f(x,\varphi)=a^2+x^2-2ax\cos\varphi-b^2=0$$

系统的动能，即小球的动能为

$$T=\frac{1}{2}mv_A^2+\frac{1}{2}J_A\dot{\varphi}^2=\frac{1}{2}m[\dot{x}^2+(x+c)^2\dot{\varphi}^2]+\frac{1}{2}J_A\dot{\varphi}^2$$

为计算广义力，给以虚位移 $\delta x\neq 0,\delta\varphi=0$，所有力的虚功之和为

$$\delta W_x=mg\cos\varphi\delta x$$

于是

$$Q_x=\frac{\delta W_x}{\delta x}=mg\cos\varphi$$

再给虚位移 $\delta x=0,\delta\varphi\neq 0$，重力的虚功为

$$\delta W_\varphi=-mg(x+c)\sin\varphi\delta\varphi$$

于是

$$Q_\varphi=\frac{\delta W_\varphi}{\delta\varphi}=-mg(x+c)\sin\varphi$$

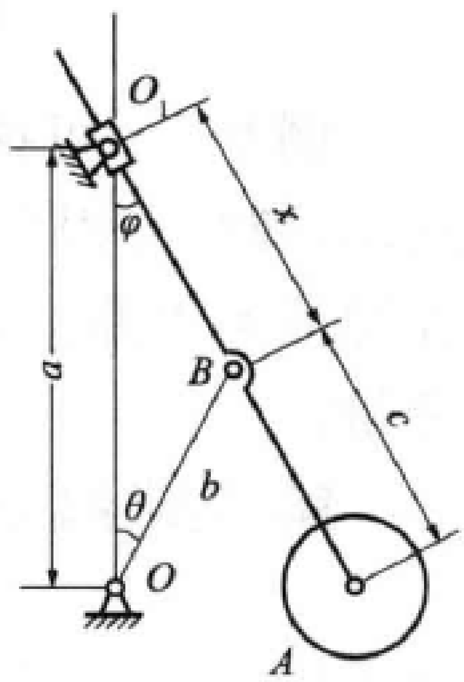


图 8.7

第一类 Lagrange 方程(8.2.8)给出

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}}-\frac{\partial T}{\partial\varphi}=Q_\varphi+\lambda\frac{\partial f}{\partial\varphi}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial\dot{x}}-\frac{\partial T}{\partial x}=Q_x+\lambda\frac{\partial f}{\partial x}$$

代入 T,Q_φ,Q_x，得到运动微分方程

$$m(x+c)^2\ddot{\varphi}+2m(x+c)\dot{x}\dot{\varphi}+J_A\ddot{\varphi}=-mg(x+c)\sin\varphi+2\lambda ax\sin\varphi$$

$$m\ddot{x}-m(x+c)\dot{\varphi}^2=mg\cos\varphi+2\lambda(x-a\cos\varphi)$$

对微振动情形，有 $\sin\varphi\approx\varphi,\cos\varphi\approx 1$。约束方程成为

$$a^2+x^2-2ax-b^2=0$$

即

$$x=a-b$$

上述微分方程成为

$$[m(a-b+c)^2+J_A]\ddot{\varphi}=-mg(a-b+c)\varphi+2\lambda a(a-b)\varphi$$

$$0=mg-2\lambda b$$

消去待定乘子 λ，得到

$$[m(a-b+c)^2+J_A]\ddot{\varphi}+mg\left[c-\frac{(a-b)^2}{b}\right]\varphi=0$$

写成标准形式

$$\ddot{\varphi}+\omega_0^2\varphi=0$$

其中

$$\omega_0^2=\frac{mg[bc-(a-b)^2]}{b[m(a-b+c)^2+J_A]}$$

而微振动周期为

$$T=\frac{2\pi}{\omega_0}=2\pi\sqrt{\frac{b[m(a-b+c)^2+J_A]}{mg[bc-(a-b)^2]}}$$

例 9 一可视为质点的质量为 m 的小珠自由地在一光滑螺线上运动，螺线方程在柱坐标下写成 $r=a,z=b\psi$，重力在 z 的正向。质点在螺线上由静止开始运动。试确定螺线加给小珠反力的 z 分量和 ψ 分量。

解：为求约束力，需选多余坐标。小珠自由度为 1，所受约束为

$$r-a=0,\quad z-b\psi=0$$

选坐标为 z,ψ。第一类 Lagrange 方程(8.2.8)给出

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{z}}-\frac{\partial T}{\partial z}=Q_z+\lambda$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}}-\frac{\partial T}{\partial \psi}=Q_\psi-\lambda b$$

小珠的动能为

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\psi}^2+\dot{z}^2)=\frac{1}{2}m(a^2\dot{\psi}^2+\dot{z}^2)$$

广义力为

$$Q_z=mg,\quad Q_\psi=0$$

于是方程为

$$m\ddot{z}=mg+\lambda,\quad ma^2\ddot{\psi}=-\lambda b$$

由此得到

$$\ddot{z}=\frac{gb^2}{a^2+b^2},\ddot{\psi}=\frac{gb}{a^2+b^2},\lambda=-\frac{mga^2}{a^2+b^2}$$

约束力的广义分量为

$$F_{Nz}=-\frac{mga^2}{a^2+b^2},\quad F_{N\psi}=\frac{mga^2b}{a^2+b^2}$$

而螺线的反力分量为 F_{Nz} 和 $\frac{F_{N\psi}}{r}$。

§8.4 有势力情形的 Lagrange 方程

本节讨论一类特殊情形的 Lagrange 方程，包括**有势力**情形的 Lagrange 方

程、有广义力函数情形的 Lagrange 方程、Lagrange 方程的不变性等。

8.4.1 有势力情形的 Lagrange 方程

如果加在系统质点上的主动力具有力函数，即存在一个函数 $U=U(x_i,y_i,z_i)$ $(i=1,2,\cdots,N)$，使得

$$F_{ix}=\frac{\partial U}{\partial x_i},F_{iy}=\frac{\partial U}{\partial y_i},F_{iz}=\frac{\partial U}{\partial z_i}\qquad (i=1,2,\cdots,N) \tag{8.4.1}$$

这时广义力

$$Q_s=\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{F}_i\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_s}=\sum_{i=1}^{N}\left(F_{ix}\frac{\partial x_i}{\partial q_s}+F_{iy}\frac{\partial y_i}{\partial q_s}+F_{iz}\frac{\partial z_i}{\partial q_s}\right)$$

变换为

$$Q_s=\frac{\partial U}{\partial q_s}\qquad (s=1,2,\cdots,n) \tag{8.4.2}$$

具有力函数的系统，通常称为**保守系统**。在分析力学中起重要作用的是另一个与力函数相近的势能函数 $V=V(\boldsymbol{q})$，它与力函数大小相等，符号相反，即 $V(\boldsymbol{q})=-U(\boldsymbol{q})$。此时，第二类 Lagrange 方程(8.2.2)有形式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial T}{\partial q_s}=\frac{\partial U}{\partial q_s}$$

因 U 不依赖于 $\dot{q}_s(s=1,2,\cdots,n)$，故有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial (T+U)}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial (T+U)}{\partial q_s}=0$$

引进函数

$$L=T+U=T-V \tag{8.4.3}$$

称其为 **Lagrange 函数**，或动势。于是方程成为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial L}{\partial q_s}=0\qquad (s=1,2,\cdots,n) \tag{8.4.4}$$

这就是有势力情形的 Lagrange 方程。

8.4.2 有广义力函数情形的 Lagrange 方程

广义力函数 $U=U(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 是指，广义力 Q_s 可表示为

$$Q_s=\frac{\partial U}{\partial q_s}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_s}\qquad (s=1,2,\cdots,n) \tag{8.4.5}$$

此时方程仍有形式(8.4.4)。值得注意的是，函数 U 相对 $\dot{\boldsymbol{q}}$ 应是线性的，即有形式

$$U=\sum_{s=1}^{n}A_s(t,\boldsymbol{q})\dot{q}_s+A(t,\boldsymbol{q}) \tag{8.4.6}$$

下面给出一例。带电粒子在电磁场中运动，场作用在带电粒子上的力为

$$\boldsymbol{F}=\rho\boldsymbol{E}+\frac{1}{c}\rho\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{B}$$

其中 ρ 为粒子荷电量;$\boldsymbol{E}$ 为电场强度;$\boldsymbol{V}$ 为粒子运动速度;$\boldsymbol{B}$ 为磁感强度,c 为光速。由电磁场理论知

$$\boldsymbol{E}=-\nabla\varphi-\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t},\qquad \boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}$$

其中 φ 为标量势;$\boldsymbol{A}$ 为矢量势。力 $\boldsymbol{F}$ 可表示为[4]

$$\boldsymbol{F}=-\rho\nabla\varphi-\frac{\rho}{c}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}+\frac{\rho}{c}\nabla(\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{A})$$

相应的广义力函数为

$$U=-\rho\varphi+\frac{\rho}{c}(\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{A})$$

8.4.3 Lagrange 方程的不变性

研究某些变换,Lagrange 方程(8.4.4)相对这些变换是不变的。

1)显然变换

Lagrange 函数 L 与 $L_1=L+\Phi(t)$,L 与 $L_2=AL$,以及 L 与 $L_3=L+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(q_s,t)$ 都表示同样的 Lagrange 方程。

2)点变换

引入新的坐标 $\bar{q}_s(s=1,2,\cdots,n)$,它们是原坐标 $q_k(k=1,2,\cdots,n)$ 的函数

$$\bar{q}_s=f_s(q_k)\qquad(s,k=1,2,\cdots,n)\tag{8.4.7}$$

设变换的函数行列式异于零,即

$$\Delta=\frac{\partial(f_1,f_2,\cdots,f_n)}{\partial(q_1,q_2,\cdots,q_n)}\neq 0$$

于是存在逆变换

$$q_s=\varphi_s(\bar{q}_k)\tag{8.4.8}$$

可以证明,Lagrange 方程(8.4.4)在**点变换**(8.4.7)下的不变性。实际上,新变量下的 Lagrange 函数为

$$\bar{L}(\bar{q}_s,\dot{\bar{q}}_s,t)=L(\varphi_s(\bar{q}_k),\dot{\varphi}_s(\bar{q}_k,\dot{\bar{q}}_k),t)$$

于是有

$$\frac{\partial\bar{L}}{\partial\dot{\bar{q}}_s}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_k}\frac{\partial\dot{\varphi}_k}{\partial\dot{\bar{q}}_s}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_k}\frac{\partial\varphi_k}{\partial\bar{q}_s}$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\bar{L}}{\partial\dot{\bar{q}}_s}-\frac{\partial\bar{L}}{\partial\bar{q}_s}&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_k}\frac{\partial\varphi_k}{\partial\bar{q}_s}\Big)-\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial q_k}\frac{\partial\varphi_k}{\partial\bar{q}_s}-\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_k}\frac{\partial\dot{\varphi}_k}{\partial\bar{q}_s}\\&=\sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_k}-\frac{\partial L}{\partial q_k}\Big)\frac{\partial\varphi_k}{\partial\bar{q}_s}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_k}\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\varphi_k}{\partial\bar{q}_s}-\frac{\partial\dot{\varphi}_k}{\partial\bar{q}_s}\Big)=0\end{aligned}$$

3)相似变换

对系统中点的质量,坐标以及时间做**相似变换**

$$m_i=\mu m_i',t=\tau t'$$
$$x_i=\lambda x_i',y_i=\lambda y_i',z_i=\lambda z_i' \tag{8.4.9}$$

则原系统变为由质量为 m_i'，坐标为(x_i',y_i',z_i')的 N 个质点组成的相似系统。原系统的 Lagrange 函数为

$$L=T-V=\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_iv_i^2-V(x_i,y_i,z_i,m_i)$$

变换后的 Lagrange 函数为

$$L_1=T_1-V_1=\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i'v_i'^2-V(x_i',y_i',z_i',m_i')$$

因系统动能对质量是一次齐次的，对速度 v_i 是二次齐次的，则由相似变换(8.4.9)得到

$$T=\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_iv_i^2=\frac{\mu\lambda^2}{\tau^2}\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i'v_i'^2$$

或者

$$T=\frac{\mu\lambda^2}{\tau^2}T_1 \tag{8.4.10}$$

另一方面，由于所有物理量相对于基本单位：长度、质量和时间都是齐次的，因而对所有异于零的 λ 和 μ，有下述关系

$$V(\lambda x_i',\lambda y_i',\lambda z_i',\mu m_i')=\lambda^p\mu^vV(x_i',y_i',z_i',m_i')$$

这里 p 和 v 是 V 相对坐标 x_i,y_i,z_i 及质量 m_i 的齐次性阶指数。因此有

$$V(x_i,y_i,z_i,m_i)=\lambda^p\mu^vV(x_i',y_i',z_i',m_i')$$

或者

$$V=\lambda^p\mu^vV_1 \tag{8.4.11}$$

于是，相似变换的结果最终为

$$L=\frac{\mu\lambda^2}{\tau^2}T_1-\lambda^p\mu^vV_1 \tag{8.4.12}$$

为使原系统的运动与由相似变换所得系统的运动用同样的方程来描述，必须使两个系统的 Lagrange 函数 $L=T-V$ 和 $L_1=T_1-V_1$ 差一个因子。当 $\mu\lambda^2/\tau^2$ 与 $\lambda^p\mu^v$ 符号相同时，需满足条件

$$\frac{\mu\lambda^2}{\tau^2}=\lambda^p\mu^v$$

因此，参数 μ、λ 和 τ 是不独立的，必须满足

$$\mu^{v-1}\lambda^{p-2}\tau^2=1 \tag{8.4.13}$$

4)Lagrange 对称性

Lagrange 对称性是指，力学系统的运动微分方程的解集在变换下的不变性，或者说，对应于一个 Lagrange 函数的运动微分方程的每一个解都满足从另

一个 Lagrange 函数得到的微分方程[5]。对单自由度系统，如果两个 Lagrange 函数 L 和 $\overline{L}$ 满足

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\overline{L}}{\partial\dot{q}}-\frac{\partial\overline{L}}{\partial q}=f(q,\dot{q},t)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}}-\frac{\partial L}{\partial q}\right) \tag{8.4.14}$$

则系统存在 Lagrange 对称性，其中

$$f(q,\dot{q},t)=\frac{\partial^2\overline{L}}{\partial\dot{q}^2}\bigg/\frac{\partial^2 L}{\partial\dot{q}^2} \tag{8.4.15}$$

Currie 和 Saletan 曾证明 $f(q,\dot{q},t)$ 是一运动常数。

对多自由度系统，令

$$W_{sk}=\frac{\partial^2 L}{\partial\dot{q}_s\partial\dot{q}_k},\ \overline{W}_{sk}=\frac{\partial^2\overline{L}}{\partial\dot{q}_s\partial\dot{q}_k}$$

$$\sum_{s=1}^{n}\Lambda_r^s W_{st}=\overline{W}_{rt} \tag{8.4.16}$$

$$L_s=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_s}-\frac{\partial L}{\partial q_s},\ \overline{L}_s=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\overline{L}}{\partial\dot{q}_s}-\frac{\partial\overline{L}}{\partial q_s}$$

$$\overline{L}_r=\sum_{s=1}^{n}\Lambda_r^s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})L_s \tag{8.4.17}$$

可以证明，$\boldsymbol{\Lambda}=\{\Lambda_r^s\}$ 的各次幂的迹所确定的量都是力学系统的守恒量[5]，即

$$\mathrm{tr}(\Lambda^m)=\mathrm{const.}\qquad(m=1,2,\cdots) \tag{8.4.18}$$

详细讨论见本书第 22 章。

8.4.4 应用举例

对于完整保守系统，只用一个函数 $L=T-V=T+U$ 便可建立系统的运动微分方程。

例 1 如图 8.8 所示，由刚度为 k 的弹簧联结的两个质点 M_1 和 M_2 的质量分别为 m_1 和 m_2。两质点分别沿坐标轴 Ox 和 Oy 运动，Oy 是竖直的，弹簧长度在未拉紧时等于 l_0，试用 Lagrange 方程建立系统的运动微分方程。略去摩擦不计[6]。

解：因不计摩擦，约束是双面理想的。取 M_2 的坐标 y 和 M_1 的坐标 x 为广义坐标，系统的动能为

$$T=\frac{1}{2}m_1\dot{x}^2+\frac{1}{2}m_2\dot{y}^2$$

系统的势能为

$$V=m_2gy+\frac{1}{2}k\left(\sqrt{x^2+y^2}-l_0\right)^2$$

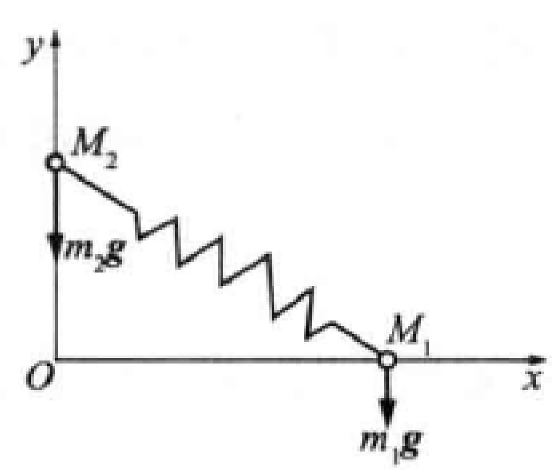


图 8.8

Lagrange 函数为

$$L=T-V=\frac{1}{2}m_1\dot{x}^2+\frac{1}{2}m_2\dot{y}^2-m_2gy-\frac{1}{2}k(\sqrt{x^2+y^2}-l_0)^2$$

代入 Lagrange 方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}-\frac{\partial L}{\partial x}=0$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}-\frac{\partial L}{\partial y}=0$$

得到系统的运动微分方程

$$m_1\ddot{x}+kx\left(1-\frac{l_0}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)=0$$

$$m_2\ddot{y}+ky\left(1-\frac{l_0}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)+m_2g=0$$

例 2 研究单位质量的自由质点在球坐标(r,φ,θ)中的运动(图 8.9),其力函数为

$$U=f(r)+\frac{g(\theta)}{r^2}+\frac{h(\varphi)}{r^2\sin^2\theta}$$

其中 f,g,h 为已知函数,这些函数是连续的且有连续导数。

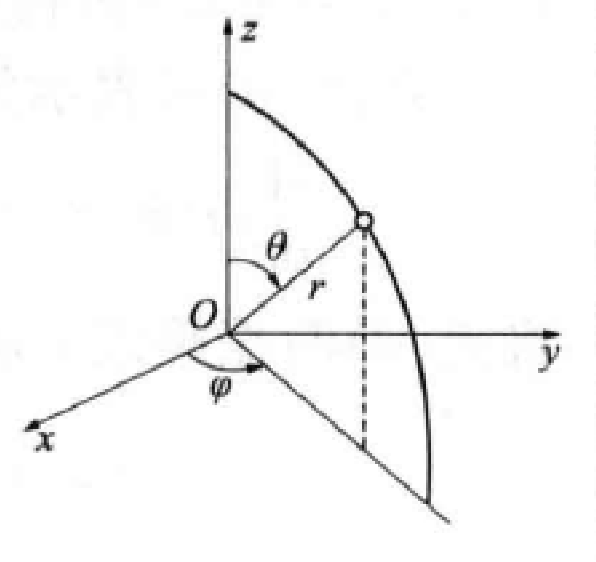


图 8.9

解:质点在球坐标中的动能为

$$T=\frac{1}{2}(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\theta)$$

广义力为

$$Q_r=\frac{\partial U}{\partial r}=f'(r)-\frac{2}{r^3}\left[g(\theta)+\frac{h(\varphi)}{\sin^2\theta}\right]$$

$$Q_\theta=\frac{\partial U}{\partial \theta}=\frac{1}{r^2}\left[g'(\theta)-\frac{2h(\varphi)\cos\theta}{\sin^3\theta}\right]$$

$$Q_\varphi=\frac{\partial U}{\partial \varphi}=\frac{h'(\varphi)}{r^2\sin^2\theta}$$

Lagrange 方程(8.4.4)给出

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{r}}-\frac{\partial T}{\partial r}=\frac{\partial U}{\partial r}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}-\frac{\partial T}{\partial \theta}=\frac{\partial U}{\partial \theta}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}-\frac{\partial T}{\partial \varphi}=\frac{\partial U}{\partial \varphi}$$

将动能 T 及广义力 Q_r, Q_θ, Q_φ 代入，得到

$$\ddot{r}-r(\dot{\theta}^2+\dot{\varphi}^2\sin^2\theta)=f'(r)-\frac{2}{r^3}\left[g(\theta)+\frac{h(\varphi)}{\sin^2\theta}\right] \tag{a}$$

$$r^2\ddot{\theta}+2r\dot{r}\dot{\theta}-r^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{r^2}\left[g'(\theta)-\frac{2h(\varphi)\cos\theta}{\sin^3\theta}\right] \tag{b}$$

$$r^2\ddot{\varphi}\sin^2\theta+2r\dot{r}\sin^2\theta+r^2\dot{\varphi}\dot{\theta}\sin 2\theta=\frac{h'(\varphi)}{r^2\sin^2\theta} \tag{c}$$

方程(a)，(b)，(c)可以积分出来。方程(c)可表示为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r^2\dot{\varphi}\sin^2\theta)=\frac{h'(\varphi)}{r^2\sin^2\theta}$$

或

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\{(r^2\dot{\varphi}\sin^2\theta)^2\}=h'(\varphi)\dot{\varphi}$$

积分得

$$r^4\dot{\varphi}^2\sin^4\theta=2h(\varphi)+2c_1 \tag{d}$$

其中 c_1 为常数，由初始条件确定。

方程(b)可表示为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r^2\dot{\theta})-r^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{r^2}\left[g'(\theta)-\frac{2h(\varphi)\cos\theta}{\sin^3\theta}\right] \tag{e}$$

将式(d)两端乘以 $\cos\theta/r^2\sin^3\theta$，得

$$r^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta=\frac{2h(\varphi)\cos\theta}{r^2\sin^3\theta}+\frac{2c_1\cos\theta}{r^2\sin^3\theta}$$

代入式(e)，得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r^2\dot{\theta})-\frac{2c_1\cos\theta}{r^2\sin^3\theta}=\frac{g'(\theta)}{r^2}$$

两端乘以 $r^2\dot{\theta}$，得到

$$r^2\dot{\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r^2\dot{\theta})+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{c_1}{\sin^2\theta}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[g(\theta)]$$

积分得

$$r^4\dot{\theta}^2=2\left[g(\theta)-\frac{c_1}{\sin^2\theta}+c_2\right] \tag{f}$$

其中 c_2 为由初始条件确定的积分常数。

将方程(a)两端乘以 $\dot{r}$，方程(b)两端乘以 $\dot{\theta}$，方程(c)两端乘以 $\dot{\varphi}$，然后相加，便得

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}$$

积分得

$$T-U=\text{const.}$$

即

$$\frac{1}{2}(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\theta)-f(r)-\frac{g(\theta)}{r^2}-\frac{h(\varphi)}{r^2\sin^2\theta}=\frac{1}{2}c \tag{g}$$

其中 c 为积分常数。将式(e),(f)代入式(g),得

$$\dot{r}^2=2f(r)-\frac{2c_2}{r^2}+c$$

因此有

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=\pm\sqrt{2f(r)-\frac{2c_2}{r^2}+c} \tag{h}$$

积分之,便得 r,t 及积分常数 c_3 之间的关系,对 r 解出,记作

$$r=F(t)$$

方程(f)可写成

$$r^2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\pm\sqrt{2\left[g(\theta)-\frac{c_1}{\sin^2\theta}+c\right]}$$

利用式(h),上式可表示为

$$\frac{\mathrm{d}r}{r^2\sqrt{2f(r)-\frac{2c_2}{r^2}+c}}=\pm\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{2\left[g(\theta)-\frac{c_1}{\sin^2\theta}+c_2\right]}}$$

积分之,便得 r,θ 及积分常数 c_4 之间的关系,对 θ 解出,考虑到 $r=F(t)$,便得

$$\theta=G(t)$$

将式(d),(f)分别表示为

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}=\pm\frac{\sqrt{2h(\varphi)+2c_1}}{r^2\sin^2\theta}$$

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\pm\frac{\sqrt{2\left[g(\theta)-\frac{c_1}{\sin^2\theta}+c_2\right]}}{r^2}$$

由此得

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{h(\varphi)+c_1}}=\pm\frac{\mathrm{d}\theta}{\sin^2\theta\sqrt{g(\theta)-\frac{c_1}{\sin^2\theta}+c_2}}$$

积分之,求得 φ,θ 及积分常数 c_5 之间的关系,对 φ 解出,并考虑到 $\theta=G(t)$,可得

$$\varphi=H(t)$$

上述各常数 c_1,c_2,c_3,c_4,c_5 及 c 可由初始条件确定。

例 3 如图 8.10 所示,质量为 M 的对称刚体($J_{x_1}=J_{y_1}=A$)可绕其对称轴上的固定点 O 转动,刚体质心 E 到点 O 的距离为 l。在刚体内有个狭长的柱形腔,其轴与刚体对称轴重合。质量为 m 的质点 D 沿着柱形腔移动,用刚度为 k 的弹簧将质点 D 与固定点 O 联结,弹簧长度在未变形时为 l_0,不计摩擦,试用 Lagrange 方程建立系统的运动微分方程[6]。

解:取刚体和质点为研究对象。刚体的位形由 Euler 角 ψ,θ,φ 确定,质点 D 相对刚体的位形坐标记作 z_1,系统有 4 个自由度。刚体的动能为

$$T_1=\frac{1}{2}(J_{x_1}\omega_{x_1}^2+J_{y_1}\omega_{y_1}^2+J_{z_1}\omega_{z_1}^2)$$

其中 $\omega_{x_1},\omega_{y_1},\omega_{z_1}$ 为刚体角速度在连体系 $Ox_1y_1z_1$ 轴上的投影,可用 Euler 角及其导数表示为

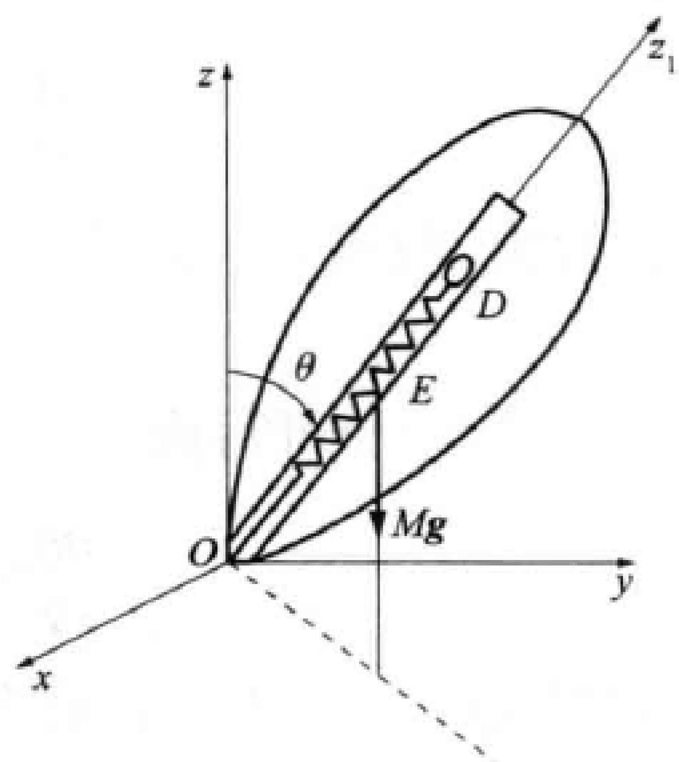


图 8.10

$$\omega_{x_1}=\dot{\theta}\cos\varphi+\dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi$$

$$\omega_{y_1}=-\dot{\theta}\sin\varphi+\dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi$$

$$\omega_{z_1}=\dot{\varphi}+\dot{\psi}\cos\theta$$

令 $J_{x_1}=J_{y_1}=A,J_{z_1}=C$,则

$$T_1=\frac{1}{2}A(\dot{\theta}^2+\dot{\psi}^2\sin^2\theta)+\frac{1}{2}C(\dot{\varphi}+\dot{\psi}\cos\theta)^2$$

质点 D 的动能为

$$T_2=\frac{1}{2}m\boldsymbol{v}_D^2=\frac{1}{2}m(\boldsymbol{v}_e+\boldsymbol{v}_r)^2$$

式中,牵连速度为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}_e&=\boldsymbol{\omega}\times z_1\boldsymbol{k}_1=(\omega_{x_1}\boldsymbol{i}_1+\omega_{y_1}\boldsymbol{j}_1+\omega_{z_1}\boldsymbol{k}_1)\times z_1\boldsymbol{k}_1\\&=-\omega_{x_1}z_1\boldsymbol{j}_1+\omega_{y_1}z_1\boldsymbol{i}_1\end{aligned}$$

相对速度为

$$\boldsymbol{v}_r = \dot{z}_1 \boldsymbol{k}_1$$

于是有

$$T_2 = \frac{1}{2}m[(\omega_{x_1}^2 + \omega_{y_1}^2)z_1^2 + \dot{z}_1^2]$$
$$= \frac{1}{2}m[(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2\theta)z_1^2 + \dot{z}_1^2]$$

系统的动能为

$$T = T_1 + T_2$$
$$= \frac{1}{2}(A + mz_1^2)(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2\theta) + \frac{1}{2}C(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta)^2 + \frac{1}{2}m\dot{z}_1^2$$

重力势能为

$$V_1 = Mgl\cos\theta + mgz_1\cos\theta = (Mgl + mgz_1)\cos\theta$$

弹簧势能为

$$V_2 = \frac{1}{2}k(z_1 - l_0)^2$$

因此,系统总势能为

$$V = V_1 + V_2 = (Ml + mz_1)g\cos\theta + \frac{1}{2}k(z_1 - l_0)^2$$

Lagrange 方程(8.4.4)给出

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} - \frac{\partial L}{\partial \psi} = 0$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{z}_1} - \frac{\partial L}{\partial z_1} = 0$$

将 $L = T - V$ 代入,得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[(A + mz_1^2)\dot{\psi}\sin^2\theta + C(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta)\cos\theta] = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[(A + mz_1^2)\dot{\theta}] - \frac{1}{2}(A + mz_1^2)\dot{\psi}^2 \sin 2\theta +$$
$$C(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta)\dot{\psi}\sin\theta - (Ml + mz_1)g\sin\theta = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[C(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta)] = 0$$

$$m\ddot{z}_1 - mz_1(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin\theta) + mg\cos\theta + k(z_1 - l_0) = 0$$

例 4 质量为 m 半径为 r 的粗糙小圆柱体，在一空心薄圆柱体内表面无滑动地滚动，如图 8.11 所示。这个空心圆柱的质量为 M，半径为 R，能绕自身水平轴 O 转动。试用 Lagrange 方程列写系统的运动微分方程。

解：取小圆柱和空心柱体为研究对象。系统有两个自由度。取空心柱体的转角 θ 和两圆柱中心连线 OO_1 的转角 φ 为广义坐标。由运动学知，小圆柱的角速度为

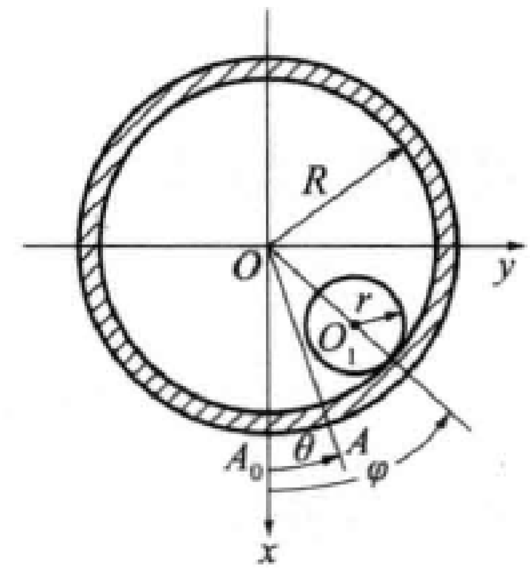


图 8.11

$$\omega_1=\frac{R\dot{\theta}-(R-r)\dot{\varphi}}{r}$$

空心圆柱做定轴转动，动能为

$$T_1=\frac{1}{2}(MR^2)\dot{\theta}^2$$

小圆柱做平面运动，动能为

$$T_2=\frac{1}{2}m(R-r)^2\dot{\varphi}^2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mr^2\right)\left(\frac{R\dot{\theta}-(R-r)\dot{\varphi}}{r}\right)^2$$

系统的动能为

$$T=T_1+T_2$$

小圆柱重力的势能为

$$V=mg(R-r)(1-\cos\theta)$$

系统的动势为

$$L=T-V$$

代入 Lagrange 方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}-\frac{\partial L}{\partial\theta}=0,\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}-\frac{\partial L}{\partial\varphi}=0$$

得到

$$(M+\frac{1}{2}m)R\ddot{\theta}-\frac{1}{2}m(R-r)\ddot{\varphi}=0$$

$$\frac{3}{2}(R-r)\ddot{\varphi}-\frac{1}{2}R\ddot{\theta}+g\sin\varphi=0$$

例 5 质量为 m_1 和 m_2 的两质点在同一轨道上运动，试用下述条件确定两质点经历的时间之比：(1)两质点的势能相同；(2)势能之比为 $1:v$。

解：做相似变换

$$m_1=\mu m_2,t_1=\tau t_2,\lambda=1$$

当两质点势能相同时,有

$$V_1=V_2,T_1=\frac{\mu}{\tau^2}T_2$$

因此有

$$\frac{\mu}{\tau^2}=1$$

而

$$\tau=\sqrt{\mu}=\sqrt{\frac{m_1}{m_2}}$$

这里的 τ 就是两质点经历的时间之比。

当 $V_1:V_2=1:v$ 时,有

$$V_1=\frac{1}{v}V_2,T_1=\frac{\mu}{\tau^2}T_2$$

因此

$$\tau=\sqrt{\mu v}=\sqrt{\frac{m_1}{m_2}}\sqrt{\frac{V_2}{V_1}}$$

例 6 一维谐振子的 Lagrange 对称性。

解:一维谐振子的微分方程为

$$\ddot{q}+q=0$$

下面的 Lagrange 函数都能表示一维谐振子的运动[7]

$$L=\frac{1}{2}(\dot{q}^2-q^2)$$

$$\overline{L}_1=\frac{1}{6}\dot{q}^3\cos t+\frac{1}{2}q\dot{q}^2\sin t-q^2\dot{q}\cos t$$

$$\overline{L}_2=2\frac{\dot{q}}{q}\arctan\frac{\dot{q}}{q}-\ln(\dot{q}^2+q^2)$$

做计算

$$\frac{\partial^2\overline{L}_1}{\partial\dot{q}^2}=\dot{q}\cos t+q\sin t$$

$$\frac{\partial^2\overline{L}_2}{\partial\dot{q}^2}=\frac{2}{q^2+\dot{q}^2}$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial\dot{q}^2}=1$$

利用式(8.4.15),得到

$$f_1(q,\dot{q},t)=\frac{\partial^2\overline{L}_1}{\partial\dot{q}^2}\bigg/\frac{\partial^2 L}{\partial\dot{q}^2}=\dot{q}\cos t+q\sin t$$

$$f_2(q,\dot{q},t)=\frac{\partial^2\overline{L}_2}{\partial\dot{q}^2}\bigg/\frac{\partial^2 L}{\partial\dot{q}^2}=\frac{2}{q^2+\dot{q}^2}$$

这样,由 Lagrange 对称性,得到积分

$$f_1=C_1,f_2=C_2$$

即

$$\dot{q}\cos t+q\sin t=C_1$$

$$(q^2+\dot{q}^2)^{-1}=\frac{C_2}{2}$$

§8.5 Lagrange 方程的经典积分及降阶法

本节讨论 Lagrange 方程的两类经典积分——循环积分和能量积分,以及利用这两类积分的降阶法——Routh 降阶法和 Whittaker 降阶法等。

8.5.1 运动方程的第一积分

由 Lagrange 方程的显式,可解出所有广义加速度,记作

$$\ddot{q}_s=F_s(q_k,\dot{q}_k,t)\qquad(s,k=1,2,\cdots,n)\tag{8.5.1}$$

称某函数 $f(q_s,\dot{q}_s,t)=C$ 为二阶微分方程(8.5.1)的第一积分,如果它对时间 t 的全导数由于方程(8.5.1)而等于零,即

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}=\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial\dot{q}_s}F_s+\frac{\partial f}{\partial q_s}\dot{q}_s\right)+\frac{\partial f}{\partial t}\equiv 0\tag{8.5.2}$$

研究运动方程的第一积分有重要意义。如果能够找到一些积分,便可对系统动力学行为有所了解;如果能够找到全部积分,也就找到了问题的解。假设已求得方程(8.5.1)的 $2n$ 个独立的第一积分

$$f_\nu(q_s,\dot{q}_s,t)=C_\nu\qquad(\nu=1,2,\cdots,2n)\tag{8.5.3}$$

那么可由此将 $q_s,\dot{q}_s(s=1,2,\cdots,n)$ 表示为时间 t 以及 $2n$ 个任意常数 C_ν 的函数,而得到微分方程的通解

$$q_s=\varphi_s(t,C_\nu),\dot{q}_s=\psi_s(t,C_\nu)\tag{8.5.4}$$

其中 $2n$ 个任意常数 $C_\nu(\nu=1,2,\cdots,2n)$ 可由初始条件,即广义坐标的初值 q_{s0} 以及广义速度的初值 $\dot{q}_{s0}$ 来确定。它们与 C_ν 的关系可如此确定:令 $t=0$,以 $q_{s0},\dot{q}_{s0}$ 代入式(8.5.4),便得相对 $C_1,C_1\cdots,C_{2n}$ 的方程组为

$$\varphi_s(0,C_\nu)=q_{s0},\psi_s(0,C_\nu)=\dot{q}_{s0}\qquad(s=1,2,\cdots,n)\tag{8.5.5}$$

8.5.2 循环坐标和循环积分

如果某个广义坐标，例如 q_1，不明显出现于 Lagrange 函数 L 中，就称 q_1 为**循环坐标**（或可遗坐标）。此时，由方程(8.4.4)得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}=0$$

将其积分，得

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}=C_1 \tag{8.5.6}$$

其中 C_1 为任意常数。与循环坐标相应的积分(8.5.6)称为**循环积分**。

循环积分代表广义动量守恒，可以是动量守恒；也可以是动量矩守恒；也可以既不是动量守恒，也不是动量矩守恒。

假定循环坐标 q_1 有如下性质：当其余坐标 $q_2,q_3,\cdots,q_n$ 保持不变时，q_1 若有改变量 l，相应于系统平移一线段 l。取此移动方向为轴 Ox，则有

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}=\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}=\sum_{i=1}^{N}m_i\left(\dot{x}_i\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_1}+\dot{y}_i\frac{\partial \dot{y}_i}{\partial \dot{q}_1}+\dot{z}_i\frac{\partial \dot{z}_i}{\partial \dot{q}_1}\right)=\sum_{i=1}^{N}m_i\dot{x}_i=C_1$$

因此，如果循环坐标的改变相应于系统在某方向的平移，那么相应的循环积分就表示系统的动量在此方向上的投影守恒。

如果循环坐标的改变量为 α，相应于整个系统绕空间某固定直线转一角度 α。取此空间固定直线为轴 Oz，并设第 i 个质点的矢径为 $\boldsymbol{r}_i$，有

$$x_i=r_i\cos\varphi_i,\ y_i=r_i\sin\varphi_i \qquad (i=1,2,\cdots,N)$$

可求得

$$\frac{\partial x_i}{\partial q_1}=\frac{\partial x_i}{\partial \varphi_i}=-r_i\sin\varphi_i=-y_i$$

$$\frac{\partial y_i}{\partial q_1}=\frac{\partial y_i}{\partial \varphi_i}=r_i\cos\varphi_i=x_i$$

$$\frac{\partial z_i}{\partial q_1}=0$$

因此

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}=\sum_{i=1}^{N}m_i(x_i\dot{y}_i-\dot{x}_iy_i)=C_1$$

这一表达式的左端就是系统相对轴 Oz 的动量矩。因此，如果循环坐标的改变相应于整个系统绕某固定直线的转动，那么相应的循环积分表示系统相对该直线的动量矩守恒。

在更一般的情形下，循环积分不一定有明显的物理意义。

如果在 Lagrange 函数 L 中有两个或多个循环坐标，则可得到相同数目个相应的第一积分。

值得注意的是,循环积分的存在依赖于广义坐标的选取。

8.5.3 能量积分

将方程(8.4.4)两端同时乘以 $\dot{q}_s$,并对 s 求和,得到

$$\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\right)\dot{q}_s-\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial q_s}\dot{q}_s=0$$

它可表示为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s-L\right)=-\frac{\partial L}{\partial t} \tag{8.5.7}$$

因此,当

$$\frac{\partial L}{\partial t}=0 \tag{8.5.8}$$

时,有积分

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s-L=h \tag{8.5.9}$$

其中 h 为常数。

注意到

$$L=T-V=T_2+T_1+T_0-V$$

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s=\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}A_{ks}\dot{q}_s\dot{q}_k=2T_2$$

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial T_1}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s=\sum_{s=1}^{n}B_s\dot{q}_s=T_1$$

则积分(8.5.9)可表示为

$$2T_2+T_1-T_2-T_1-T_0+V=h$$

即

$$T_2-T_0+V=h \tag{8.5.10}$$

积分(8.5.10)称为**广义能量积分**或 **Jacobi-Painlevé 积分**。特别地,如果动能仅包含广义速度的二次式 $T=T_2$,则积分(8.5.10)成为

$$T+V=h \tag{8.5.11}$$

这就是**能量积分**,或机械能守恒律。

8.5.4 一般完整系统的能量积分

首先,研究方程(8.2.2)的能量积分存在条件。将广义力 Q_s 分为有势的Q_s'和非势的 Q_s''

$$Q_s=Q_s'+Q_s'',Q_s'=-\frac{\partial V}{\partial q_s}$$

则方程(8.2.2)表示为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial L}{\partial q_s}=Q''_s \qquad (s=1,2,\cdots,n) \tag{8.5.12}$$

其中

$$L=T-V$$

将方程(8.5.12)两端同时乘以 $\dot{q}_s$，并对 s 求和，整理得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s-L\right)=\sum_{s=1}^{n}Q''_s\dot{q}_s-\frac{\partial L}{\partial t} \tag{8.5.13}$$

称其为能量变化方程。因此，如果 L 不显含 t，且 Q''_s 为陀螺力，即

$$\frac{\partial L}{\partial t}=0,\ \sum_{s=1}^{n}Q''_s\dot{q}_s=0 \tag{8.5.14}$$

则系统存在广义能量积分

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s-L=h \tag{8.5.15}$$

其次，研究有多余坐标完整系统的 Lagrange 方程(8.2.8)。将此方程两端同时乘以 $\dot{q}_u$，并对 u 求和，得到

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{u=1}^{n+m}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_u}\dot{q}_u-L\right)&=\sum_{u=1}^{n+m}Q''_u\dot{q}_u+\sum_{u=1}^{n+m}\sum_{\gamma=1}^{m}\lambda_\gamma\frac{\partial f_\gamma}{\partial q_u}\dot{q}_u-\frac{\partial L}{\partial t}\\&=\sum_{u=1}^{n+m}Q''_u\dot{q}_u-\sum_{\gamma=1}^{m}\lambda_\gamma\frac{\partial f_\gamma}{\partial t}-\frac{\partial L}{\partial t}\end{aligned}$$

因此，当

$$\frac{\partial f_\gamma}{\partial t}=0,\frac{\partial L}{\partial t}=0,\ \sum_{u=1}^{n+m}Q''_u\dot{q}_u=0 \tag{8.5.16}$$

时，系统有广义能量积分

$$\sum_{u=1}^{n+m}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_u}\dot{q}_u-L=h \tag{8.5.17}$$

8.5.5 利用循环积分的 Routh 降阶法

利用循环积分可降阶 Lagrange 方程。

假设方程(8.4.4)有 k 个循环坐标 $q_1,q_2,\cdots,q_k(1\leqslant k<n)$，则有 k 个循环积分

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}=\beta_j \qquad (j=1,2,\cdots,k) \tag{8.5.18}$$

其左端相对 $\dot{q}_j(j=1,2,\cdots,k)$ 是线性的，因此可解得

$$\dot{q}_j=f_j(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_k,q_{k+1},q_{k+2},\cdots,q_n,\dot{q}_{k+1},\dot{q}_{k+2},\cdots,\dot{q}_n,t) \tag{8.5.19}$$

定义函数

$$R=L-\sum_{j=1}^{k}\dot{q}_j\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \tag{8.5.20}$$

称其为 **Routh 函数**,其中的 $\dot{q}_j$ 需用式(8.5.19)替代,即

$$R=R(q_{k+1},q_{k+2},\cdots,q_n,\dot{q}_{k+1},\dot{q}_{k+2},\cdots,\dot{q}_n,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_k,t) \quad (8.5.21)$$

对式(8.5.21)取等时变分,有

$$\delta R=\sum_{i=k+1}^{n}\frac{\partial R}{\partial q_i}\delta q_i+\sum_{i=k+1}^{n}\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i}\delta\dot{q}_i+\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial R}{\partial \beta_j}\delta\beta_j \quad (8.5.22)$$

对式(8.5.20)取等时变分,得

$$\begin{aligned}\delta R&=\sum_{i=k+1}^{n}\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i+\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\delta\dot{q}_j+\sum_{i=k+1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta\dot{q}_i-\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\delta\dot{q}_j-\sum_{j=1}^{k}\dot{q}_j\delta\beta_j\\&=\sum_{i=k+1}^{n}\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i+\sum_{i=k+1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta\dot{q}_i-\sum_{j=1}^{k}\dot{q}_j\delta\beta_j\end{aligned} \quad (8.5.23)$$

比较式(8.5.23)与式(8.5.22),得到

$$\frac{\partial R}{\partial q_i}=\frac{\partial L}{\partial q_i},\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i}=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \qquad (i=k+1,k+2,\cdots,n) \quad (8.5.24)$$

以及

$$\dot{q}_j=-\frac{\partial R}{\partial \beta_j} \qquad (j=1,2,\cdots,k) \quad (8.5.25)$$

将式(8.5.24)代入 Lagrange 方程(8.4.4),得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial R}{\partial q_i}=0 \qquad (i=k+1,k+2,\cdots,n) \quad (8.5.26)$$

这就是完整系统的 **Routh 方程**,它们由英国力学家 Routh E (1831—1907)于 1876 年给出[8]。Routh 方程的形式与 Lagrange 方程的形式一致,但只剩下了$n-k$个二阶微分方程,达到了降阶目的。式(8.5.25)可用来求 $q_j\,(j=1,2,\cdots,k)$,积分式(8.5.25),得到

$$q_j=-\int\frac{\partial R}{\partial \beta_j}\mathrm{d}t \qquad (j=1,2,\cdots,k) \quad (8.5.27)$$

8.5.6 利用能量积分的 Whittaker 降阶法

利用能量积分可降阶 Lagrange 方程。

能量积分为

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i-L=h \quad (8.5.28)$$

取任一个广义坐标,例如 q_1,来替代 t 的作用。令

$$q_r'=\frac{\mathrm{d}q_r}{\mathrm{d}q_1} \qquad (r=2,3,\cdots,n) \quad (8.5.29)$$

则

$$\dot{q}_r=\frac{\mathrm{d}q_r}{\mathrm{d}q_1}\frac{\mathrm{d}q_1}{\mathrm{d}t}=q_r'\dot{q}_1 \quad (8.5.30)$$

设

$$\Omega(\dot{q}_1, q_r', q_s) = L(\dot{q}_1, q_r'\dot{q}_1, q_s) \qquad (r=2,3,\cdots,n; s=1,2,\cdots,n) \tag{8.5.31}$$

将其分别对 $\dot{q}_1$，q_r'和 q_s 求偏导数，得到

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} + \sum_{r=2}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}\frac{\partial \dot{q}_r}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} + \sum_{r=2}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}\frac{\dot{q}_r}{\dot{q}_1} = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\frac{\dot{q}_s}{\dot{q}_1} \tag{8.5.32}$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial q_r'} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}\dot{q}_1 \qquad (r=2,3,\cdots,n) \tag{8.5.33}$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial q_s} = \frac{\partial L}{\partial q_s} \qquad (s=1,2,\cdots,n) \tag{8.5.34}$$

利用能量积分(8.5.28)和式(8.5.30)，解出 $\dot{q}_1$，记作

$$\dot{q}_1 = \dot{q}_1(q_r', q_s) \tag{8.5.35}$$

考虑到式(8.5.31)和(8.5.32)，能量积分可表示为形式

$$\dot{q}_1 \frac{\partial \Omega}{\partial \dot{q}_1} - \Omega = h \tag{8.5.36}$$

其中 $\dot{q}_1$ 由式(8.5.35)确定。对式(8.5.36)微分，有

$$\dot{q}_1 \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \dot{q}_1^2}\frac{\partial \dot{q}_1}{\partial q_r'} + \dot{q}_1 \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \dot{q}_1 \partial q_r'} - \frac{\partial \Omega}{\partial q_r'} = 0 \tag{8.5.37}$$

$$\dot{q}_1 \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \dot{q}_1^2}\frac{\partial \dot{q}_1}{\partial q_s} + \dot{q}_1 \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \dot{q}_1 \partial q_s} - \frac{\partial \Omega}{\partial q_s} = 0 \tag{8.5.38}$$

取函数

$$W(q_r', q_s) = \frac{\partial \Omega}{\partial \dot{q}_1} \tag{8.5.39}$$

称其为 **Whittaker 函数**。对式(8.5.39)求微分，得

$$\frac{\partial W}{\partial q_r'} = \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \dot{q}_1^2}\frac{\partial \dot{q}_1}{\partial q_r'} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \dot{q}_1 \partial q_r'} \tag{8.5.40}$$

$$\frac{\partial W}{\partial q_s} = \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \dot{q}_1^2}\frac{\partial \dot{q}_1}{\partial q_s} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \dot{q}_1 \partial q_s} \tag{8.5.41}$$

比较式(8.5.37)与式(8.5.40)，得

$$\frac{\partial W}{\partial q_r'} = \frac{1}{\dot{q}_1}\frac{\partial \Omega}{\partial q_r'} \tag{8.5.42}$$

比较式(8.5.38)与式(8.5.41)，得

$$\frac{\partial W}{\partial q_s} = \frac{1}{\dot{q}_1}\frac{\partial \Omega}{\partial q_s} \tag{8.5.43}$$

考虑到式(8.5.33)和式(8.5.34)，得到

$$\frac{\partial W}{\partial q_r'}=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r},\frac{\partial W}{\partial q_s}=\frac{1}{\dot{q}_1}\frac{\partial L}{\partial q_s}\qquad (r=2,3,\cdots,n;s=1,2,\cdots,n)\quad (8.5.44)$$

将式(8.5.44)代入 Lagrange 方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}-\frac{\partial L}{\partial q_r}=0\qquad (r=2,3,\cdots,n)$$

得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial W}{\partial q_r'}-\dot{q}_1\frac{\partial W}{\partial q_r}=0$$

或

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q_1}\frac{\partial W}{\partial q_r'}-\frac{\partial W}{\partial q_r}=0\qquad (r=2,3,\cdots,n)\quad (8.5.45)$$

这就是 **Whittaker 方程**,它们由英国数学家、力学家 Whittaker ET (1873—1956)于 1904 年给出[9]。函数 W 中包含 $q_2', q_3', \cdots, q_n', q_2, q_3, \cdots, q_n, q_1$,其中 q_1 为相当于时间 t 的独立变数。方程(8.5.45)只有(n—1)个,从而达到了降阶目的。

8.5.7 应用举例

例 1 一薄的铅垂平板可无摩擦地绕铅垂轴 Oz 旋转。质点 M 可无摩擦地沿平板上的直槽移动,如图 8.12 所示。已知平板对轴 Oz 的转动惯量为 J,质点的质量为 m,槽与铅垂线间的角 α 为常数($0<\alpha<\pi/2$)。试按以下两种情形,写出系统运动的第一积分:(1)平板的初角速度 $\dot{\psi}_0\neq0$;(2)平板以给定的角速度 ω 转动(Beghin,1948)。

解:(1)平板的初角速度 $\dot{\psi}_0\neq0$ 的情形

此时系统有两个自由度,取距离 $\overline{OM}=r$ 及平板相对空间固定铅垂面 Oxz 的转角 ψ 为广义坐标。质点的动能为

$$T_1=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\psi}^2\sin^2\alpha)$$

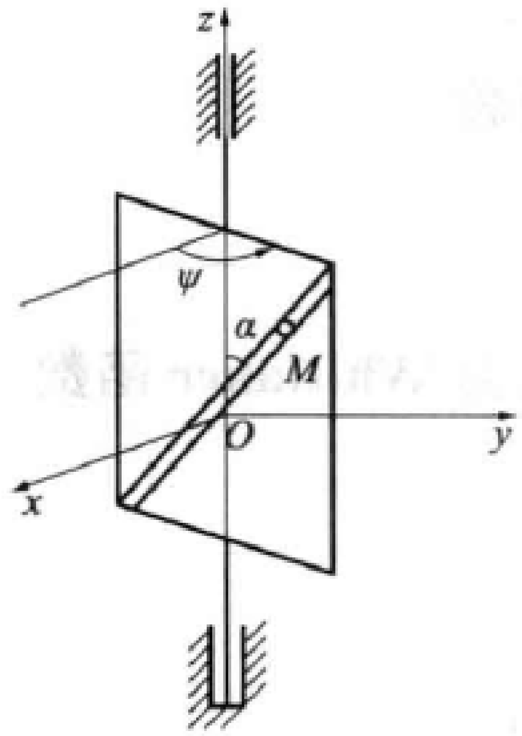


图 8.12

平板的动能为

$$T_2=\frac{1}{2}J\dot{\psi}^2$$

系统的动能为

$$T=T_1+T_2=\frac{1}{2}m\dot{r}^2+\frac{1}{2}(J+mr^2\sin^2\alpha)\dot{\psi}^2$$

系统的势能为

$$V=mgr\cos\alpha$$

因 $L=T-V$ 不显含 ψ,故有循环积分

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}}=k$$

即

$$(J+mr^2\sin^2\alpha)\dot{\psi}=k$$

其中 k 为积分常数。因 T 为 $\dot{r},\dot{\psi}$ 的二次式，系统有能量积分

$$T+V=h$$

即

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2+\frac{1}{2}(J+mr^2\sin^2\alpha)\dot{\psi}^2+mgr\cos\alpha=h$$

这就是机械能守恒律。

(2)平板以给定的常角速度 ω 转动的情形

此时系统有一个自由度，取 $\overline{OM}=r$ 为广义坐标。系统的动能为

$$T=\frac{1}{2}m\dot{r}^2+\frac{1}{2}(J+mr^2\sin^2\alpha)\omega^2$$

势能为

$$V=mgr\cos\alpha$$

Lagrange 函数为

$$L=T-V=\frac{1}{2}m\dot{r}^2+\frac{1}{2}(J+mr^2\sin^2\alpha)\omega^2-mgr\cos\alpha$$

因 r 明显出现于 L 中，故系统没有循环积分。系统也没有机械能守恒，因为 T 中包含不依赖于广义速度的项 $T_0=\frac{1}{2}(J+mr^2\sin^2\alpha)\omega^2$。但因 L 不显含 t，故有 Jacobi-Painlevé 积分

$$T_2-T_0+V=h$$

即

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2-\frac{1}{2}(J+mr^2\sin^2\alpha)\omega^2+mgr\cos\alpha=h$$

这个方程在初始条件 $t=t_0, r=r_0, \dot{r}=\dot{r}_0$ 下的解为

$$r=\left(r_0-\frac{g\cos\alpha}{\omega^2\sin\alpha}\right)\operatorname{ch}(\omega t\sin\alpha)+\frac{\dot{r}_0}{\omega\sin\alpha}\operatorname{sh}(\omega t\sin\alpha)+\frac{g\cos\alpha}{\omega^2\sin\alpha}$$

例 2 一均质杆 AB，长 l，重 P，杆的端点 A 沿铅垂线无摩擦地滑动，而端点 B 则在水平面上无摩擦地滑动，如图 8.13 所示。求杆运动的第一积分。

解：杆 AB 所受约束是双面理想完整的，有两个自由度。取杆

AB 和铅垂线 Oz 构成的平面与空间固定平面 Oxz 的夹角 θ，以及杆 AB 与轴 Oz 的夹角 φ 为广义坐标。杆质心 C 的坐标为

$$x_c=l\sin\varphi\cos\theta,\ y=l\sin\varphi\sin\theta,\ z=l\cos\varphi$$

速度为

$$\dot{x}_c=l\dot{\varphi}\cos\varphi\cos\theta-l\dot{\theta}\sin\varphi\sin\theta$$

$$\dot{y}_c=l\dot{\varphi}\cos\varphi\sin\theta+l\dot{\theta}\sin\varphi\cos\theta$$

$$\dot{z}_c=-l\dot{\varphi}\sin\varphi$$

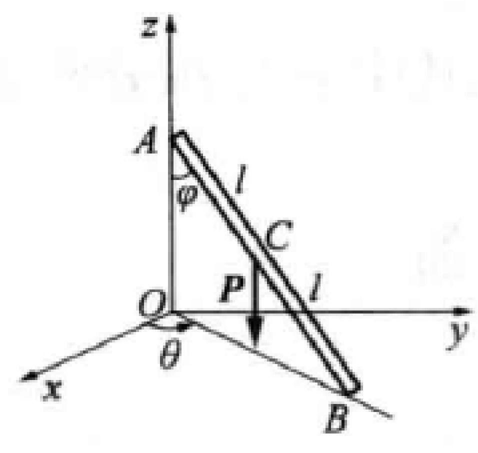


图 8.13

于是

$$\dot{x}_c^2+\dot{y}_c^2+\dot{z}_c^2=l^2\dot{\varphi}^2+l^2\dot{\theta}^2\sin^2\varphi$$

杆的动能为

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{x}_c^2+\dot{y}_c^2+\dot{z}_c^2)+\frac{1}{2}J_c(\dot{\varphi}^2+\dot{\theta}^2\sin^2\varphi)$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}ml^2(\dot{\varphi}^2+\dot{\theta}^2\sin^2\varphi)$$

势能为

$$V=mgl\cos\varphi$$

Lagrange 函数为

$$L=T-V=\frac{2}{3}ml^2(\dot{\varphi}^2+\dot{\theta}^2\sin^2\varphi)-mgl\cos\varphi$$

系统有两个第一积分。因 L 不显含 θ，故有循环积分

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}=C$$

即

$$\frac{4}{3}ml^2\dot{\theta}\sin^2\varphi=C$$

又因 $T=T_2$，故有能量积分

$$T+V=h$$

即

$$\frac{2}{3}ml^2(\dot{\varphi}^2+\dot{\theta}^2\sin^2\varphi)+mgl\cos\varphi=h$$

例 3 二自由度系统的动能和势能分别为

$$T=\frac{1}{2}\frac{\dot{q}_1^2}{a+bq_2^2}+\frac{1}{2}\dot{q}_2^2,\ V=a_1+b_1q_2^2$$

其中 a,b,a_1,b_1 为正值常数。试求系统的运动。

解:因

$$L=T-V=\frac{1}{2}\frac{\dot{q}_1^2}{a+bq_2^2}+\frac{1}{2}\dot{q}_2^2-a_1-b_1q_2^2$$

不含 q_1,故 q_1 为循环坐标,相应的循环积分为

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}=\frac{\dot{q}_1}{a+bq_2^2}=\beta$$

由此解得

$$\dot{q}_1=\beta(a+bq_2^2)$$

按式(8.5.20)构造 Routh 函数,并利用上式消去 $\dot{q}_1$,得

$$\begin{aligned}R&=L-\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\dot{q}_1\\&=-\frac{1}{2}\frac{\dot{q}_1^2}{a+bq_2^2}+\frac{1}{2}\dot{q}_2^2-a_1-b_1q_2^2\\&=-\frac{1}{2}\beta^2(a+bq_2^2)+\frac{1}{2}\dot{q}_2^2-a_1-b_1q_2^2\end{aligned}$$

Routh 方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_2}-\frac{\partial R}{\partial q_2}=0$$

成为

$$\ddot{q}_2+(2b_1+b\beta^2)q_2=0$$

其通解为

$$q_2=A\sin(\sqrt{2b_1+b\beta^2}\,t+\alpha)$$

其中 A,α 为常数,由初始条件确定。循环坐标按式(8.5.27)为

$$\begin{aligned}q_1&=-\int\frac{\partial R}{\partial \beta}\mathrm{d}t=\int\beta(a+bq_2^2)\,\mathrm{d}t\\&=\beta at+\beta b\int A^2\sin^2(\sqrt{2b_1+b\beta^2}\,t+\alpha)\,\mathrm{d}t\\&=\beta\left(a+\frac{1}{2}bA^2\right)t-\frac{\beta bA^2}{4\sqrt{2b_1+b\beta^2}}\sin2(\sqrt{2b_1+b\beta^2}\,t+\alpha)+C\end{aligned}$$

其中 A,α,β,C 为积分常数,由初始条件确定。

例 4 二自由度系统的 Lagrange 函数为

$$L=\frac{1}{2}f(q_2)\dot{q}_1^2+\frac{1}{2}\dot{q}_2^2-\psi(q_2)$$

试用 Whittaker 方法求解。

解:系统有能量积分

$$\frac{1}{2}f(q_2)\dot{q}_1^2+\frac{1}{2}\dot{q}_2^2+\psi(q_2)=h$$

将 $\dot{q}_2=\dot{q}_1q'_2$ 代入上式，得

$$\frac{1}{2}f(q_2)\dot{q}_1^2+\frac{1}{2}(\dot{q}_1q'_2)^2+\psi(q_2)=h$$

解出 $\dot{q}_1$，有

$$\dot{q}_1=\sqrt{\frac{2h-2\psi(q_2)}{f(q_2)+q'^2_2}}$$

按式(8.5.31)构造函数 Ω，有

$$\Omega=\frac{1}{2}f(q_2)\dot{q}_1^2+\frac{1}{2}(\dot{q}_1q'_2)^2-\psi(q_2)$$

构造 Whittaker 函数

$$W=\frac{\partial\Omega}{\partial\dot{q}_1}=f(q_2)\dot{q}_1+(\dot{q}_1q'_2)q'_2=[f(q_2)+q'^2_2]\dot{q}_1$$

代入 $\dot{q}_1$，得

$$W=\sqrt{2[h-\psi(q_2)][f(q_2)+q'^2_2]}$$

Whittaker 方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q_1}\left(\frac{\partial W}{\partial q'_2}\right)-\frac{\partial W}{\partial q_2}=0$$

因 W 不含 q_1，可得新的能量积分

$$\frac{\partial W}{\partial q'_2}q'_2-W=K$$

即

$$\frac{\sqrt{2}\sqrt{h-\psi(q_2)}}{\sqrt{f(q_2)+q'^2_2}}[q'^2_2-f(q_2)-q'^2_2]=K$$

解出 q'_2，得

$$q'_2=\sqrt{\frac{2[f(q_2)]^2[h-\psi(q_2)]}{K^2}-f(q_2)}$$

积分得

$$q_1=\frac{K}{\sqrt{2}}\int\frac{\mathrm{d}q_2}{\sqrt{f(q_2)\left\{f(q_2)[h-\psi(q_2)]-\frac{K^2}{2}\right\}}}$$

§8.6 变量可分离的 Lagrange 方程和Liouville方程

本节讨论一类完全可积系统，包括分离变量与局部能量积分，以及Liouville方程。

8.6.1 分离变量与局部能量积分

研究一完整有势的力学系统，广义坐标为 $q_s(s=1,2,\cdots,n)$。如果有一个广义坐标，例如 q_1，可在系统的动能 T 和势能 V 中被分离出来，即

$$
\begin{aligned}
T&=T_1+\widetilde{T}(q_2,q_3,\cdots,q_n,\dot{q}_2,\dot{q}_3,\cdots,\dot{q}_n)\\
V&=V_1+\widetilde{V}(q_2,q_3,\cdots,q_n)
\end{aligned}
\tag{8.6.1}
$$

其中

$$
T_1=\frac{1}{2}u_1(q_1)\dot{q}_1^2,V_1=W_1(q_1) \tag{8.6.2}
$$

此时对 q_1 的 Lagrange 方程

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}-\frac{\partial L}{\partial q_1}=0
$$

给出

$$
u_1(q_1)\ddot{q}_1+\frac{1}{2}u_1'(q_1)\dot{q}_1^2=-W_1'(q_1)
$$

两端同时乘以 $2\dot{q}_1$，得到

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[u_1(q_1)\dot{q}_1^2+2W_1(q_1)]=0
$$

积分得

$$
T_1+V_1=\frac{1}{2}u_1(q_1)\dot{q}_1^2+W_1(q_1)=C_1=\text{const.} \tag{8.6.3}
$$

这样的广义坐标 q_1 称为系统的分离保守坐标。对于分离保守坐标，有**局部能量积分**(8.6.3)。利用局部能量积分，q_1 可以积分出来。由式(8.6.3)得到

$$
\frac{\mathrm{d}q_1}{\mathrm{d}t}=\sqrt{\frac{2[C_1-W_1(q_1)]}{u_1(q_1)}}
$$

因此有

$$
t=\int\sqrt{\frac{u_1(q_1)}{2[C_1-W_1(q_1)]}}\mathrm{d}q_1+\gamma_1 \tag{8.6.4}
$$

如果系统的所有广义坐标 $q_1,q_2,\cdots,q_n$ 全部为分离保守的，即

$$
T=\sum_{s=1}^{n}T_s,V=\sum_{s=1}^{n}V_s \tag{8.6.5}
$$

其中

$$T_s=\frac{1}{2}u_s(q_s)\dot{q}_s^2,V_s=W_s(q_s) \tag{8.6.6}$$

此时系统有 n 个分离变量的局部能量积分

$$T_s+V_s=\frac{1}{2}u_s(q_s)\dot{q}_s^2+W_s(q_s)=C_s=\text{const.}\qquad (s=1,2,\cdots,n) \tag{8.6.7}$$

需要注意的是,系统的总能量积分只是这 n 个积分的推论,不是另一个独立的积分。

利用 n 个局部能量积分,系统的运动完全可用积分表达出来

$$t=\int\sqrt{\frac{u_s(q_s)}{2[C_s-W_s(q_s)]}}\mathrm{d}q_s+\gamma_s\qquad (s=1,2,\cdots,n) \tag{8.6.8}$$

式(8.6.8)给出了系统全部的解,其中 C_s,γ_s 为 $2n$ 个积分常数。

8.6.2 Liouville 方程

法国数学家 Liouville J (1809—1882)将上述结果推广如下:凡力学系统的动能和势能可以分别写成形式[9]

$$\begin{gathered}T=\frac{1}{2}\{u_1(q_1)+u_2(q_2)+\cdots+u_n(q_n)\}\{V_1(q_1)\dot{q}_1^2+V_2(q_2)\dot{q}_2^2+\cdots+V_n(q_n)\dot{q}_n^2\}\\ V=\frac{W_1(q_1)+W_2(q_2)+\cdots+W_n(q_n)}{u_1(q_1)+u_2(q_2)+\cdots+u_n(q_n)}\end{gathered} \tag{8.6.9}$$

那么,此力学系统可以分成单积分的形式来求解。

令

$$\sqrt{V_s(q_s)}\mathrm{d}q_s=\mathrm{d}\tilde{q}_s\qquad (s=1,2,\cdots,n) \tag{8.6.10}$$

则有

$$\dot{\tilde{q}}_s^2=V_s(q_s)\dot{q}_s^2$$

于是,式(8.6.9)变为

$$\begin{gathered}T=\frac{1}{2}\{\tilde{u}_1(\tilde{q}_1)+\tilde{u}_2(\tilde{q}_2)+\cdots+\tilde{u}_n(\tilde{q}_n)\}\{\dot{\tilde{q}}_1^2+\dot{\tilde{q}}_2^2+\cdots+\dot{\tilde{q}}_n^2\}\\ V=\frac{\tilde{W}_1(\tilde{q}_1)+\tilde{W}_2(\tilde{q}_2)+\cdots+\tilde{W}_n(\tilde{q}_n)}{\tilde{u}_1(\tilde{q}_1)+\tilde{u}_2(\tilde{q}_2)+\cdots+\tilde{u}_n(\tilde{q}_n)}\end{gathered} \tag{8.6.11}$$

为书写简单,以下略去上方～号,并令

$$u=\sum_{s=1}^{n}u_s(q_s),W=\sum_{s=1}^{n}W_s(q_s) \tag{8.6.12}$$

于是有

$$T=\frac{1}{2}u(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2+\cdots+\dot{q}_n^2),V=\frac{W}{u} \tag{8.6.13}$$

关于 q_1 的 Lagrange 方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}-\frac{\partial T}{\partial q_1}=-\frac{\partial V}{\partial q_1}$$

成为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(u\dot{q}_1)-\frac{1}{2}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2+\cdots+\dot{q}_n^2)\frac{\partial u}{\partial q_1}=-\frac{\partial V}{\partial q_1} \tag{8.6.14}$$

将两端乘以 $2u\dot{q}_1$，得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(u^2\dot{q}_1^2)-u\dot{q}_1(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2+\cdots+\dot{q}_n^2)\frac{\partial u}{\partial q_1}=-2u\dot{q}_1\frac{\partial V}{\partial q_1} \tag{8.6.15}$$

系统有能量积分

$$\frac{1}{2}u(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2+\cdots+\dot{q}_n^2)=h-V \tag{8.6.16}$$

其中 h 为能量常数。将式(8.6.16)代入式(8.6.15)，得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(u^2\dot{q}_1^2)&=2(h-V)\dot{q}_1\frac{\partial u}{\partial q_1}-2u\dot{q}_1\frac{\partial V}{\partial q_1}\\&=2\dot{q}_1\frac{\partial}{\partial q_1}\{(h-V)u\}\\&=2\dot{q}_1\frac{\partial}{\partial q_1}\{hu_1(q_1)-W_1(q_1)\}\\&=2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\{hu_1(q_1)-W_1(q_1)\}\end{aligned}$$

积分之，得到第一个局部能量积分

$$\frac{1}{2}u^2\dot{q}_1^2=hu_1(q_1)-W_1(q_1)+\gamma_1 \tag{8.6.17}$$

其中 γ_1 为积分常数。类似地，对 $q_2,q_3,\cdots,q_n$ 可得到形式相同的积分

$$\frac{1}{2}u^2\dot{q}_s^2=hu_s(q_s)-W_s(q_s)+\gamma_s \qquad (s=2,3,\cdots,n) \tag{8.6.18}$$

由式(8.6.17)和(8.6.18)，得到

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}q_1}{\sqrt{hu_1(q_1)-W_1(q_1)+\gamma_1}}&=\frac{\mathrm{d}q_2}{\sqrt{hu_2(q_2)-W_2(q_2)+\gamma_2}}=\cdots\\&=\frac{\mathrm{d}q_n}{\sqrt{hu_n(q_n)-W_n(q_n)+\gamma_n}}=\frac{\sqrt{2}}{u}\mathrm{d}t\end{aligned} \tag{8.6.19}$$

以上各式变量已分离，因此可以分别积分。

由于能量积分的存在，积分常数 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n$ 不是彼此独立的。实际上，将式(8.6.17)和式(8.6.18)相加，并对 s 求和，得到

$$\frac{1}{2}u^2(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2+\cdots+\dot{q}_n^2)=h\sum_{s=1}^{n}u_s(q_s)-\sum_{s=1}^{n}W_s(q_s)+\sum_{s=1}^{n}\gamma_s$$

即

$$uT=hu-uV+\sum_{s=1}^{n}\gamma_s$$

或

$$\sum_{s=1}^{n}\gamma_s=u(T+V-h)=0$$

8.6.3 应用举例

例 1 多自由度常系数线性系统是一类完全分离保守系统。

解:多自由度常系数线性系统的微分方程表示为

$$\sum_{k=1}^{n}(a_{sk}\ddot{q}_k+b_{sk}q_k)=0\qquad(s=1,2,\cdots,n)$$

与其相应的力学系统的动能 T 和势能 V 分别为

$$T=\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{sk}\dot{q}_s\dot{q}_k,V=\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}b_{sk}q_sq_k$$

由于 T 是广义速度的正定二次型,根据代数已知定理,一定可以找到一个非奇异线性变换,使得 T 化成平方和,而 V 同时化成带系数的平方和,即化成

$$T=\sum_{s=1}^{n}\dot{\tilde{q}}_s^2,V=\sum_{s=1}^{n}\lambda_s\tilde{q}_s^2$$

对比式(8.6.5)知,系统显然是完全分离保守系统。因此存在 n 个局部能量积分,并且系统是完全可积的。

例 2 试用 Liouville 方程求长为 l 的球面摆的运动积分。

解:如图 8.14 所示,应用球坐标,将质点动能写成

$$T=\frac{1}{2}m(l^2\dot{\theta}^2+l^2\dot{\varphi}^2\sin^2\theta)$$

势能表示为

$$V=mgl\cos\theta$$

为应用 Liouville 方程,将 T 和 V 表示为

$$T=\frac{1}{2}ml^2\sin^2\theta\left[\frac{\dot{\theta}^2}{\sin^2\theta}+\dot{\varphi}^2\right]$$

$$V=\frac{m^2gl^3\cos\theta\sin^2\theta}{ml^2\sin^2\theta}$$

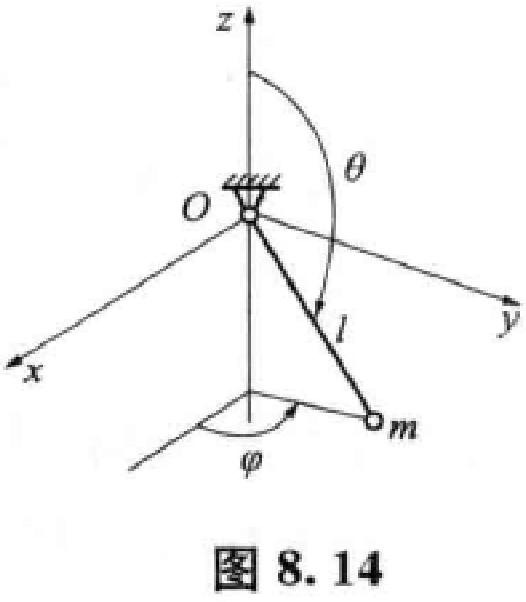


图 8.14

对照式(8.6.9),有

$$u_\theta(\theta)=ml^2\sin^2\theta,V_\theta(\theta)=\frac{1}{\sin^2\theta}$$

$$W_\theta(\theta)=m^2gl^3\cos\theta\sin^2\theta$$

$$u_\varphi(\varphi)=0,V_\varphi(\varphi)=1,W_\varphi(\varphi)=0$$

令

$$\dot{\tilde{\theta}}^2=\frac{\dot{\theta}^2}{\sin^2\theta},\dot{\tilde{\varphi}}=\dot{\varphi}$$

则式(8.6.19)给出

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{\theta}}{\sqrt{ml^2h\sin^2\theta-m^2gl^3\cos\theta\sin^2\theta+\gamma_1}}=\frac{\mathrm{d}\,\tilde{\varphi}}{\sqrt{\gamma_2}}=\frac{\sqrt{2}\mathrm{d}t}{ml^2\sin^2\theta}$$

于是有下面两个关系

$$\int_{\theta_0}^{\theta}\frac{ml^2\sin\theta\mathrm{d}\theta}{\sqrt{2}\sqrt{ml^2\sin^2\theta(h-mgl\cos\theta)+\gamma_1}}=t-t_0$$

$$\int_{\theta_0}^{\theta}\frac{\sqrt{\gamma_2}\mathrm{d}\theta}{\sin\theta\sqrt{ml^2\sin^2\theta(h-mgl\cos\theta)+\gamma_1}}=\varphi-\varphi_0$$

其中

$$\gamma_1+\gamma_2=0$$

本章讨论了 Lagrange 方程的由来、导出、结构、降阶法等，涉及 Lagrange 方程的基本问题。在第 9～11 章讨论 Lagrange 方程的若干专门问题。

思考题

8.1 用动能定理能导出 Lagrange 方程吗?

8.2 有势力情形的 Lagrange 方程有形式(8.4.4)，非势力情形不可能有形式(8.4.4)。这样说行吗?

8.3 一维谐振子的方程为 $\ddot{q}+\omega^2q=0$，能否对应不止一个 Lagrange 函数?

8.4 系统 $L=\frac{1}{2}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2)-\frac{1}{2}q_1^2,Q_1=-\dot{q}_2,Q_2=\dot{q}_1$ 有能量积分。对否?

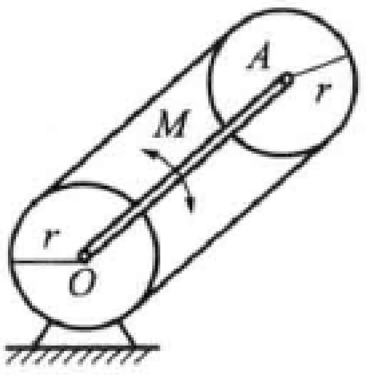
8.5 系统 Lagrange 函数为 $L=\frac{1}{2}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2)-\frac{1}{2}(q_1^2+q_2^2)$，所受双面理想约束为 $f(q_1,q_2)=0$，则系统有能量积分。对否?

8.6 双面理想完整约束系统的运动方程，除 Lagrange 方程外，还有其他形式吗?

习题

8.1 如图所示,曲柄 $OA=l$,由转矩 M 使其绕一固定滑轮的中心 O 转动,滑轮半径为 r。曲柄的一端 A 上带一动滑轮,其半径也为 r。定滑轮与动滑轮用皮带联结,皮带拉紧,使当系统运动时,皮带不沿轮缘滑动。设曲柄为均质杆,重 P,滑轮重 Q,机构在水平面内。试求曲柄的角加速度。

答:$\alpha=\dfrac{3Mg}{(P+3Q)l^2}$



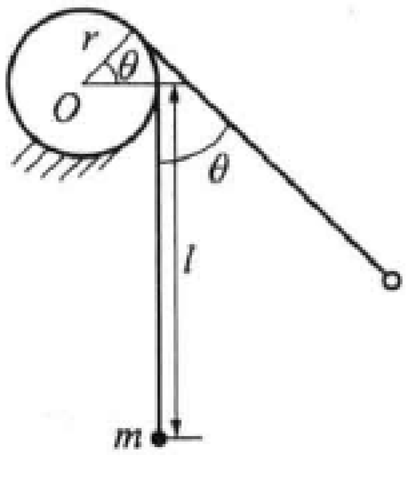
题 8.1 图

8.2 如图所示,一质点质量为 m,挂在一条线上,线的另一端绕在半径为 r 的固定圆柱体上。设在平衡位置时线长为 l,且不计线的质量。试列写质点摆动的运动方程。

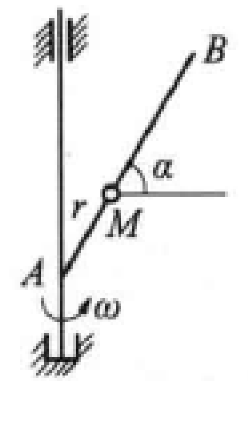
答:$(l+r)\ddot{\theta}+r^2\dot{\theta}^2+g\sin\theta=0$

8.3 如图所示,一质点 M 在重力作用下沿一以等角速度 ω 绕固定铅垂轴转动的直线 AB 而运动,直线 AB 与水平呈角 α。假设 M 与杆 AB 是光滑接触的。求此质点的运动规律。

答:$r=C_1\exp(\omega t\cos\alpha)+C_2\exp(-\omega t\cos\alpha)+\dfrac{g\sin\alpha}{\omega^2\cos^2\alpha}$



题 8.2 图

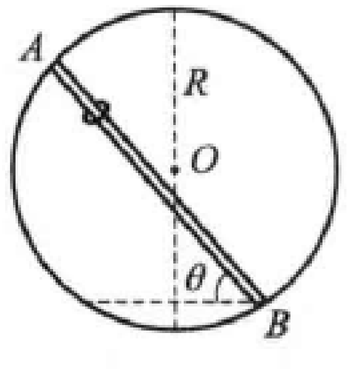


题 8.3 图

8.4 如图所示,一均质杆长 $2a$,质量为 M,两端在一半径为 R 的光滑固定水平圆周上滑动,另一质量为 m 的小环以不变的相对速度 v 沿杆运动,试求杆的运动。

答:$t=0,\theta=\theta_0$,m 在杆的中点

$$\theta-\theta_0=C\arctan\frac{vt}{\sqrt{R^2-a^2-\dfrac{M}{m}\left(R^2-\dfrac{2}{3}a^2\right)}}$$



题 8.4 图

8.5 如图所示,一车在斜面上无滑动地滚动,斜面与水平面呈角 α。同时另一圆柱体在车板(与斜面平行)上无滑动地滚动,圆柱体母线与平板的最大斜坡线相垂直。车的质量(车轮除外)为 M,所有车轮的总质量为 m,圆柱体质量

为 M_1，设车轮为均质密实圆盘。试求车的加速度。

答：小车质心坐标 x，圆柱体相对小车转角 φ，

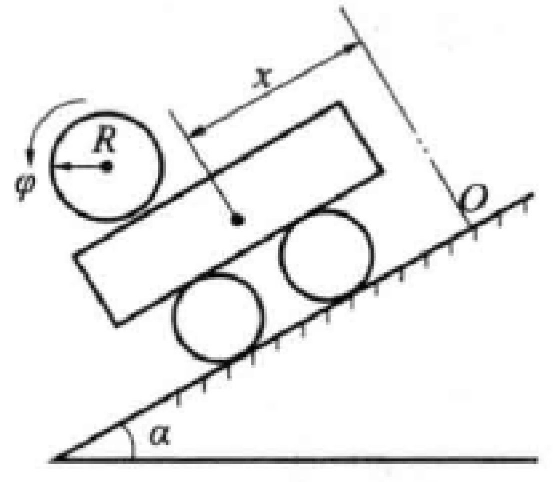
$$\ddot{x}=\frac{6M+6m+2M_1}{6M+9m+2M_1}g\sin\alpha$$

8.6 如图所示，一均质圆盘半径为 R，质量为 M，可绕其自身水平轴 O 转动。在圆盘的圆周上以长 l 的绳 AB 悬一质量为 m 的质点。试列写系统的运动方程。

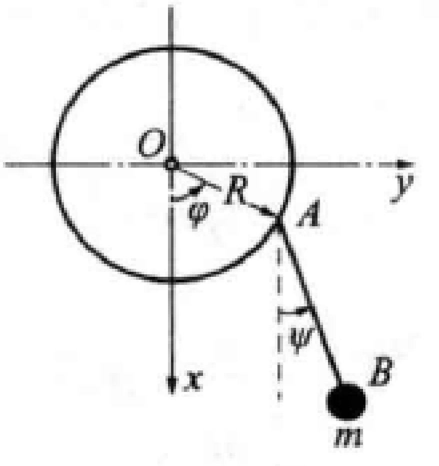
答：

$$\left(m+\frac{M}{2}\right)R^2\ddot{\varphi}+mRl\cos(\varphi-\psi)\ddot{\psi}+mRl\dot{\psi}^2\sin(\varphi-\psi)+mgR\sin\varphi=0,$$

$$mRl\ddot{\varphi}\cos(\varphi-\psi)+ml^2\ddot{\psi}-mRl\dot{\varphi}^2\cos(\varphi-\psi)+mgl\sin\psi=0$$



题 8.5 图



题 8.6 图

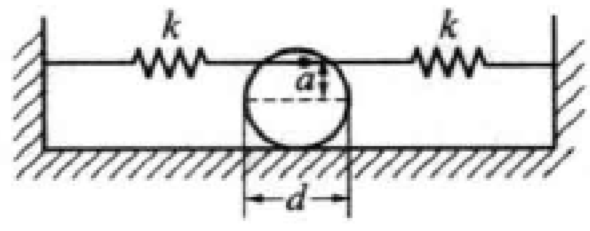
8.7 如图所示，一圆柱直径为 d，质量为 m，可在水平面上滚而不滑。两刚性系数为 k 的相同弹簧联结于圆柱上。联结点在圆柱长度的中点，离轴线为 a，两弹簧被固定。求圆柱振动的周期。

答：$T=\dfrac{\sqrt{3}\pi}{1+\dfrac{2a}{d}}\sqrt{\dfrac{m}{k}}$

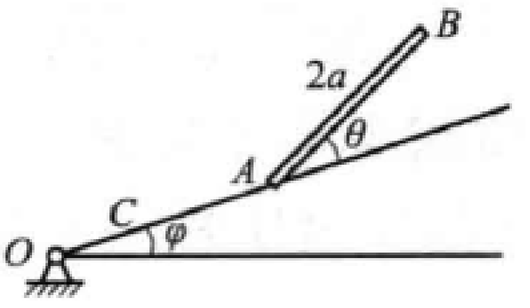
8.8 如图所示，一均质杆 AB，长 $2a$，放在光滑水平面上。杆的一端拴于不可伸长的长为 C 的轻线上。线的另一端被固定在水平面上的点 O。开始时 OAB 共线，而杆在垂直于其长度方向上以速度 v 无转动地抛出。试证：杆与线间的最大张角的余弦是 $1-a/6c$。

8.9 如图所示，四根相同的均质杆，长 $2a$，被光滑地铰接为菱形 $ABCD$。点 A 固定，而点 C 自由地在一通过 A 的光滑铅垂杆上运动。开始时 C 与 A 重合，而整个系统以角速度 ω 绕铅垂线转动。试证，如果在后续运动中 2α 是上面两杆的最小夹角，则有

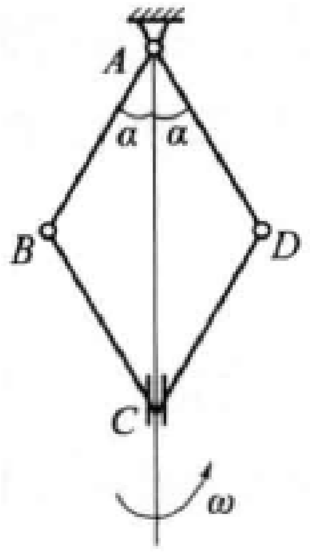
$$a\omega^2\cos\alpha=3g\sin^2\alpha$$



题 8.7 图



题 8.8 图



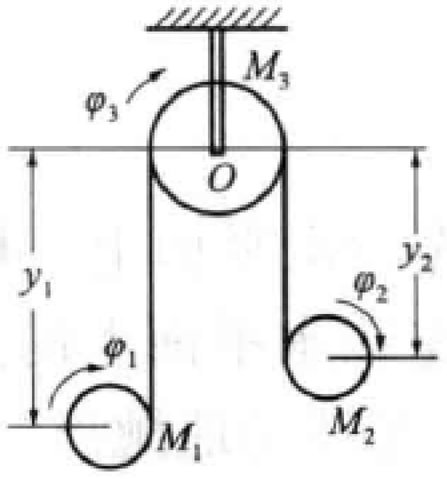
题 8.9 图

8.10 如图所示,两皮带轮 M_1 和 M_2,质量为 m_1 和 m_2,半径为 r_1 和 r_2,其上缠有绳子。此绳绕过一质量为 m_3,半径为 r_3 的滑轮 M_3,滑轮 M_3 可无摩擦地绕定轴 O 转动。设绳子与滑轮之间没有滑动,而皮带轮中心皆沿铅垂直线运动。求滑轮的角加速度 $\ddot{\varphi}_3$ 以及两皮带轮中心的加速度 $\ddot{y}_1$,$\ddot{y}_2$。

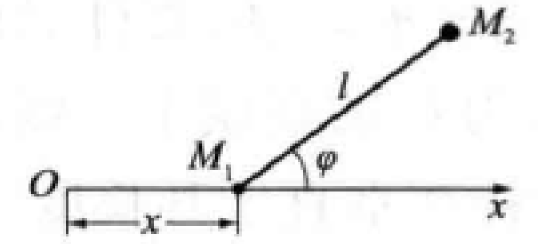
答:$\ddot{\varphi}_3=\dfrac{m_2-m_1}{\left(m_1+m_2+\dfrac{3}{2}m_3\right)r_3}g$

$$\ddot{y}_1=\frac{3(m_1+m_3)+m_2}{3\left(m_1+m_2+\dfrac{3}{2}m_3\right)}g,\ddot{y}_2=\frac{3(m_1+m_3)+m_1}{3\left(m_1+m_2+\dfrac{3}{2}m_3\right)}g$$

8.11 如图所示,一质量为 m_1 的质点 M_1 被限制在水平固定直线 Ox 上无摩擦地滑动。一质量为 m_2 的质点 M_2 用一质量可忽略的长 l 的杆和前一质点相连,此杆仅能在通过该固定直线的铅垂平面内运动。设此二质点仅受重力作用。试列写系统的 Lagrange 函数 L。



题 8.10 图



题 8.11 图

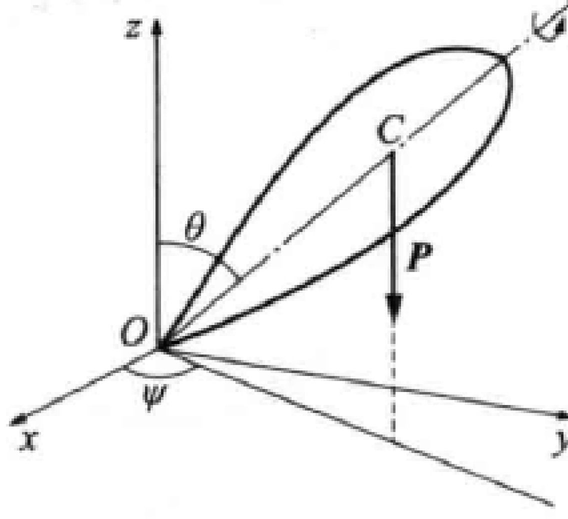
8.12 质量为 m_1 和 m_2 的两质点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 和 $M_2(x_2,y_2,z_2)$ 按牛顿定律相互吸引,引力为 $\dfrac{fm_1m_2}{r^2}$,其中 f 为常数,r 为两点间距离。试列写系统的 Lagrange 函数 L。

8.13 如图所示,一对称陀螺支在固定支座上,并且仅受重力作用。广义坐标取为:陀螺自转角 φ、章动角 θ 及进动角 ψ。设陀螺对点 O 的主转动惯量为 A,A,C。试列写问题的 Lagrange 函数。

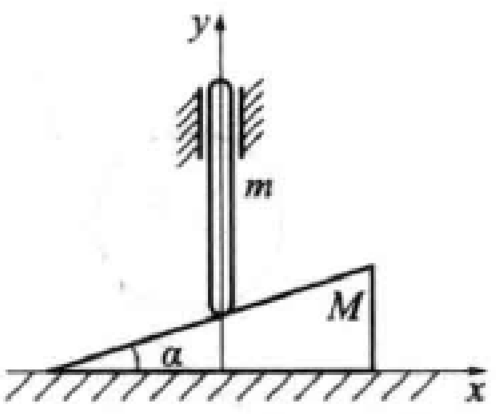
8.14 质量为 m 的直杆可自由地在固定铅垂套管中移动,杆下端搁在质量

为 M 的绝对光滑的尖劈上，而尖劈置于绝对光滑的水平面上。由于杆子的压力，尖劈向水平方向移动。试求两物体的加速度。

答：杆 $\ddot{y}=-\dfrac{mg}{m+M\cot\alpha}$；劈 $\ddot{x}=-\ddot{y}\cot\alpha$

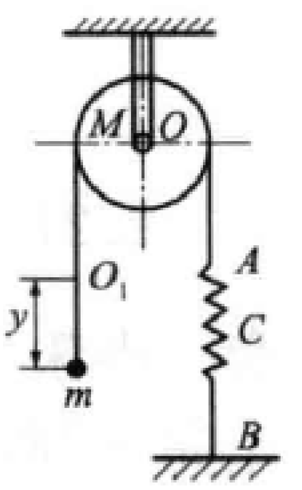


题 8.13 图



题 8.14 图

8.15 如图所示，一滑轮可绕水平轴 O 转动，在此滑轮上绕过一条不可伸长的绳子，绳的一端挂一质量为 m 的重物，另一端 A 固结一铅垂的弹簧，其 B 端固定不动。已知滑轮质量为 M，并分布于轮缘上，而绳子与滑轮间无滑动。试求重物的振动周期。



题 8.15 图

答：$T=2\pi\sqrt{\dfrac{M+m}{k}}$　　k 为弹簧刚性系数

8.16 具有一个自由度的质点在势力场中运动，试由能量守恒定律导出质点的 Lagrange 方程。

8.17 试求由 Lagrange 函数 $L=t\sqrt{1+\dot{x}^2}$ 所决定的点的运动规律。

答：$x=C_1\operatorname{arcch}\dfrac{t}{C_1}+C_2$

8.18 质量为 m 的重质点可在铅垂面 Oxz 内沿曲线 $z=f(x)$ 做无摩擦运动。试建立 Lagrange 方程，并求其第一积分。

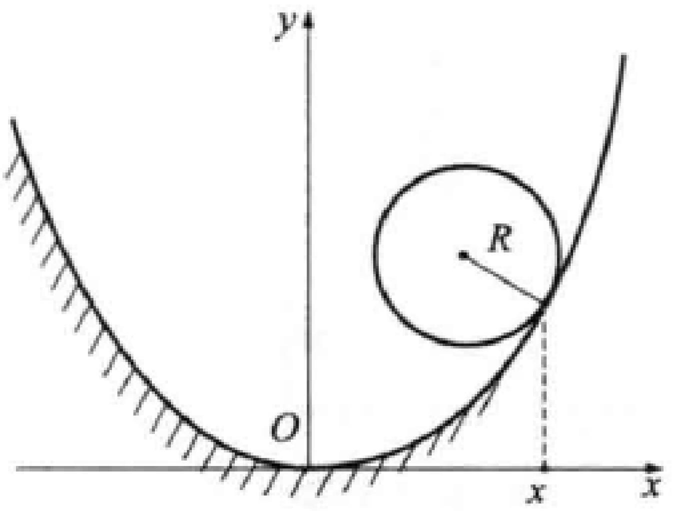
答：$\ddot{x}\left[1+\left(\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right)^2\right]+\dfrac{\mathrm{d}^2f}{\mathrm{d}x^2}\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\dot{x}^2+\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}g=0$

8.19 如图所示，半径为 R，质量为 m 的均质圆盘沿抛物线 $y=\dfrac{1}{2}ax^2$ 无滑动地滚动。轴 Oy 是铅垂的，$Ra\leqslant 1$。取切点横坐标 x 作为广义坐标，试写出 Lagrange 函数 L。

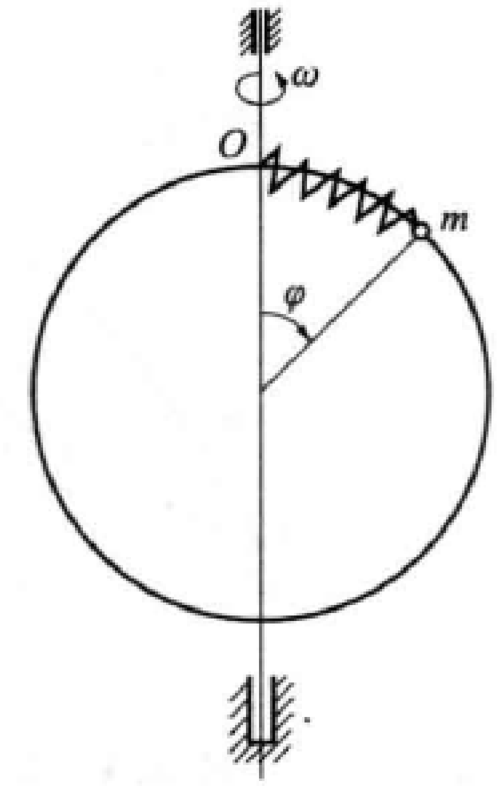
答：$L=\dfrac{3}{4}m\dot{x}^2\left[\dfrac{(1+a^2x^2)^{\frac{3}{2}}-ak}{1+a^2x^2}\right]^2-\dfrac{1}{2}mga\left[x^2+\dfrac{2R}{a}(1+a^2x^2)^{-\frac{1}{2}}\right]$

8.20 如图所示，半径为 R 的光滑金属线圆周以匀角速度 ω 绕其铅垂直径转动。在圆周上套有质量为 m 的圆环，圆环用刚度为 k 的弹簧与圆柱上的点联结，如图所示。弹簧未变形时长为 $R\varphi_0$。试用 Lagrange 方程列写圆环的相对运动微分方程。

答：$L=\frac{1}{2}mR^2(\dot{\varphi}^2+\omega^2\sin^2\varphi)-\frac{1}{2}kR^2(\varphi-\varphi_0)^2$



题 8.19 图



题 8.20 图

8.21 一圆环以角速度$\sqrt{\frac{ng}{a}}$绕其铅垂直径转动，其中 a 为圆环半径。环上套一小珠，现给小珠以初速度，使它恰可从环的最低点升至最高点。试证：质点走完 90°所需时间为

$$\sqrt{\frac{a}{(n+1)g}}\ln(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1})$$

8.22 在光滑水平桌面上，有质量为 m 的两个质点用一根不可伸长的线紧直地连着，线长为 a。运动开始时，一质点不动，另一质点有垂直于线方向的速度$\frac{P}{m}$。取一质点的坐标(x,y)以及线与初始位置间的夹角 θ 为广义坐标，试列写系统的 Lagrange 函数 L，写出运动的第一积分，并证明 $\dot{\theta}=\frac{P}{ma}$，且两质点各做圆滚线运动。

8.23 如果

$$\frac{\partial T}{\partial t}=F'(t),\ \sum_{k=1}^{n}Q_k\mathrm{d}q_k=\mathrm{d}U(q)$$

试证系统

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_s}-\frac{\partial T}{\partial q_s}=Q_s\qquad(s=1,2,\cdots,n)$$

有积分

$$T_2-T_0=U+F(t)+h$$

8.24 对 Lagrange 方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_s}-\frac{\partial L}{\partial q_s}=Q_s\qquad(s=1,2,\cdots,n)$$

试证，如果满足条件

$$-2\dot{T}_0-T_1+\frac{\partial L}{\partial t}=\sum_{s=1}^{n}Q_s\dot{q}_s$$

则有机械能守恒律

$$T+V=h$$

参考文献

[1]Lagrange JL. Mécanique Analytique[M]. Vol I. Quatrième Édition. Paris: Jaques Gabay, 2006.

[2]Лурье АИ. Аналитическая Механика[M]. Москва: ГИФМЛ, 1961.

[3]梅凤翔，刘桂林. 分析力学基础[M]. 西安：西安交通大学出版社，1987.

[4]陈滨. 分析动力学[M]. 第二版. 北京：北京大学出版社，2012.

[5]赵跃宇，梅凤翔. 力学系统的对称性与不变量[M]. 北京：科学出版社，1999.

[6]刘正福，沙永海. 分析力学解题指导及习题集[M]. 北京：高等教育出版社，1992.

[7]Santilli RM. Foundations of Theoretical Mechanics II[M]. New York: Springer-Verlag, 1983.

[8]Routh E. Advanced Part of a Treatise on the Dynamics of a System of Rigid Bodies[M]. London: Macmillan, 1884.

[9]Whittaker ET. A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies[M]. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1904.

9

Lagrange 方程的应用(Ⅰ)

第 9～11 章研究 Lagrange 方程的应用，包括 12 个专题：准坐标下的 Lagrange方程、耗散函数的 Lagrange 方程、初始运动问题、打击运动的 Lagrange方程、运动稳定性和小振动理论、刚体定点转动问题的分析动力学、相对运动动力学的 Lagrange 方程、变质量系统的 Lagrange 方程、事件空间中的 Lagrange 方程、可控力学系统的 Lagrange 方程、机电系统的 Lagrange 方程、Lagrange 力学逆问题等。

§9.1 准坐标下的 Lagrange 方程

本节讨论准坐标下的 Lagrange 方程，包括准速度与准坐标、准坐标下 Lagrange方程的导出，以及应用。

9.1.1 准速度与准坐标

设力学系统的位形由 n 个广义坐标 $q_s(s=1,2,\cdots,n)$来确定。在研究点的速度时，在不少情况下不是直接由广义速度 $\dot{q}_s(s=1,2,\cdots,n)$，而是用它们的某些线性形式来确定：

$$\omega_s=\sum_{k=1}^{n} a_{sk}\dot{q}_k \qquad (s=1,2,\cdots,n) \tag{9.1.1}$$

其中系数 a_{sk} 依赖于广义坐标。将量 ω_s 称为**准速度**。设由式(9.1.1)可反解出广义速度

$$\dot{q}_s=\sum_{k=1}^{n} b_{sk}\omega_k \qquad (s=1,2,\cdots,n) \tag{9.1.2}$$

其中 b_{sk} 为矩阵(a_{sk})的逆矩阵元素

$$\sum_{k=1}^{n} b_{sk}a_{kr}=\delta_{sr} \tag{9.1.3}$$

与式(9.1.1)相关，研究广义坐标微分的线性形式

$$\mathrm{d}\pi_s=\sum_{k=1}^{n}a_{sk}\mathrm{d}q_k\qquad(s=1,2,\cdots,n)\tag{9.1.4}$$

量 $\mathrm{d}\pi_s$ 称为准坐标的微分。因为式(9.1.1)一般是不可积分的，故 π_s 作为坐标的函数是不存在的。但是，纯粹条件地引出记号 π_s，并称之为准坐标仍不失意义，因为这样可以简化公式并减少文字记述。

对准坐标的偏导数运算为式(2.4.11)，即[1]

$$\frac{\partial}{\partial\pi_s}=\sum_{k=1}^{n}b_{ks}\frac{\partial}{\partial q_k}\qquad(s=1,2,\cdots,n)\tag{9.1.5}$$

准坐标下的 Lagrange 关系为式(2.4.12)，即

$$\frac{\partial\dot{\boldsymbol{r}}_i^*}{\partial\omega_s}=\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial\pi_s}\qquad(i=1,2,\cdots,N;s=1,2,\cdots,n)\tag{9.1.6}$$

9.1.2 准坐标下 Lagrange 方程的导出

广义坐标下的 Lagrange 方程为(8.2.2)，即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_s}-\frac{\partial T}{\partial q_s}=Q_s\qquad(s=1,2,\cdots,n)\tag{9.1.7}$$

下面由方程(9.1.7)出发来推导准坐标下的 Lagrange 方程。将方程(9.1.7)两端同乘以 b_{sk}，并对 s 求和，得到

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_s}b_{sk}-\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial q_s}b_{sk}=\sum_{s=1}^{n}Q_sb_{sk}\qquad(k=1,2,\cdots,n)\tag{9.1.8}$$

令 T^* 为用准速度表示的动能，有

$$T^*(q_s,\omega_s,t)=T\Big(q_s,\sum_{k=1}^{n}b_{sk}\omega_k,t\Big)$$

$$T(q_s,\dot{q}_s,t)=T^*\Big(q_s,\sum_{k=1}^{n}a_{sk}\dot{q}_k,t\Big)$$

于是有

$$\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_s}=\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial T^*}{\partial\omega_l}a_{ls}$$

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_s}b_{sk}=\sum_{s=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\frac{\partial T^*}{\partial\omega_l}a_{ls}\Big)b_{sk}+\sum_{s=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial T^*}{\partial\omega_l}\dot{a}_{ls}b_{sk}\tag{9.1.9}$$

又因

$$\begin{aligned}&\sum_{s=1}^{n}a_{ls}b_{sk}=\delta_{lk}\\&\dot{a}_{ls}=\sum_{r=1}^{n}\frac{\partial a_{ls}}{\partial q_r}\dot{q}_r=\sum_{r=1}^{n}\frac{\partial a_{ls}}{\partial q_r}\sum_{m=1}^{n}b_{rm}\omega_m\end{aligned}\tag{9.1.10}$$

将式(9.1.10)代入式(9.1.9)，得到

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}b_{sk}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T^*}{\partial \omega_k}+\sum_{m=1}^{n}\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial T^*}{\partial \omega_l}\frac{\partial a_{ls}}{\partial q_r}b_{rm}b_{sk}\omega_m \quad (9.1.11)$$

又

$$\frac{\partial T}{\partial q_s}=\frac{\partial T^*}{\partial q_s}+\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial T^*}{\partial \omega_l}\sum_{r=1}^{n}\frac{\partial a_{lr}}{\partial q_s}\sum_{m=1}^{n}b_{rm}\omega_m$$

于是

$$\begin{aligned}\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial q_s}b_{sk}&=\sum_{s=1}^{n}\left[\frac{\partial T^*}{\partial q_s}+\sum_{l=1}^{n}\sum_{r=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}\frac{\partial T^*}{\partial \omega_l}\frac{\partial a_{lr}}{\partial q_s}b_{rm}\omega_m\right]b_{sk}\\&=\frac{\partial T^*}{\partial \pi_k}+\sum_{m=1}^{n}\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial T^*}{\partial \omega_l}\frac{\partial a_{lr}}{\partial q_s}b_{rm}b_{sk}\omega_m \quad (9.1.12)\end{aligned}$$

将式(9.1.11)和式(9.1.12)代入式(9.1.8),得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T^*}{\partial \omega_k}+\sum_{l=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}\gamma_{mk}^{l}\frac{\partial T^*}{\partial \omega_l}\omega_m-\frac{\partial T^*}{\partial \pi_k}=P_k^* \qquad (k=1,2,\cdots,n) \quad (9.1.13)$$

其中

$$\gamma_{mk}^{l}=\sum_{s=1}^{n}\sum_{r=1}^{n}\left(\frac{\partial a_{ls}}{\partial q_r}-\frac{\partial a_{lr}}{\partial q_s}\right)b_{rm}b_{sk} \quad (9.1.14)$$

为 **Boltzmann 三标记号**,而

$$P_k^*=\sum_{s=1}^{n}Q_s b_{sk} \quad (9.1.15)$$

为相应于准坐标的广义力。

方程(9.1.13)就是准坐标下的 Lagrange 方程,是德国学者 Boltzmann L (1844—1906)于 1902 年得到的[2]。

准坐标下的 Lagrange 方程(9.1.13)理论上比广义坐标下的 Lagrange 方程(8.2.2)更一般,因为当取准速度为广义速度时,方程(9.1.13)成为方程(8.2.2)。另外,方程(9.1.13)的优点在于不仅可研究纯滚动,还可研究滑动情形,因为对完整系统和非完整系统具有同样的形式[3]。

9.1.3 应用举例

例 1 一质量为 m 的质点 M 在指向固定点 O 的有心力作用下在一平面内运动。力的大小为 $f(r)$,其中 r 为 O 和 M 间的距离。试导出质点在变量 $r,\theta,\dot{r}$ 和 $\dot{A}$ 下的运动微分方程,其中 r,θ 为点的极坐标,$\dot{A}$ 是面积速度。

解:取广义坐标 q_1,q_2 和准速度 ω_1,ω_2 为

$$q_1 = r, q_2 = \theta, \omega_1 = \dot{r}, \omega_2 = \dot{A} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta}$$

于是有

$$a_{11} = 1, a_{12} = a_{21} = 0, a_{22} = \frac{1}{2} r^2$$

$$b_{11} = 1, b_{12} = b_{21} = 0, b_{22} = \frac{2}{r^2}$$

按公式(9.1.14)计算 Boltzmann 三标记号,得

$$\gamma_{12}^2 = -\gamma_{21}^2 = \frac{2}{r}$$

其余为零。质点的动能为

$$T = \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2)$$

于是,准速度下的动能为

$$T^* = \frac{1}{2} m\left(\omega_1^2 + \frac{4\omega_2^2}{r^2}\right)$$

做计算,有

$$\frac{\partial T^*}{\partial \omega_1} = m\omega_1, \frac{\partial T^*}{\partial \omega_2} = \frac{4m\omega_2}{r^2}$$

$$\frac{\partial T^*}{\partial \pi_1} = \sum_{s=1}^{2} \frac{\partial T^*}{\partial q_s} b_{s1} = -\frac{4m\omega_2^2}{r^2}, \frac{\partial T^*}{\partial \pi_2} = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial T^*}{\partial q_s} b_{s2} = 0$$

准坐标下的广义力为

$$P_1^* = \sum_{s=1}^{2} Q_s b_{s1} = Q_1 = f(r)$$

$$P_2^* = \sum_{s=1}^{2} Q_s b_{s2} = 0$$

方程(9.1.13)给出

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial T^*}{\partial \omega_1} + \sum_{l=1}^{2} \sum_{m=1}^{2} \gamma_{m1}^l \frac{\partial T^*}{\partial \omega_l} \omega_m - \frac{\partial T^*}{\partial \pi_1} = P_1^*$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial T^*}{\partial \omega_2} + \sum_{l=1}^{2} \sum_{m=1}^{2} \gamma_{m2}^l \frac{\partial T^*}{\partial \omega_l} \omega_m - \frac{\partial T^*}{\partial \pi_2} = P_2^*$$

代入,得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\omega_1) - \frac{8m\omega_2^2}{r^3} + \frac{4m\omega_2^2}{r^2} = f(r)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{4m\omega_2}{r^2}\right) + \frac{8m\omega_2^2}{r^2} = 0$$

即

$$m\ddot{r}-\frac{4m\dot{A}^2}{r^3}=f(r),\ddot{A}=0$$

例 2 如果满足条件

$$\frac{\partial T^*}{\partial t}=0, P_k^*=-\frac{\partial V^*}{\partial \pi_k} \qquad (k=1,2,\cdots,n)$$

试证明方程(9.1.13)有积分

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial T^*}{\partial \omega_k}\omega_k-T^*+V^*=\text{const.}$$

证明:将方程(9.1.13)两端同时乘以 ω_k,并对 k 求和,得到

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T^*}{\partial \omega_k}\omega_k+\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}\gamma_{mk}^{l}\frac{\partial T^*}{\partial \omega_l}\omega_m\omega_k-\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial T^*}{\partial \pi_k}\omega_k=\sum_{k=1}^{n}P_k^*\omega_k$$

注意到

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}\gamma_{mk}^{l}\omega_m\omega_k=0 \qquad (l=1,2,\cdots,n)$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T^*}{\partial \omega_k}\omega_k=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial T^*}{\partial \omega_k}\omega_k\right)-\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial T^*}{\partial \omega_k}\dot{\omega}_k$$

$$\frac{\mathrm{d}T^*}{\mathrm{d}t}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial T^*}{\partial \omega_k}\dot{\omega}_k+\frac{\partial T^*}{\partial \pi_k}\omega_k\right)+\frac{\partial T^*}{\partial t}$$

则有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial T^*}{\partial \omega_k}\omega_k-T^*\right)=\sum_{k=1}^{n}P_k^*\omega_k-\frac{\partial T^*}{\partial t}$$

再利用条件

$$\frac{\partial T^*}{\partial t}=0,\sum_{k=1}^{n}P_k^*\omega_k=-\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial V^*}{\partial \pi_k}\omega_k=-\frac{\mathrm{d}V^*}{\mathrm{d}t}$$

则有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial T^*}{\partial \omega_k}\omega_k-T^*+V^*\right)=0$$

由此得到积分

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial T^*}{\partial \omega_k}\omega_k-T^*+V^*=\text{const}.$$

§9.2 耗散函数的 Lagrange 方程

本节讨论耗散函数的 Lagrange 方程,包括 **Лурье 耗散函数**、带有耗散函数的 Lagrange 方程等。

9.2.1 Лурье 耗散函数

考虑系统的每个质点上作用有与其速度相关的阻力

$$\boldsymbol{F}_i' = -k_i f_i(v_i)\frac{\boldsymbol{v}_i}{v_i} \qquad (i=1,2,\cdots,N) \tag{9.2.1}$$

其中 v_i 为点的速度大小;k_i 是点的坐标和时间的正函数

$$k_i = k_i(x_j, y_j, z_j, t) \qquad (i,j=1,2,\cdots,N) \tag{9.2.2}$$

并且 f_i 满足

$$f_i(v_i) > 0 \tag{9.2.3}$$

与力 $\boldsymbol{F}_i'$ 相应的广义力为

$$\begin{aligned} Q_s' &= -\sum_{i=1}^{N} k_i f_i(v_i)\frac{\boldsymbol{v}_i}{v_i}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_s} \\ &= -\sum_{i=1}^{N} k_i f_i(v_i)\frac{\partial v_i}{\partial \dot{q}_s} \\ &= -\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s}\sum_{i=1}^{N} k_i \int_0^{v_i} f_i(u)\mathrm{d}u \end{aligned} \tag{9.2.4}$$

函数

$$\Phi = \sum_{i=1}^{N} k_i \int_0^{v_i} f_i(u)\mathrm{d}u \tag{9.2.5}$$

称为 Лурье 耗散函数。这个函数由苏联力学家 Лурье АИ 于 1957 年提出[1]。

线性阻尼情形的 Rayleigh 耗散函数是 Лурье 耗散函数的特例。在 Лурье 耗散函数中取 $f(v_i)=v_i$ 就成为 Rayleigh 耗散函数。

9.2.2 有耗散函数的 Lagrange 方程

系统所受阻力的广义力可用 Лурье 函数表示为

$$Q_s'' = -\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_s} \qquad (s=1,2,\cdots,n) \tag{9.2.6}$$

如果广义力分成有势的 Q_s' 和阻力对应的广义力 Q_s'',即

$$Q_s = Q_s' + Q_s'',\ Q_s' = -\frac{\partial V}{\partial q_s}$$

则 Lagrange 方程(8.2.2)可表示为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial L}{\partial q_s} = -\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_s} \qquad (s=1,2,\cdots,n) \tag{9.2.7}$$

其中 $L=T-V$。

9.2.3 耗散函数的力学意义

研究阻力大小和速度 m 次方成比例的情形,此时有

$$f_i(v_i)=v_i^m$$

而 Лурье 耗散函数为

$$\Phi=\frac{1}{m+1}\sum_{i=1}^{N}k_i v_i^{m+1}=\frac{1}{m+1}\sum_{i=1}^{N}k_i\left|\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_s}\dot{q}_s\right|^{m+1} \tag{9.2.8}$$

假设广义力 Q_s 具有势能函数 V,则有

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}=-\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial\Phi}{\partial\dot{q}_s}\dot{q}_s-\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$$

注意到式(9.2.8),有

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial\Phi}{\partial\dot{q}_s}\dot{q}_s=(m+1)\Phi \tag{9.2.9}$$

于是

$$\frac{\mathrm{d}(T+V)}{\mathrm{d}t}=-(m+1)\Phi<0 \tag{9.2.10}$$

这表明,系统单位时间内减少的总机械能是 Лурье 函数的$(m+1)$倍。当 $m=0$ 时为干摩擦;当 $m=1$ 时为线性阻尼;当 $m=2$ 时为平方阻尼,等等。

9.2.4 应用举例

例 耗散函数的计算[1]。

研究平方阻尼的双数学摆问题。设悬挂点 O 以速度 $\boldsymbol{v}_0$ 运动,摆长为 l_1 和 l_2,与铅垂线夹角为 φ_1 和 φ_2,两质点质量为 m_1 和 m_2,如图 9.1 所示。

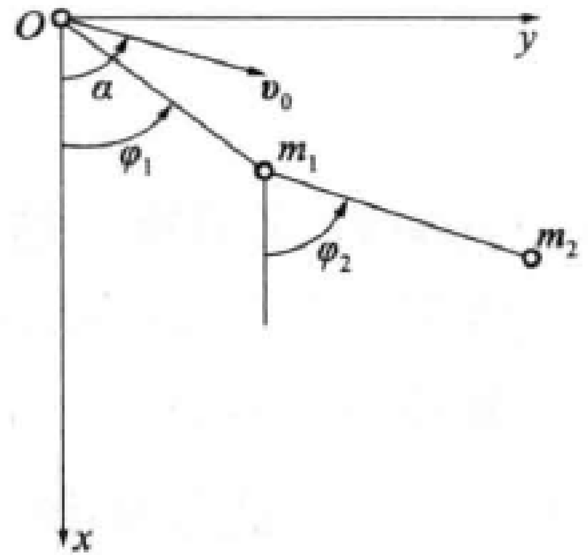


图 9.1

两质点速度的平方分别为

$$v_1^2=v_0^2+l_1^2\dot{\varphi}_1^2+2v_0l_1\dot{\varphi}_1\sin(\alpha-\varphi_1)$$

$$v_2^2=v_1^2+l_2^2\dot{\varphi}_2^2+2v_0l_2\dot{\varphi}_2\sin(\alpha-\varphi_2)+2l_1l_2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)$$

其中 α 为 $\boldsymbol{v}_0$ 与铅垂轴的夹角。此时有

$$\int_0^u f(u)\mathrm{d}u=\frac{1}{3}u^3$$

Лурье 耗散函数为

$$\Phi=\frac{1}{3}k_1v_1^3+\frac{1}{3}k_2v_2^3$$

广义力为

$$Q_1'' = -\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\varphi}_1}$$
$$= -k_1 v_1 [l_1^2 \dot{\varphi}_1 + v_0 l_1 \sin(\alpha - \varphi_1)] - k_2 v_2 [l_1^2 \dot{\varphi}_1 + v_0 l_1 \sin(\alpha - \varphi_1) + l_1 l_2 \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)]$$
$$Q_2'' = -\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\varphi}_2} = -k_2 v_2 [l_2^2 \dot{\varphi}_2 + v_0 l_2 \sin(\alpha - \varphi_2) + l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)]$$

进而,可研究相对平衡以及相对平衡位置附近的小振动问题。

§9.3 初始运动问题

本节讨论 Lagrange 方程的**初始运动**问题及其应用。

9.3.1 Lagrange 方程的初始运动问题

双面理想完整系统的 Lagrange 方程为(8.2.2),即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial T}{\partial q_s} = Q_s \qquad (s=1,2,\cdots,n) \tag{9.3.1}$$

一般说来,很难由方程(9.3.1)解得运动 $q_s = q_s(t_0, t, q_{k0} \dot{q}_{k0})$,$(s, k=1,2,\cdots,n)$。但是,总可以用幂级数来解微分方程,即对独立变量 q_s,找到形如

$$q_s = a_s + b_s t + c_s t^2 + d_s t^3 + \cdots \qquad (s=1,2,\cdots,n) \tag{9.3.2}$$

的表达式,其中系数 $a_s, b_s, c_s, d_s, \cdots$ 可由式(9.3.2)代入方程(9.3.1)并令 t 的各同次幂的系数为零,而得到。一般说来,展开式对 t 平面上某确定的收敛圆内的 t 值将是收敛的。

上述级数解可以用来研究运动的初始特性,因为 a_s 是 q_s 的初值,b_s 是 $\dot{q}_s$ 的初值,$2c_s$ 是 $\ddot{q}_s$ 的初值,等等[4]。

9.3.2 应用举例

例 1 如图 9.2 所示,在铅垂平面内的均质圆盘,质量为 $2m$,半径为 a,可绕过中心 O 的水平轴转动。一质量为 m 的质点 B,用长为 b 的线拴于圆周上 A 点。通过拴结点的半径 OA 开始时是水平的。试确定质点初始运动的轨迹。

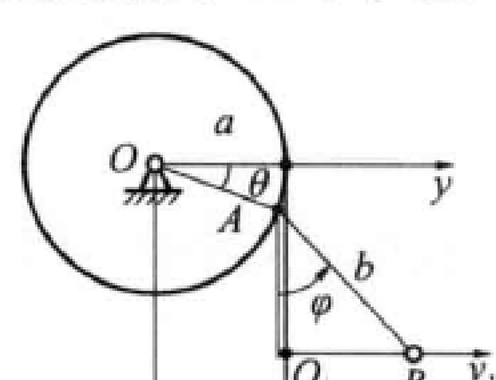


图 9.2

解:首先,建立系统的运动微分方程。取圆盘转角 θ 以及线 AB 与铅垂线的夹角 φ 为广义坐标。在圆盘中心 O 取固定直角坐标第 Oxy。质

点 B 的坐标为

$$x=a\sin\theta+b\cos\varphi,\ y=a\cos\theta+b\sin\varphi$$

速度为

$$\dot{x}=a\dot{\theta}\cos\theta-b\dot{\varphi}\sin\varphi,\ \dot{y}=-a\dot{\theta}\sin\theta+b\dot{\varphi}\cos\varphi$$

质点的动能为

$$T_1=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)=\frac{1}{2}m[a^2\dot{\theta}^2+b^2\dot{\varphi}^2-2ab\dot{\theta}\dot{\varphi}\sin(\theta+\varphi)]$$

圆盘的动能为

$$T_2=\frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2$$

系统的动能为

$$T=T_1+T_2=ma^2\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}mb^2\dot{\varphi}^2-mab\dot{\theta}\dot{\varphi}\sin(\theta+\varphi)$$

质点的势能为

$$V=-mg(a\sin\theta+b\cos\varphi)$$

系统的 Lagrange 函数为

$$\begin{aligned}L&=T-V\\&=ma^2\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}mb^2\dot{\varphi}^2-mab\dot{\theta}\dot{\varphi}\sin(\theta+\varphi)+mg(a\sin\theta+b\cos\varphi)\end{aligned}$$

系统运动的 Lagrange 方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}-\frac{\partial L}{\partial\theta}=0\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}-\frac{\partial L}{\partial\varphi}=0$$

给出

$$2a^2\ddot{\theta}-ab\dot{\varphi}^2\cos(\theta+\varphi)-ga\cos\theta-ab\ddot{\varphi}\sin(\theta+\varphi)=0$$

$$b^2\ddot{\varphi}-ab\dot{\theta}^2\cos(\theta+\varphi)+gb\sin\varphi-ab\ddot{\theta}\sin(\theta+\varphi)=0$$

其次,研究初始运动。因为开始时有 $\theta=\varphi=\dot{\theta}=\dot{\varphi}=0$,将其代入上述方程,得到角加速度的初始值

$$\ddot{\theta}=\frac{g}{2a},\ddot{\varphi}=0$$

因此,θ 从 $\frac{g}{4a}t^2$ 开始,而 φ 从 t^3 开始。设

$$\theta=\frac{g}{4a}t^2+At^3+Bt^4+\cdots$$

$$\varphi=Ct^3+Dt^4+Et^5+Ft^6+\cdots$$

其中 $A,B,C,D,E,F,\cdots$ 为待定常数。注意到

$$\cos(\theta+\varphi)=1-\frac{1}{2}(\theta+\varphi)^2+\cdots$$

$$\sin(\theta+\varphi)=\theta+\varphi+\cdots$$

$$\cos\theta=1-\frac{1}{2}\theta^2+\cdots$$

$$\sin\theta=\theta+\cdots$$

微分方程成为

$$2a^2\left[\frac{g}{2a}+6at+12Bt^2+\cdots\right]-$$

$$ab\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{g}{4a}t^2+At^3+Ct^3+\cdots\right)^2+\cdots\right](3Ct^2+4Dt^3+\cdots)^2-$$

$$ga\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{g}{4a}t^2+At^3+Ct^3+\cdots\right)^2+\cdots\right]-$$

$$ab\left(\frac{g}{4a}t^2+At^3+Bt^4+Ct^3+Dt^4+\cdots\right)(6Ct+12Dt^2+\cdots)=0$$

$$b^2(6Ct+12Dt^2+20Et^3+30Ft^4\cdots)-$$

$$ab\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{g}{4a}t^2+At^3+Bt^4+Ct^3+Dt^4+\cdots\right)^2+\cdots\right]\left(\frac{g}{2a}t+3At^2+4Bt^3+\cdots\right)^2+$$

$$gb(Ct^3+Dt^4+Et^5+Ft^6+\cdots)-$$

$$ab\left(\frac{g}{4a}t^2+At^3+Bt^4+Ct^3+Dt^4+\cdots\right)\left(\frac{g}{2a}+6At+12Bt^2+\cdots\right)=0$$

令两方程中 t 的同次幂系数为零，有

$t^0: ag-ga=0$

$t^1: 12a^2A=0$

$t^2: 24a^2B=0$

$\vdots$

$t^1: 6b^2C=0$

$t^2: 12b^2D-\dfrac{bg^2}{4a}-\dfrac{bg^2}{8a}=0$

$t^3: 20b^2E-3bgA+gbC-ab\left[\dfrac{6gA}{4a}+\dfrac{g}{2a}(A+C)\right]=0$

$t^4: 30b^2F-ab\left(9A^2+\dfrac{4gB}{a}\right)+gbD-ab\left[\dfrac{g}{2a}(B+D)+6A(A+C)+\dfrac{3gB}{a}\right]=0$

$\vdots$

由这些代数方程解得

$$A=B=C=E=0$$

$$D=\frac{g^2}{32ab},F=-\frac{g^3}{1\ 920ab^2}$$

于是有

$$\theta=\frac{g}{4a}t^2+\cdots,\varphi=\frac{g^2}{32ab}t^4-\frac{g^3}{1\ 920ab^2}t^6+\cdots$$

现在在质点初始位置 O_1 取坐标系 $O_1x_1y_1$，则质点相对 $O_1x_1y_1$ 的坐标为

$$x_1=x-b=a\sin\theta+b(\cos\varphi-1)$$

$$y_1=y-a=a(\cos\theta-1)+b\sin\varphi$$

于是有

$$x_1=a\theta-\frac{1}{2}b\varphi^2+\cdots=\frac{1}{4}gt^2+\cdots$$

$$y_1=-\frac{1}{2}a\theta^2+b\varphi+\cdots=-\frac{g^3}{1920ab}t^6+\cdots$$

这就是以参数 t 表示的质点的初始轨迹，消去 t，便得

$$x_1^3=-30aby_1$$

这就是质点在初始位置领域内的路径的渐近方程。

例 2 研究单位质量质点在平面 Oxy 上的自由运动，开始时静止。质点受力场作用，力的分量(X,Y)平行于固定直角轴，试确定初始曲率半径[4]。

解：令$(x+\xi,y+\eta)$是初始点(x,y)任意邻近点的坐标，那么 ξ,η 可当作小量。点的运动方程为

$$\ddot{\xi}=X(x+\xi,y+\eta)=X(x,y)+\xi\frac{\partial X(x,y)}{\partial x}+\eta\frac{\partial X(x,y)}{\partial y}+\cdots$$

$$\ddot{\eta}=Y(x,y)+\xi\frac{\partial Y(x,y)}{\partial x}+\eta\frac{\partial Y(x,y)}{\partial y}+\cdots$$

因为开始时 $\xi,\eta,\dot{\xi},\dot{\eta}$ 为零，可展开 ξ,η 为

$$\xi=at^2+bt^3+ct^4+\cdots$$

$$\eta=dt^2+et^3+ft^4+\cdots$$

代入微分方程，令 t 的各次幂的系数为零，得到

$$a=\frac{1}{2}X(x,y),b=0,c=\frac{1}{24}\left(X\frac{\partial X}{\partial x}+Y\frac{\partial X}{\partial y}\right)$$

$$d=\frac{1}{2}Y(x,y),e=0,f=\frac{1}{24}\left(X\frac{\partial Y}{\partial x}+Y\frac{\partial Y}{\partial y}\right)$$

因此，接近点(x,y)的质点路径由下列级数给出

$$\xi = Xu + \frac{1}{6}\left(X\frac{\partial X}{\partial x} + Y\frac{\partial X}{\partial y}\right)u^2 + \cdots$$

$$\eta = Yu + \frac{1}{6}\left(X\frac{\partial Y}{\partial x} + Y\frac{\partial Y}{\partial y}\right)u^2 + \cdots$$

其中

$$u = \frac{1}{2}t^2$$

如果任意曲线的坐标 ξ,η 用参数 u 表示，那么在点 u 的曲率半径为

$$\rho = \frac{\left[\left(\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}u}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}u}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{\mathrm{d}^2\eta}{\mathrm{d}u^2}\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}u} - \frac{\mathrm{d}^2\xi}{\mathrm{d}u^2}\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}u}}$$

对应于 u 的零值的曲率半径为

$$\rho = \frac{3(X^2+Y^2)^{\frac{3}{2}}}{\left(X\frac{\partial Y}{\partial x} + Y\frac{\partial Y}{\partial y}\right)X - \left(X\frac{\partial X}{\partial x} + Y\frac{\partial X}{\partial y}\right)Y}$$

这就是质点在初始点路径的曲率半径。

§9.4 打击运动的 Lagrange 方程

打击运动是指力学系统在量值很大，但作用时间很短的打击力作用下的运动。打击力往往由于打击、碰撞、爆炸，或突然施加约束而产生。**打击运动**的一般情形由以下两种情形组成：①作用在系统上的打击冲量是给定的；②在系统上发生瞬时地加上约束的情形，此时引起的打击力事先不知道。

9.4.1 给定打击冲量的情形

1)微分变分原理对打击运动的应用

d'Alembert-Lagrange 原理写成形式

$$\sum_{i=1}^{N}(-m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i + \boldsymbol{F}_i)\cdot\delta\boldsymbol{r}_i = 0 \tag{9.4.1}$$

假设在 $t_0<t<t_1(t_1\to t_0)$内，在第 i 个质点上除作用有限力 $\boldsymbol{F}_i^f$ 外，还作用力很大的打击力 $\boldsymbol{F}_i^d$。在打击力作用下，点的速度发生有限改变，由 $\dot{\boldsymbol{r}}_{i0}$ 而变为 $\dot{\boldsymbol{r}}_{i1}$。但在打击期间，坐标保持不变。由于打击力瞬时地作用，有意义的是在打击时间

间隔 t_1-t_0 内的积分效应。将原理(9.4.1)从 t_0 至 t_1 积分,并在 $t_1\to t_0$ 下取极限,得

$$\sum_{i=1}^{N}\left\{-m_i(\dot{\boldsymbol{r}}_{i1}-\dot{\boldsymbol{r}}_{i0})+\lim_{t_1\to t_0}\int_{t_0}^{t_1}\boldsymbol{F}_i^f\mathrm{d}t+\lim_{t_1\to t_0}\int_{t_0}^{t_1}\boldsymbol{F}_i^{\mathrm{d}}\mathrm{d}t\right\}\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=0 \quad (9.4.2)$$

因 $\boldsymbol{F}_i^f$ 是 $x_j,y_j,z_j,\dot{x}_j,\dot{y}_j,\dot{z}_j,t(j=1,2,\cdots,N)$ 的函数,由中值定理知

$$\lim_{t_1\to t_0}\int_{t_0}^{t_1}\boldsymbol{F}_i^f\mathrm{d}t=0 \quad (9.4.3)$$

令

$$\boldsymbol{I}_i=\lim_{t_1\to t_0}\int_{t_0}^{t_1}\boldsymbol{F}_i^{\mathrm{d}}\mathrm{d}t \quad (9.4.4)$$

这就是打击冲量。将式(9.4.3),(9.4.4)代入式(9.4.2),得到

$$\sum_{i=1}^{N}\{-m_i(\dot{\boldsymbol{r}}_{i1}-\dot{\boldsymbol{r}}_{i0})+\boldsymbol{I}_i\}\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=0 \quad (9.4.5)$$

式(9.4.5)称为打击运动的 d'Alembert-Lagrange 原理。

2)完整系统打击运动的 Lagrange 方程

引进广义坐标 $q_s(s=1,2,\cdots,n)$,原理(9.4.5)可表示为广义坐标形式

$$\sum_{s=1}^{n}\left\{-\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_s}\right)_1+\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_s}\right)_0+\hat{Q}_s\right\}\delta q_s=0 \quad (9.4.6)$$

其中

$$\hat{Q}_s=\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{I}_i\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_s} \quad (9.4.7)$$

为广义打击冲量;T 为系统动能;$\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_s}\right)_1$ 和 $\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_s}\right)_0$ 分别表示打击后和打击前的广义动量。对完整系统来说,原理(9.4.6)中的 δq_s 是彼此独立的,故得

$$\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_s}\right)_1-\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_s}\right)_0=\hat{Q}_s \quad (s=1,2,\cdots,n) \quad (9.4.8)$$

这就是完整系统打击运动的 Lagrange 方程。

3)能量分析

设系统所受完整约束是定常的,则动能有形式

$$T=\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}A_{sk}\dot{q}_s\dot{q}_k \quad (9.4.9)$$

在 t_1-t_0 内动能的增量为

$$T_1-T_0=\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}A_{sk}\dot{q}_{s1}\dot{q}_{k1}-\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}A_{sk}\dot{q}_{s0}\dot{q}_{k0} \quad (9.4.10)$$

方程(9.4.8)给出

$$\sum_{k=1}^{n}A_{sk}(\dot{q}_{k1}-\dot{q}_{k0})=\hat{Q}_s \quad (9.4.11)$$

将式(9.4.11)代入式(9.4.10),得

$$T_1 - T_0 = \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}A_{sk}\dot{q}_{k0} + \hat{Q}_s\right)\dot{q}_{s1} - \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}A_{sk}\dot{q}_{s0}\dot{q}_{k0}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n}\hat{Q}_s(\dot{q}_{s1} + \dot{q}_{s0}) \tag{9.4.12}$$

于是有如下结论:

在打击力作用下,系统动能的改变等于广义速度的平均值与广义打击冲量乘积的总和。

9.4.2 瞬时加上约束的情形

瞬时地加上约束的情形,是指系统在没有给定外冲量下,突然加上一些约束的情形。例如,系统中原来运动着的某个点被突然固定住;又如,一个圆球本来做自由运动,突然碰到粗糙地面上。

假设突加约束有形式

$$\dot{q}_{\varepsilon+\beta} = \sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}A_{\beta\sigma}(\boldsymbol{q})\dot{q}_\sigma + B_\beta(\boldsymbol{q}) \qquad (\beta = 1,2,\cdots,g;\sigma = 1,2,\cdots\varepsilon;\varepsilon = n-g) \tag{9.4.13}$$

它们对虚位移的限制表示为

$$\delta q_{\varepsilon+\beta} = \sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}A_{\beta\sigma}(\boldsymbol{q})\delta q_\sigma \tag{9.4.14}$$

此时与主动打击力相关的广义冲量不出现于原理(9.4.6)中。将式(9.4.14)代入式(9.4.6),得到

$$\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\left\{-\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\sigma}\right)_1 + \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\sigma}\right)_0\right\}\delta q_\sigma + \sum_{\beta=1}^{g}\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\left\{-\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}\right)_1 + \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}\right)_0\right\}A_{\beta\sigma}\delta q_\sigma = 0$$

由 δq_σ 的独立性,得到

$$-\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\sigma}\right)_1 + \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\sigma}\right)_0 + \sum_{\beta=1}^{g}\left\{-\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}\right)_1 + \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}\right)_0\right\}A_{\beta\sigma} = 0 \quad (\sigma = 1,2,\cdots,\varepsilon) \tag{9.4.15}$$

如果已知打击前的广义动量$\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}\right)_0$,方程(9.4.15)给出打击后的 n 个广义动量$\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}\right)_1$ 间的$(n-g)$个关系,还不能求得唯一解。

如果瞬时加上的约束在打击后仍然保持着,例如,绝对非弹性碰撞就属于这种情形。在此情形下,约束(9.4.13)不仅在打击开始时是对的,而且在打击终了时也是对的,于是有

$$(\dot{q}_{\varepsilon+\beta})_1 - (\dot{q}_{\varepsilon+\beta})_0 = \sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}A_{\beta\sigma}[(\dot{q}_\sigma)_1 - (\dot{q}_\sigma)_0] \qquad (\beta = 1,2,\cdots,g) \tag{9.4.16}$$

这样,n 个代数方程(9.4.15),(9.4.16)组成封闭组,可用来求解打击后的广义动量。

如果瞬时加上的约束在打击终了立刻取消,例如,弹性碰撞就属于这种情形。在此情形下,需要补充 g 个关系,才能求解。

9.4.3 应用举例

例 1 在铰接平行四边形 $ABCD$ 中,均质杆 AB 与 DC 的质量都为 m_1,均质杆 BC 的质量为 m_2。$\angle BAD=\theta$,边 AD 固定。今在点 B 作用一冲量 $\boldsymbol{I}$,其方向沿 BC,如图 9.3 所示。试求点 B 的速度 v_B,以及整个系统所获得的动能。

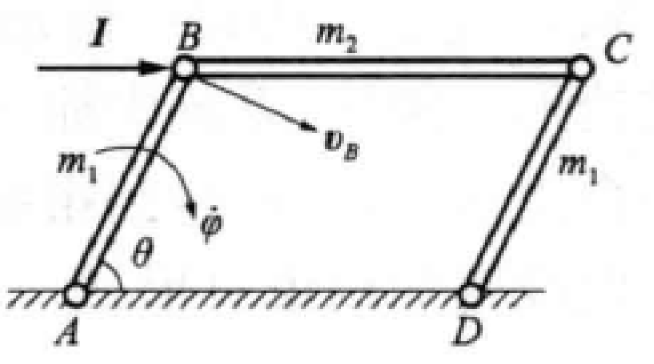


图 9.3

解: 此平行四边形有一个自由度。设杆 AB 的角度为 $\dot{\varphi}$,则点 B 为 $v_B=l\dot{\varphi}$,其中 l 为杆 AB 的长度。杆 AB 和杆 DC 做定轴转动,其动能之和为

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}m_1 l^2\right)\dot{\varphi}^2\times 2$$

杆 BC 做平移,其动能为

$$\frac{1}{2}m_2(l\dot{\varphi})^2$$

因此,系统动能为

$$T=\frac{1}{3}m_1 l^2\dot{\varphi}^2+\frac{1}{2}m_2 l^2\dot{\varphi}^2=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}m_1+m_2\right)l^2\dot{\varphi}^2$$

冲量 $\boldsymbol{I}$ 的元功为

$$Il\sin\theta\delta\varphi$$

方程(9.4.8)给出

$$\left(\frac{2}{3}m_1+m_2\right)l^2\dot{\varphi}=Il\sin\theta$$

打击后点 B 的速度为

$$v_B=l\dot{\varphi}=\frac{3I\sin\theta}{2m_1+3m_2}$$

打击后系统所获得的动能为

$$T=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}m_1+m_2\right)l^2\dot{\varphi}^2=\frac{3I^2\sin^2\theta}{2m_1+3m_2}$$

例 2 6 条等长均质杆构成一正六边形,角点用光滑铰链连接。在一边中点垂直地给以打击力,如图 9.4 所示。试证明,对边将以被打击杆速度的$\frac{1}{10}$而开始运动。

证明:取坐标系 Oxy 如图 9.4 所示,令六边形中心 C 的坐标为 $(0,y)$,杆 2,3,4,5 与轴 Oy 的夹角为 θ。设杆长为 $2a$。现计算系统的动能。由对称性知,杆 1,6 做平移。杆 1 质心坐标为

$$x_1=0,\ y_1=y-2a\cos\theta$$

杆 1 的动能为

$$T_1=\frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2+\dot{y}_1^2)=\frac{1}{2}m(\dot{y}+2a\dot{\theta}\sin\theta)^2$$

类似地,杆 6 的动能为

$$T_6=\frac{1}{2}m(\dot{y}-2a\dot{\theta}\sin\theta)^2$$

杆 2,3,4,5 做平面运动,各杆质心坐标为

$$x_2=-(a+a\sin\theta)=x_4=-x_3=-x_5$$

$$y_2=y-a\cos\theta=y_3$$

$$y_4=y+a\cos\theta=y_5$$

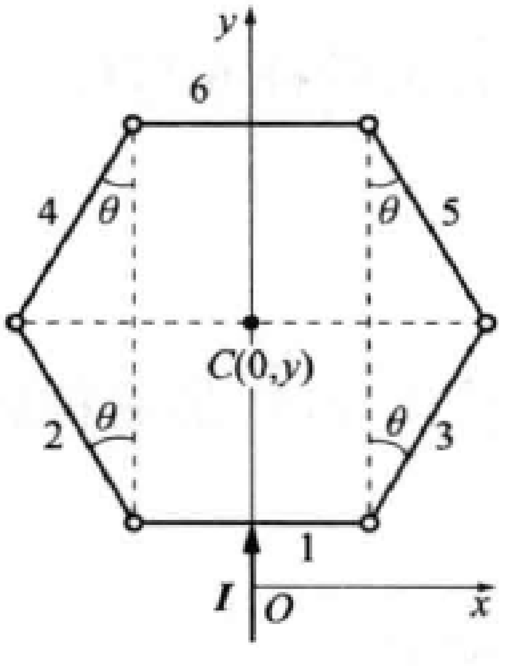


图 9.4

于是有

$$\begin{aligned}T_2&=\frac{1}{2}m(\dot{x}_2^2+\dot{y}_2^2)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}ma^2\right)\dot{\theta}^2\\&=\frac{1}{2}m[a^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta+(\dot{y}+a\dot{\theta}\sin\theta)^2]+\frac{1}{6}ma^2\dot{\theta}^2\\&=T_3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}T_4&=\frac{1}{2}m(\dot{x}_4^2+\dot{y}_4^2)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}ma^2\right)\dot{\theta}^2\\&=\frac{1}{2}m[a^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta+(\dot{y}-a\dot{\theta}\sin\theta)^2]+\frac{1}{6}ma^2\dot{\theta}^2\\&=T_5\end{aligned}$$

系统的动能为

$$T=\sum_{i=1}^{6}T_i=3m\dot{y}^2+4ma^2\dot{\theta}^2\left(\frac{2}{3}+\sin^2\theta\right)$$

冲量 $\boldsymbol{I}$ 的元功为

$$I\delta(y-2a\cos\theta)=I\delta y+2Ia\sin\theta\delta\theta$$

由此得到广义打击冲量

$$\hat{Q}_y=I,\ \hat{Q}_\theta=2Ia\sin\theta$$

方程(9.4.8)给出

$$\frac{\partial T}{\partial\dot{y}}=\hat{Q}_y,\ \frac{\partial T}{\partial\dot{\theta}}=\hat{Q}_\theta$$

即

$$6m\dot{y}=I,8ma^2\dot{\theta}\left(\frac{2}{3}+\sin^2\theta\right)=2aI\sin\theta$$

注意到 $\theta=30°$,上式给出

$$\dot{y}=\frac{I}{6m},\dot{\theta}=\frac{3I}{22ma}$$

打击后杆 6 与杆 1 速度之比为

$$\frac{v_6}{v_1}=\frac{\dot{y}-2a\dot{\theta}\sin\theta}{\dot{y}+2a\dot{\theta}\sin\theta}=\frac{\dot{y}-a\dot{\theta}}{\dot{y}+a\dot{\theta}}$$

代入 $\dot{y},\dot{\theta}$,最后得到

$$\frac{v_6}{v_1}=\frac{1}{10}$$

证毕。

例 3 正方形均质薄板在光滑水平面上运动,如图 9.5 所示,角速度为 ω,中心 O 的速度为 v,设 $v=l\omega$,l 为板的边长。今在板的一边与其中心的速度 v 相平行的某一瞬间,将板的一角点 A 突然固定,此后板将绕点 A 转动,求板转动的角速度[5]。

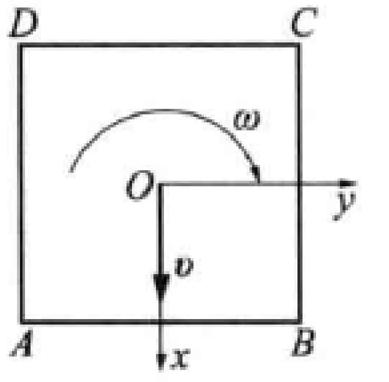


图 9.5

解:问题属于瞬时加上约束的情形,原理(9.4.6)中 $\hat{Q}_s$ 不出现。薄板的动能表示为

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{12}m(2l^2)\right]\dot{\theta}^2$$

原理(9.4.6)给出

$$[-m(\dot{x})_1+m(\dot{x})_0]\delta x+[-m(\dot{y})_1+m(\dot{y})_0]\delta y+$$
$$\left[-\frac{1}{6}ml^2(\dot{\theta})_1+\frac{1}{6}ml^2(\dot{\theta})_0\right]\delta\theta=0$$

突加约束为

$$\dot{x}=\frac{l}{2}\dot{\theta},\dot{y}=\frac{l}{2}\dot{\theta}$$

于是有

$$\delta x=\frac{l}{2}\delta\theta,\delta y=\frac{l}{2}\delta\theta$$

注意到

$$(\dot{x})_0=v=l\omega,(\dot{y})_0=0,(\dot{\theta})_0=\omega$$

代入得

$$\left[-m\frac{l}{2}(\dot{\theta})_1+ml\omega\right]\times\frac{1}{2}l+\left[-m\frac{l}{2}(\dot{\theta})_1\right]\times\frac{1}{2}l+$$
$$\left[-\frac{1}{6}ml^2(\dot{\theta})_1+\frac{1}{6}ml^2\omega\right]=0$$

解得

$$(\dot{\theta})_1=\omega$$

本章讨论了 Lagrange 方程的 4 个专题，包括准坐标下的 Lagrange 方程、耗散函数的 Lagrange 方程、初始运动问题，以及打击运动的 Lagrange 方程等。

思考题

9.1 如果准速度与广义速度之间有非线性关系

$$\omega_s=\omega_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$$
$$\dot{q}_s=\dot{q}_s(t,\boldsymbol{q},\boldsymbol{\omega})$$

能导出准坐标下的 Lagrange 方程吗？

9.2 方程 $\ddot{q}_1=-\dot{q}_2$，$\ddot{q}_2=\dot{q}_1$ 是有耗散函数的 Lagrange 方程吗？

9.3 用 Appell 方程

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_s}=Q_s \qquad (s=1,2,\cdots,n)$$

其中 S 为加速度能，来研究初始运动问题，可否？

9.4 将原理(9.4.1)改为如下原理

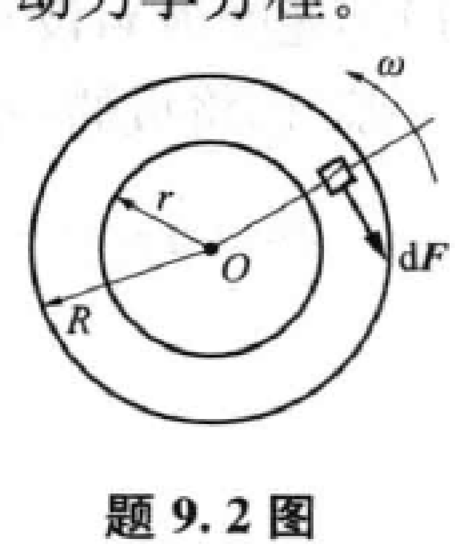
$$\sum_{i=1}^{N}(-m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i+\boldsymbol{F}_i)\cdot\Delta\dot{\boldsymbol{r}}_i=0$$

其中 $\Delta\dot{\boldsymbol{r}}_i$ 为速度的有限差，可否用于研究打击运动？

习题

9.1 试由准坐标下的 Lagrange 方程(9.1.13)导出 Euler 动力学方程。

9.2 如图所示，环的内外半径为 r 和 R，重 W，压在粗糙平台上，绕过环中心的铅垂线做定轴转动。假定摩擦阻力符合 Coulomb 定律，摩擦因数为 f_s，而且压力分布是均匀的。试求环的 Лурье 函数与转动角速度的关系[6]。



题 9.2 图

答：$\Phi=\dfrac{2(R^2+r^2+Rr)}{3(R+r)}Wf_s\omega$

9.3 放在黏性液体中的振子用运动方程

$$m\ddot{x}+\beta\dot{x}+cx=0$$

来描述。在振子运动时求使等式

$$\frac{\mathrm{d}V(x,\dot{x})}{\mathrm{d}t}=-\frac{1}{2}(m\dot{x}^2+cx^2)=-E$$

成立的正定函数 $V(x,\dot{x})$。

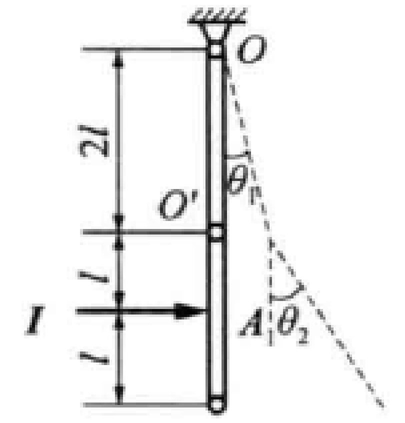
答:$V=\frac{m^2}{2\beta}\dot{x}^2+\frac{m}{2}x\dot{x}+\frac{2mc+\beta^2}{4\beta}x^2$

9.4 如图所示,长为 $2l$,质量为 M 的均质直杆可绕铰链 O 于铅垂面内自由转动。在此棒的下端以铰链 O' 联结一与之相同的第二棒。当两棒静止时,在第二棒中点 A 处加一与棒垂直的冲量 $\boldsymbol{I}$,求冲击后两棒的角速度 $\dot{\theta}_1$,$\dot{\theta}_2$ 以及点 A 的速度。

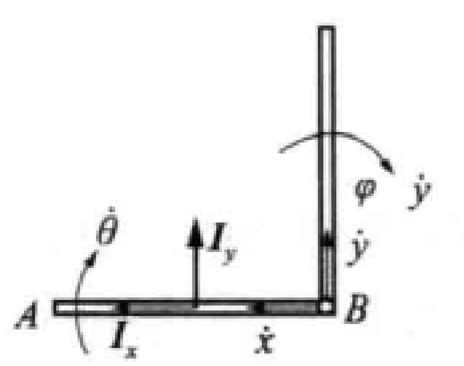
答:$\dot{\theta}_1=\frac{3}{14}\frac{I}{Ml}$,$\dot{\theta}_2=\frac{3}{7}\frac{I}{Ml}$,$v_A=\frac{6}{7}\frac{I}{M}$

9.5 如图所示,两个均质杆 AB,BC,各长 $2a$,光滑地在 B 铰接,呈直角放在光滑水平桌面上。一冲量作用在 AB 的中点,并且两杆像刚体一样地开始运动。试确定冲量的方向,并证明 A,C 的速度之比为 $\sqrt{13}:1$。

提示:令 B 的速度为$(\dot{x},\dot{y})$,杆的角速度为 $\dot{\theta}$,$\dot{\varphi}$,列写打击运动方程,并令 $\dot{\theta}=\dot{\varphi}$。



题 9.4 图

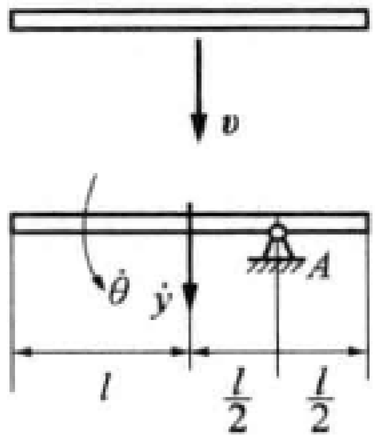


题 9.5 图

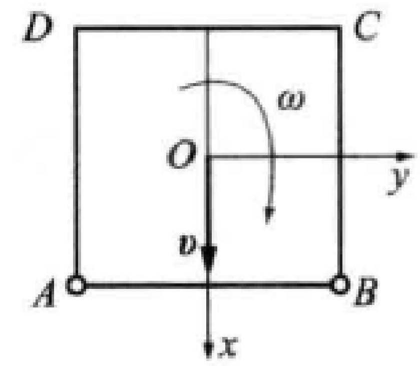
9.6 长 $2l$ 的均质杆以垂直于自身的速度 v 在图示平面内移动。此杆与支点 A 相碰于距杆端 $\frac{l}{2}$ 处。设碰撞为非弹性的,即碰后不离开。求碰后杆的角速度及质心的速度。

9.7 正方形均质薄板在光滑水平面上运动,如图所示。薄板角速度为 ω,中心 O 的速度为 $\boldsymbol{v}$,设 $v=l\omega$,l 为板的边长。今在板的一边与其中心的速度 $\boldsymbol{v}$ 相平行的某一瞬间,将板的一角点 B 突然固定,此后将绕点 B 转动。求板转动的角速度。

答:$(\dot{\theta})_1=-\frac{1}{2}\omega$



题 9.6 图



题 9.7 图

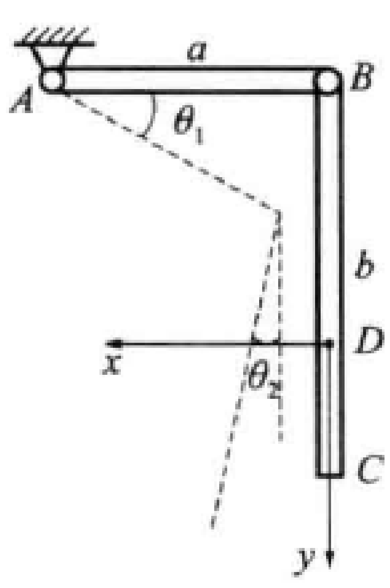
9.8　如图所示，两均质杆 AB 和 BC，质量为 m_1 和 m_2，长为 a 和 b，自由地铰接于 B，并可绕固定点 A 转动。开始时，AB 是水平的，而 BC 是铅垂的。试证，如果点 C 被释放，则离端点 C 为$\frac{1}{3}b$ 处的点 D 的初始路径可由方程

$$y^3=60\left(1+\frac{2m_2}{m_1}\right)abx$$

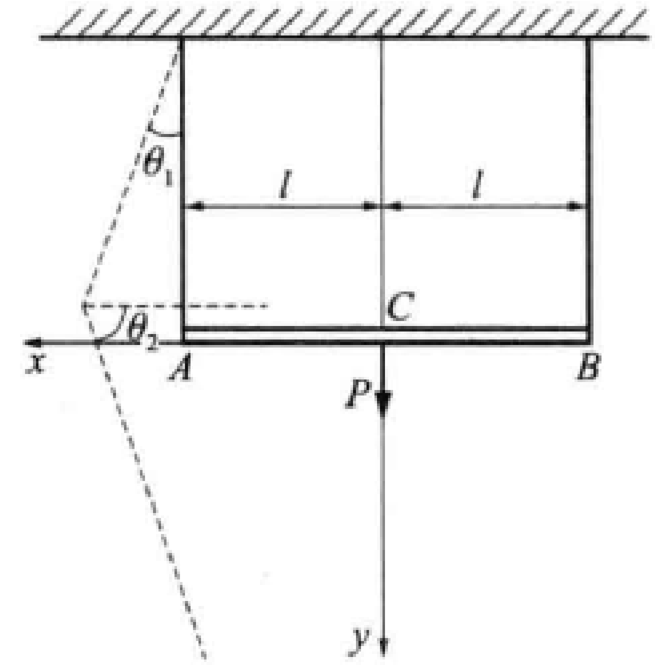
来表示。

9.9　如图所示，均质杆 AB 重 P，长 $2l$，其两端悬于长为 R 的两平行绳子上，此时杆的位置是水平的。如其中一绳断了，求在此瞬时杆的初始角速度及杆质心的初始加速度。

答：$\ddot x_{c0}=0$，$\ddot y_{c0}=\frac{3}{4}g$，$\ddot\theta_{10}=0$，$\ddot\theta_{20}=\frac{3}{4}\frac{g}{l}$



题 9.8 图



题 9.9 图

参考文献

[1]Лурье АИ. Аналитическая Механика[M]. Москва: ГИФМЛ, 1961.

[2]Boltzmann L. Über die Form der Lagrange'schen Gleichungen für nichtholonome, generalisierte Koordinaten[J]. Sit. Wiener Akad Wissen, 1902, 111: 1603-1614.

[3]梅凤翔. 分析力学专题[M]. 北京:北京工业学院出版社, 1988.

[4]Whittaker ET. A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies[M]. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1904.

[5]刘延柱，杨海兴，朱本华. 理论力学[M]. 第二版. 北京：高等教育出版社，2001.
[6]刘正福，沙永海. 分析力学解题指导及习题集[M]. 北京：高等教育出版社，1992.

10

Lagrange 方程的应用(Ⅱ)

本章讨论 Lagrange 方程的应用,包括运动稳定性和小振动理论、刚体定点转动动力学、相对运动力学、变质量系统的 Lagrange 方程等 4 个专题。

§10.1 运动稳定性和小振动理论

由 Poincaré 和 Ляпунов 创立的**运动稳定性**理论广泛应用于陀螺力学、自动控制、机器的运转、电力的传输、飞行器姿态动力学等诸多方面。小振动是发生在系统稳定平衡位置附近的微小振动。

10.1.1 平衡条件及平衡位置的稳定性

一般完整力学系统的 Lagrange 方程有形式(8.3.13),即

$$\sum_{k=1}^{n} A_{ks}\ddot{q}_k + \sum_{k=1}^{m}\sum_{m=1}^{n}[k,m;s]\dot{q}_k\dot{q}_m = Q_s + \Gamma_s + \frac{\partial T_0}{\partial q_s} - \frac{\partial B_s}{\partial t} - \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial A_{ks}}{\partial t}\dot{q}_k$$

$$(s = 1,2,\cdots,n) \qquad (10.1.1)$$

设系统的平衡位置为 $q_s = q_{s0} = \text{const.}$ $(s=1,2,\cdots,n)$,由方程(10.1.1)得到平衡条件

$$\left(-\frac{\partial B_s}{\partial t}\right)_0 + \left(\frac{\partial T_0}{\partial q_s}\right)_0 + (Q_s)_0 = 0 \qquad (s=1,2,\cdots n) \qquad (10.1.2)$$

如果约束是定常的,则平衡条件为

$$(Q_s)_0 = 0 \qquad (s=1,2,\cdots,n) \qquad (10.1.3)$$

进而,如果广义力有势,势能为 V,则平衡条件为

$$\left(\frac{\partial V}{\partial q_s}\right)_0 = 0 \qquad (s=1,2,\cdots,n) \qquad (10.1.4)$$

通过简单的平移变换,可使平衡位置变到

$$q_s^0 = 0 \qquad (s=1,2,\cdots,n) \qquad (10.1.5)$$

在§5.7 中已讨论了保守系统的平衡稳定性。下面给出有关平衡稳定性较

严格的定义和定理。

定义 1 对任意的 $\varepsilon>0$,总可以找到 $\eta=\eta(\varepsilon)>0$,使得只要在初始时刻$t=t_0$

$$|q_s^0|<\eta,|\dot{q}_s^0|<\eta, \qquad (s=1,2,\cdots,n)$$

对 $t\geqslant t_0$ 就满足不等式

$$|q_s(t)|<\varepsilon,|\dot{q}_s(t)|<\varepsilon \qquad (s=1,2,\cdots,n)$$

具有这样性质的平衡位置 $q_s^0=0(s=1,2,\cdots,n)$,称为稳定的平衡位置;反之,不具有上述条件的平衡位置,称为不稳定的平衡位置。

定义 2 所谓保守系统,是指系统所受约束是双面理想完整定常的,主动力有势的,且势能不显含时间。

定理 1 (Lagrange-Dirichlet) 如果在保守系统的某个平衡位置上势能有严格的极小,那么此位置是系统稳定的平衡位置。

定理 1 的反述是指,平衡稳定,则势能取极小。有时反述也是对的,但一般是不对的。

10.1.2 运动稳定性的一些概念和结论

首先,介绍一些基本概念。

方程(10.1.1)可化成 $2n$ 个一阶方程,记作

$$\frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}t}=Y_i(y_j,t) \qquad (i,j=1,2,\cdots,m) \tag{10.1.6}$$

其中 $m=2n$。令

$$y_i=f_i(t) \qquad (i=1,2,\cdots,m) \tag{10.1.7}$$

是方程(10.1.6)的一个特解,称其为**无扰运动**,其他的运动 $y_i(t)$称为受扰运动。令

$$x_i=y_i(t)-f_i(t) \tag{10.1.8}$$

并称之为扰动,则方程(10.1.6)成为

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}=Y_i(x_j+f_j,t)-Y_i(f_j,t)=X_i(x_j,t) \qquad (i,j=1,2,\cdots,m) \tag{10.1.9}$$

显然有

$$X_i(0,t)=0 \tag{10.1.10}$$

这样,原系统的无扰运动就化成以扰动 x_i 为变量的系统的零解,而原系统无扰运动的稳定性就相应于系统(10.1.9)的零解的稳定性。

定义 3 如果对于任意正数 ε,无论它多么小,总可以找到一个相应的 $\eta=\eta(\varepsilon)>0$,使得对于所有受扰运动 $y_i=y_i(t)$,当其在初始时刻 $t=t_0$ 时满足不等式

$$|y_i(t_0)-f_i(t_0)|\leqslant\eta$$

而在所有 $t>t_0$ 时，满足不等式

$$|y_i(t)-f_i(t)|<\varepsilon$$

则称无扰运动对于量 y_i 是 Ляпунов 意义下稳定的；反之，称为 Ляпунов 意义下不稳定的。

定义 4 如果对于任意正数 ε，无论它多么小，总可以找到一个相应的正数 $\eta(\varepsilon)$，使得对于所有受扰运动，当在初始时刻 t_0 时，满足 $|x_i(t_0)|<\eta$，而在所有 $t>t_0$ 时，满足 $|x_i(t)|<\varepsilon$，则无扰运动是 Ляпунов 意义下稳定的。

定义 5 如果无扰运动是稳定的，并且数 η 可选得如此之小，使得满足 $|x_i(t_0)|\leqslant\eta$ 的无扰运动满足条件

$$\lim_{t\to\infty}x_i(t)=0$$

则无扰运动称为 Ляпунов 意义下**渐近稳定**的。

其次，介绍有关稳定性的一些定理。

定理 2 (Ляпунов) 如果对于受扰运动微分方程(10.1.9)，可以找到一个定号函数 V，而由受扰运动方程求出的 $\dot{V}$ 是与 V 异号的常号函数或者恒等于零，则无扰运动 $x_i=0(i=1,2,\cdots,m)$ 是稳定的。

定理 3 (Ляпунов) 如果对于受扰运动微分方程(10.1.9)，可以找到一个定号函数 V，它具有无穷小上界，而由于运动方程求出的 $\dot{V}$ 是与 V 异号的定号函数，则无扰运动 $x_i=0(i=1,2,\cdots,m)$ 是渐近稳定的。

定理 4 (Четаев) 对于受扰运动方程(10.1.9)，如果能找到这样的函数 V，使得在某个区域 $D(t_0,H):\{t\geqslant t_0,\ \sum_{i=1}^{m}x_i^2\leqslant H\}$ 内，有：①V 在 $V>0$ 区域内有界；②$V>0$ 的区域对于任何的 $t\geqslant t_0$ 及绝对值任意小的变数 x_i 都存在；③$\dot{V}$ 在 $V>0$ 区域内正定。那么，无扰运动 $x_i=0(i=1,2,\cdots,m)$ 是不稳定的。

定理 2～4 的证明参见文献[1,2]。

最后，讨论线性系统的稳定性与按线性近似来决定稳定性的问题。

受扰方程(10.1.9)的一个特殊情形是常系数线性系统

$$\frac{dx_i}{dt}=\sum_{j=1}^{m}a_{ij}x_j\qquad(i=1,2,\cdots,m)\tag{10.1.11}$$

如令 $\boldsymbol{x}=[x_1,x_2,\cdots,x_m]^{\mathrm{T}}$，则可写成矩阵形式

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\tag{10.1.12}$$

其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1m}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2m}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mm}\end{vmatrix}$$

方程(10.1.12)的通解为

$$x=\sum_{i=1}^{m}C_i(u_i+u_i^1t+\cdots)\exp(\lambda_i t) \tag{10.1.13}$$

其中 λ_i 是矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征根,满足特征方程

$$\det[\mathbf{A}-\lambda\mathbf{A}]=0 \tag{10.1.14}$$

由此可得关于常系数线性系统零解稳定性的结论:

(1)如果矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征根 λ_i 都有负实部,则有

$$\lim_{t\to\infty}\boldsymbol{x}(t)=0$$

因此,系统(10.1.12)的零解是渐近稳定的。

(2)矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征根 λ_i 中只要有一个具有正实部,那么系统(10.1.12)的零解便是不稳定的。

特征方程(10.1.14)可表示为带实系数的代数方程

$$f(\lambda)=a_0\lambda^m+a_1\lambda^{m-1}+\cdots+a_{m-1}\lambda+a_m=0 \qquad (a_0>0) \tag{10.1.15}$$

方程(10.1.5)的系数组成 Hurwitz 行列式

$$\triangle_1=a_1,\triangle_2=\begin{vmatrix}a_1 & a_3\\ a_0 & a_2\end{vmatrix},\cdots,\triangle_m=\begin{vmatrix}a_1 & a_3 & a_5 & \cdots\\ a_0 & a_2 & a_4 & \cdots\\ 0 & a_1 & a_3 & \cdots\\ 0 & a_0 & a_2 & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots & a_m\end{vmatrix} \tag{10.1.16}$$

有如下 **Routh-Hurwitz 条件**:使方程(10.1.5)的所有根有负实部的充分必要条件是

$$\triangle_1>0,\triangle_2>0,\cdots,\triangle_m>0 \tag{10.1.17}$$

线性系统的稳定性在一定程度上回答了非线系统的稳定性问题。注意到 $X_i(0,t)=0$,可将式(10.1.9)右端在 $x_i=0(i=1,2,\cdots,m)$处展开,得到

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}=\sum_{j=1}^{m}a_{ij}x_j+\widetilde{X}_i \qquad (i=1,2,\cdots,m) \tag{10.1.18}$$

其中 $\widetilde{X}_i$ 为 x_j 的二次项及更高阶项。如果略去方程(10.1.18)中的高阶项 $\widetilde{X}_i$,便得线性近似方程

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}=\sum_{j=1}^{m}a_{ij}x_j \qquad (i=1,2,\cdots,m) \tag{10.1.19}$$

当所有 X_i 不显含 t 或为 t 的周期函数时,a_{ij} 和 $\widetilde{X}_i$ 也不显含 t 或为 t 的周期函数,在这两种情形下有如下结论:

(1)如果线性近似方程(10.1.19)的零解是渐近稳定的,那么原扰动方程(10.1.9)的零解也是渐近稳定的。

(2)如果线性近似方程(10.1.19)的特征根中至少有一个具有正实部,那么

原扰动方程(10.1.9)的零解是不稳定的。

当线性近似方程的特征根出现一部分具有负实部，一部分具有零实部的临界情形，需要研究非线性项对稳定性的影响。

10.1.3 保守系统的小振动

小振动是自然界和工程实际中常见的一种现象。振动理论由 Galilei 研究摆的小振动开始，18 世纪中叶由 Taylor，d'Alembert，Euler 和 Bernoulli D 发展。有限自由度动力系统振动的一般理论由 Lagrange 给出[3]。用分析力学的方法研究力学系统的小振动，可以得到具有极为概括的结果。

研究保守系统在稳定平衡位置附近的小振动。设系统的位形由 n 个广义坐标 $q_s(s=1,2,\cdots,n)$ 来确定，稳定平衡位置为 $q_s=0$。系统的动能和势能分别为

$$T=\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}A_{sk}(\boldsymbol{q})\dot{q}_s\dot{q}_k,V=V(\boldsymbol{q})$$

并且

$$\left(\frac{\partial V}{\partial q_s}\right)_0=0$$

假设 $V(0)=0$，于是在原点邻域展开 T,V，得

$$T=\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{sk}\dot{q}_s\dot{q}_k+\cdots,V=\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}c_{sk}q_sq_k+\cdots$$

其中 $a_{sk}=A_{sk}(0),C_{sk}=\left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_s\partial q_k}\right)_0$ 都是常数。在小振动下，高阶项可以略去，于是有

$$T=\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{sk}\dot{q}_s\dot{q}_k,V=\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}c_{sk}q_sq_k \tag{10.1.20}$$

其中 a_{sk}，c_{sk} 均为常数；(a_{sk})，(c_{sk}) 都是正定矩阵。将式(10.1.20)代入 Lagrange方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial L}{\partial q_s}=0$$

得到小振动方程

$$\sum_{k=1}^{n}(a_{sk}\ddot{q}_k+c_{sk}q_k)=0 \qquad (s=1,2,\cdots,n) \tag{10.1.21}$$

用矩阵表示为

$$\boldsymbol{A}\ddot{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{C}\boldsymbol{q}=0 \tag{10.1.22}$$

其中

$$\boldsymbol{q}=[q_1, q_2, \cdots, q_n]^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{C}$ 分别称为**质量阵**和**刚度阵**。

定义 6 振动系统的各广义坐标以同频率，同相位做谐振的特解称为**主振动**。

主振动的表达式为

$$q_s=u_s\sin(\omega t+\alpha) \qquad (s=1,2,\cdots,n) \tag{10.1.23}$$

其中 ω 称为**主频率**；非零矢量 $[u_1, u_2, \cdots, u_n]^{\mathrm{T}}$ 称为与主频率 ω 相应的主振型矢量。将式(10.1.23)代入式(10.1.21)，得到

$$\sum_{k=1}^{n}(c_{sk}-\omega^2 a_{sk})u_k=0 \qquad (s=1,2,\cdots,n) \tag{10.1.24}$$

为保证主振型矢量非零，主频率必须满足方程

$$\det(c_{sk}-\omega^2 a_{sk})=0 \tag{10.1.25}$$

这就是主频率方程。

为用主振动这样的特解来构造振动系统的通解，需要找出系统所有的主频率和所有相互独立的主振型。

定理 5 （展开定理） 如果振动系统的频率方程 $\det(\boldsymbol{C}-\lambda\boldsymbol{A})=0$ 的根 λ_1, $\lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 互不相等，则系统的任一振动均可用主振动的线性组合来构造。

定理 5 的证明见文献[2]。

下面讨论主坐标描述下的自由振动和受迫振动。

首先，讨论**自由振动**。

假设经过非奇异线性变换

$$q_s=\sum_{k=1}^{n}u_{sk}\theta_k \tag{10.1.26}$$

振动系统的动能和势能可表示为

$$T=\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n}\dot{\theta}_s^2, \qquad V=\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n}\lambda_s\theta_s^2 \tag{10.1.27}$$

变理 $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_n$ 称为主坐标。利用主坐标中的 T, V 表达式，Lagrange 方程给出

$$\ddot{\theta}_s+\lambda_s\theta_s=0 \qquad (s=1,2,\cdots,n) \tag{10.1.28}$$

这是分离变量的简单谐振子方程，其通解为

$$\theta_s=C_s\sin(\omega_s t+\alpha_s) \qquad (s=1,2,\cdots,n) \tag{10.1.29}$$

即每个主坐标只发生与其相应的频率的振动，其频率为 $\omega_s=\sqrt{\lambda_s}(s=1,2,\cdots,n)$，而 C_s，α_s 为积分常数。广义坐标下的通解为

$$q_s=\sum_{k=1}^{n}u_{sk}C_k\sin(\omega_k t+\alpha_k)\qquad(s=1,2,\cdots,n)\tag{10.1.30}$$

在主坐标描述下，当系统某一主坐标发生振动，而其他主坐标全为零时，这种运动正是主振动。

其次，讨论**受迫振动**。

设在广义坐标 q_s 下，除由势能 V 产生的有势力外，还有随时间变化的强迫力

$$Q_s=Q_s(t)$$

在变换(10.1.26)下，与主坐标相应的广义力为

$$P_s=\sum_{k=1}^{n}u_{ks}Q_k\qquad(s=1,2,\cdots,n)\tag{10.1.31}$$

此时 Lagrange 方程给出

$$\ddot{\theta}_s+\omega_s^2\theta_s=P_s(t)\qquad(s=1,2,\cdots,n)\tag{10.1.32}$$

方程(10.1.32)的通解为

$$\theta_s(t)=C_s\sin(\omega_s t+\alpha_s)+\theta_s^*(t)\qquad(s=1,2,\cdots,n)\tag{10.1.33}$$

其中 $\theta_s^*(t)$ 为方程(10.1.32)的任一组待解，它反映了系统的受迫振动部分。第一部分决定了系统的自由振动，其中 C_s，α_s 为积为常数，由初始条件确定。如果

$$P_s(t)=A_s\sin\Omega t\tag{10.1.34}$$

则

$$\theta_s^*(t)=\frac{A_s}{\omega_s^2-\Omega^2}\sin\Omega t\tag{10.1.35}$$

当强迫力频率 Ω 与系统某一主频率接近或重合，且 $A_s\neq0$，将出现共振现象。

10.1.4 新约束对振动系统周期的影响

在主坐标 $q_s(s=1,2,\cdots,n)$ 下，系统的动能和势能表示为

$$T=\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n}\dot{q}_s^2,V=\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n}\omega_s^2q_s^2\tag{10.1.36}$$

假设附加约束表示为

$$f(q_s)=0\qquad(S=1,2,\cdots,n)\tag{10.1.37}$$

因 $q_s(s=1,2,\cdots,n)$ 是小量，函数 f 按 q_s 的幂展开，可仅保留一次项，即

$$\sum_{s=1}^{n}A_sq_s=0\tag{10.1.38}$$

其中 $A_s(s=1,2,\cdots,n)$ 为常数。由式(10.1.38)可解出 q_n

$$q_n=\frac{1}{A_n}\sum_{i=1}^{n-1}A_iq_i$$

于是有

$$\dot{q}_n=\frac{1}{A_n}\sum_{i=1}^{n-1}A_i\dot{q}_i$$

这时,动能和势能表示为

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}\dot{q}_i^2+\frac{1}{2}\frac{1}{A_n^2}\left(\sum_{i=1}^{n-1}A_i\dot{q}_i\right)^2$$

$$V=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}\omega_i^2q_i^2+\frac{1}{2}\frac{1}{A_n^2}\left(\sum_{i=1}^{n-1}A_iq_i\right)^2$$

于是,约束系统的 Lagrange 方程是$(n-1)$个

$$\ddot{q}_i+\omega_i^2q_i+A_i\left\{\frac{1}{A_n^2}\sum_{j=1}^{n-1}A_j\ddot{q}_j+\frac{\omega_n^2}{A_n^2}\sum_{j=1}^{n-1}A_jq_j\right\}=0\qquad(i=1,2,\cdots,n-1)$$

或表示为

$$\ddot{q}_i+\omega_i^2q_i+\mu A_j=0\qquad(i=1,2,\cdots,n-1)$$

其中

$$\begin{aligned}\mu&=\frac{1}{A_n^2}\sum_{j=1}^{n-1}A_j\ddot{q}_j+\frac{\omega_n^2}{A_n^2}\sum_{j=1}^{n-1}A_jq_j\\&=-\frac{\ddot{q}_n}{A_n}-\frac{\omega_n^2q_n}{A_n}\end{aligned}$$

这样,约束系统的 n 个运动方程可表示为

$$\ddot{q}_s+\omega_s^2q_s+\mu A_s=0\qquad(s=1,2,\cdots,n)\tag{10.1.39}$$

其中 μ 待定。

修正系统的主振动模态写成形式

$$q_s=\alpha_s\cos\omega t\qquad(s=1,2,\cdots,n)$$

$$\mu=\nu\cos\omega t$$

将其代入方程(10.1.39),得

$$\alpha_s(\omega_s^2-\omega^2)+\nu A_s=0\qquad(S=1,2,\cdots,n)$$

将由此得到的 α_s 代入方程(10.1.38),得到

$$\frac{A_1^2}{\omega_1^2-\omega^2}+\frac{A_n^2}{\omega_2^2-\omega^2}+\cdots+\frac{A_n^2}{\omega_n^2-\omega^2}=0\tag{10.1.40}$$

这个方程对 ω^2 有$(n-1)$个根,处于 $\omega_1^2,\omega_2^2,\cdots,\omega_n^2$ 之间,与其相应的周期就是 $2\pi/\omega$。因此,有如下结果:

约束系统主振动的$(n-1)$个周期处于原系统的 n 个周期之间[3]。

10.1.5 应用举例

例 1 炮弹旋转运动的稳定性[4]。

假设炮弹质心做匀速直线运动，炮弹轴与该轴在发射的铅垂平面上的投影之间的夹角为 β，这个投影与炮弹质心轨迹之间的夹角为 α，运动微分方程为

$$A\ddot{\beta}+A\dot{\alpha}^2\sin\beta\cos\beta-Cn\dot{\alpha}\cos\beta=eR\sin\beta\cos\alpha$$

$$A\ddot{\alpha}\cos\beta-2A\dot{\alpha}\dot{\beta}\sin\beta+Cn\dot{\beta}=eR\sin\alpha$$

其中 C 为炮弹的轴惯性矩；A 为对过质心的横轴的惯性矩；n 为炮弹旋转角速度在其对称轴上的常量投影；e 为质心和压力中心间的距离；R 为迎面阻力。这些都是常数。

方程有待解

$$\alpha=\dot{\alpha}=\beta=\dot{\beta}=0$$

取此运动为无扰运动。为研究其稳定性，用积分组合方法构造 **Ляпунов** 函数 V。将第一个方程乘以 $\dot{\beta}$，第二个方程乘以 $\dot{\alpha}\cos\beta$，然后相加并积分，得到第一个积分

$$F_1(\alpha,\dot{\alpha},\beta,\dot{\beta})=\frac{1}{2}A(\dot{\beta}^2+\dot{\alpha}^2\cos^2\beta)+eR(\cos\alpha\cos\beta-1)=\text{const.}$$

将第一个方程乘以 $\sin\alpha$，第二个方程乘以 $\sin\beta\cos\alpha$，然后相减并积分，得到第二个积分

$$F_2(\alpha,\dot{\alpha},\beta,\dot{\beta})=A(\dot{\beta}\sin\alpha-\dot{\alpha}\cos\beta\sin\beta\cos\alpha)+$$
$$Cn(\cos\alpha\cos\beta-1)=\text{const.}$$

这两个积分都不是定号的。现作一个新的积分

$$V=F_1-\lambda F_2=\text{const.}$$

其中 λ 是某个常数，于是有 $\dot{V}=0$。将函数 V 展开，得

$$V=\frac{1}{2}\{A\dot{\alpha}^2+(Cn\lambda-eR)\beta^2+2A\lambda\dot{\alpha}\beta\}+$$
$$\frac{1}{2}\{A\dot{\beta}^2+(Cn\lambda-eR)\alpha^2-2A\lambda\alpha\dot{\beta}\}+\cdots$$

其中未写出之项不低于三次，忽略它们不影响 V 的定号性。由此看出，只要二次型

$$Ax^2+(Cn\lambda-eR)y^2\pm 2A\lambda xy$$

是正定的，那么 V 将是正定的。上式正定的充分必要条件是

$$A>0,\ f(\lambda)=A\lambda^2-Cn\lambda+eR<0$$

由此得知，只要

$$A>0,C^2n^2-4AeR>0$$

由定理 2 知,运动就是稳定的。

下面研究按线性近似来决定稳定性问题。方程的线性近似为

$$A\ddot{\beta}-Cn\dot{\alpha}-eR\beta=0,\quad A\ddot{\alpha}+Cn\dot{\beta}-eR\alpha=0$$

令 $x_1=\alpha,x_2=\dot{\alpha},x_3=\beta,x_4=\dot{\beta}$,可将方程化成 4 个一阶方程

$$\dot{x}_1=x_2,\dot{x}_2=-\frac{Cn}{A}x_4+\frac{eR}{A}x_1,\dot{x}_3=x_4,\dot{x}_4=\frac{Cn}{A}x_2+\frac{eR}{A}x_3$$

特征方程(10.1.25)给出

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ \frac{eR}{A} & -\lambda & 0 & -\frac{Cn}{A} \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & \frac{Cn}{A} & \frac{eR}{A} & -\lambda \end{vmatrix}=0$$

即

$$\left(\lambda^2-\frac{eR}{A}\right)^2+\frac{C^2n^2}{A^2}\lambda^2=0$$

由此解得

$$\lambda=\frac{\pm Cni\pm\sqrt{4AeR-C^2n^2}}{2A}$$

因此,如满足

$$4AeR-C^2n^2>0$$

则两个根有正实部,无扰运动是不稳定的。如满足

$$4AeR-C^2n^2<0$$

则 4 个根都是纯虚根。此时为临界情形,欲判断稳定性,需进一步研究方程中的非线性部分。

例 2 求质点在重力作用下在一固定光滑曲面上绕一平衡位置的主振动模态的周期。[3]

解:质点在平衡位置占据的点处与曲面相切的平面显然是水平的,取轴 Ox 和 Oy 在该点曲面的曲率线上,而轴 Oz 铅垂向上,如图 10.1 所示。曲面方程近似地表示为

$$z=\frac{x^2}{2\rho_1}+\frac{y^2}{2\rho_2}$$

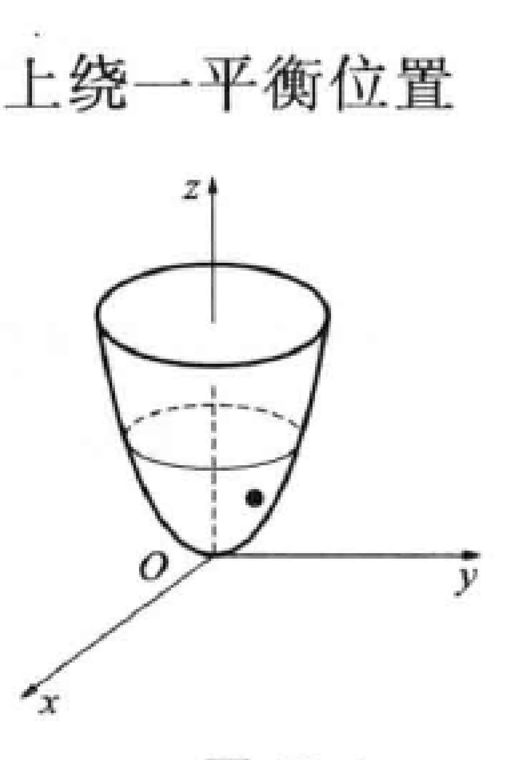


图 10.1

其中 ρ_1 和 ρ_2 为主曲率半径。质点的动能和势能

分别为

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2),V=mg\left(\frac{x^2}{2\rho_1}+\frac{y^2}{2\rho_2}\right)$$

显然,x 和 y 是主坐标。运动微分方程为

$$\ddot{x}+\frac{g}{\rho_1}x=0,\ddot{y}+\frac{g}{\rho_2}y=0$$

主振动周期为

$$2\pi\sqrt{\frac{\rho_1}{g}},2\pi\sqrt{\frac{\rho_2}{g}}$$

例 3 三自由度系统的动能和势能分别为

$$T=\frac{1}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)$$

$$V=\frac{1}{2}\{p^2(x^2+y^2)+2\alpha z(x+y)+q^2z^2\}$$

其中 α 比 p 和 q 要小得多,试求主坐标和主振动周期。试证明,在时间 $\pi p(q^2-p^2)/\alpha$ 之后,x 振动将瞬时停止,而 y 进行同 x 原来的振幅大小而振动[3]。

解:作变换

$$x+y=2\xi,x-y=2\eta$$

则动能和势能变为

$$T=\dot{\xi}^2+\dot{\eta}^2+\frac{1}{2}\dot{z}^2$$

$$V=p^2\xi^2+p^2\eta^2+2\alpha z\xi+\frac{1}{2}q^2z^2$$

这样,变量 η 已是主坐标。为使动能和势能中其余项变为平方和,再引入变量 φ,ξ,使得

$$z=\zeta-\frac{2\alpha}{q^2-p^2}\varphi,\xi^\epsilon=y+\frac{\alpha}{q^2-p^2}\zeta$$

于是有

$$T=\dot{\eta}^2+\left\{1+\frac{2\alpha^2}{(q^2-p^2)^2}\right\}\dot{\varphi}^2+\{1+\frac{2\alpha^2}{(q^2-p^2)^2}\}\dot{\zeta}^2$$

$$V=p^2\eta^2+\{p^2-\frac{\alpha^2(2q^2-4p^2)}{(q^2-p^2)^2}\}\varphi^2+\frac{1}{2}\{q^2+\frac{(4q^2-2p^2)\alpha^2}{(q^2-p^2)^2}\}\zeta^2$$

这样,变量 η,φ,ζ 就是主坐标了。

假设初始时有

$$x=k,y=0,z=0,\dot{x}=0,\dot{y}=0,\dot{z}=0$$

并设 k 是小量,它与其他小量的乘积可以忽略。这样,初始时就有

$$\eta=\frac{1}{2}k,\varphi=\frac{1}{2}k,\zeta=0$$

主坐标 η 和 φ 的振动由下述方程给出

$$\eta=\frac{1}{2}k\cos pt$$

$$\varphi=\frac{1}{2}k\cos\left\{\frac{p^2-\dfrac{\alpha^2(2q^2-4p^2)}{(q^2-p^2)^2}}{1+\dfrac{2\alpha^2}{(q^2-p^2)^2}}\right\}^{\frac{1}{2}}t$$

精确到 α^2 项,则

$$\varphi=\frac{1}{2}k\cos\left\{pt\left(1-\frac{\alpha^2}{p^2(q^2-p^2)}\right)\right\}$$

或

$$\varphi=\frac{1}{2}k\cos pt\cos\frac{\alpha^2 t}{p(q^2-p^2)}+\frac{1}{2}k\sin pt\sin\frac{\alpha^2 t}{p(q^2-p^2)}$$

这样,运动初始地近似表示为

$$\eta=\frac{1}{2}k\cos pt,\varphi=\frac{1}{2}k\cos pt$$

或

$$x=k\cos pt,y=0$$

在时间间隔 $\pi p(q^2-p^2)/\alpha^2$ 之后,运动近似地表示为

$$\eta=\frac{1}{2}k\cos pt,\varphi=-\frac{1}{2}k\cos pt$$

或

$$x=0,y=-k\cos pt$$

例 4 耦合摆。

如图 10.2 所示,两质量为 m,长为 l 的同样的数学摆的悬挂点在同一水平线上。在离悬挂点为 h 处联一刚度为 k 的弹簧。当摆在铅垂位置时,弹簧处于未变形状态。试确定系统在铅垂平面内的小振动[5]。

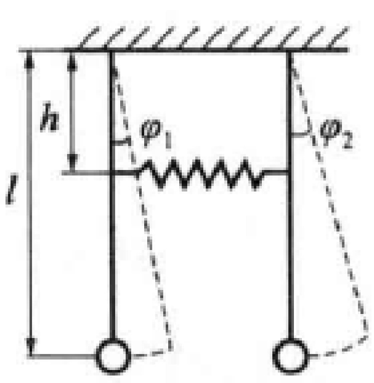


图 10.2

解:取摆与铅垂线夹角 φ_1,φ_2 为广义坐标,在平衡位置 $\varphi_1=\varphi_2=0$ 附近,系统的动能为

$$T=\frac{1}{2}ml^2(\dot{\varphi}_1^2+\dot{\varphi}_2^2)\equiv\frac{1}{2}a(\dot{\varphi}_1^2+\dot{\varphi}_2^2)$$

势能为

$$V=\frac{1}{2}mgl(\varphi_1^2+\varphi_2^2)+\frac{1}{2}kh^2(\varphi_2-\varphi_1)^2\equiv\frac{1}{2}c(\varphi_1^2+\varphi_2^2)-b\varphi_1\varphi_2$$

其中

$$a=ml^2,c=mgl+kh^2,b=kh^2$$

频率方程(10.1.25)给出

$$\begin{vmatrix} c-\omega^2 a & -b \\ -b & c-\omega^2 a \end{vmatrix}=0$$

由此得主频率

$$\omega_1^2=\frac{c-b}{a}=\frac{g}{l},\omega_2^2=\frac{c+b}{a}=\frac{g}{l}+2\frac{kh^2}{ml^2}$$

方程(10.1.24)的一个给出

$$(c-\omega^2 a)u_1-bu_2=0$$

即

$$\frac{u_1}{u_2}=\frac{b}{c-\omega^2 a}$$

对第一个主振动,$u_1=u_2=c_1$,有

$$\varphi_1=c_1\sin(\omega_1 t+\alpha_1),\varphi_2=c_1\sin(\omega_2 t+\alpha_2)$$

即

$$\varphi_1=\varphi_2$$

对第二个主振动,$u_1=-u_2=c_2$,有

$$\varphi_1=c_2\sin(\omega_2 t+\alpha_2),\varphi_2=-c_2\sin(\omega_2 t+\alpha_2)$$

即

$$\varphi_1=-\varphi_2$$

在第一个主振动中,两摆处于同一位相,弹簧不变形。在第二个主振动中,两摆反位相。振型如图 10.3 所示。

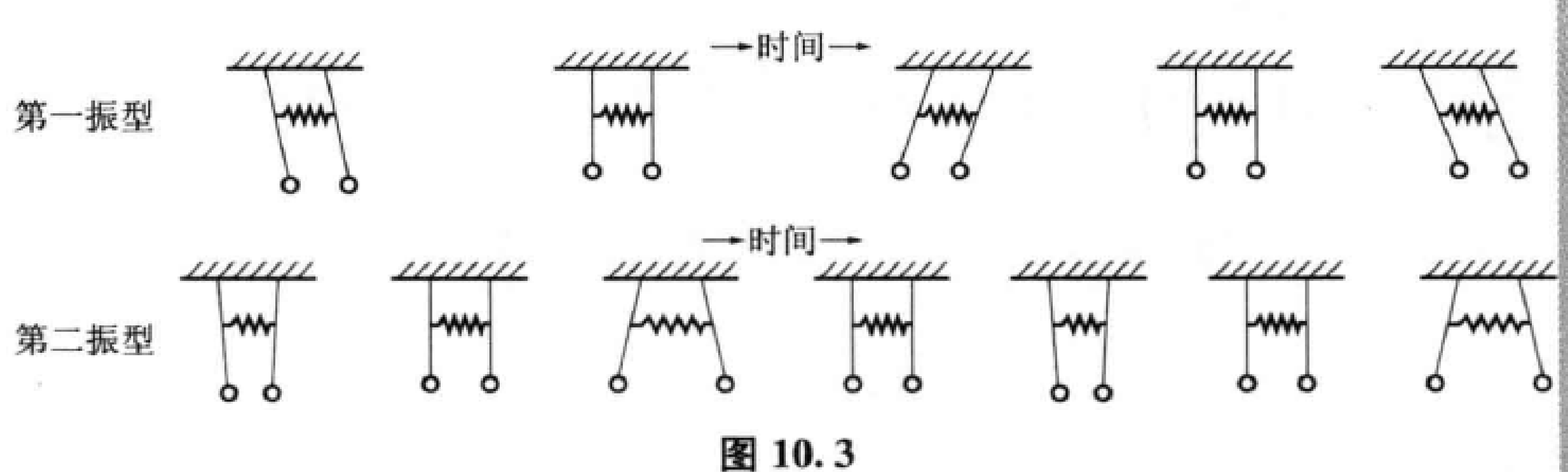


图 10.3

有了两个主振动,可得到**耦合摆**的任何振动

$$\varphi_1=c_1\sin(\omega_1 t+\alpha_1)+c_2\sin(\omega_2 t+\alpha_2)$$

$$\varphi_2 = c_1\sin(\omega_1 t+\alpha_1) - c_2\sin(\omega_2 t+\alpha_2)$$

例 5 质量为 m 的质点被自然长为 a、刚度为 k 的 n 个弹性线拴于正 n 多边形的固定角点,其外圆半径为 c。如果质点在多边形平面上轻轻地偏离平衡位置,它将在直线上发生谐振动,试证明等值单摆长为 $2mgc/nk(2c-a)$,而对垂直于多边形平面的振动,相应的长为 $mgc/nk(c-a)$。

解:首先,研究平面内的小振动。设质点从平衡位置 O 沿与某一弹性线呈任意角 α 的方向上移动一小位移 x 到点 O_1,并取 $OO_1=x$ 为广义坐标,如图 10.4 所示。质点的动能为

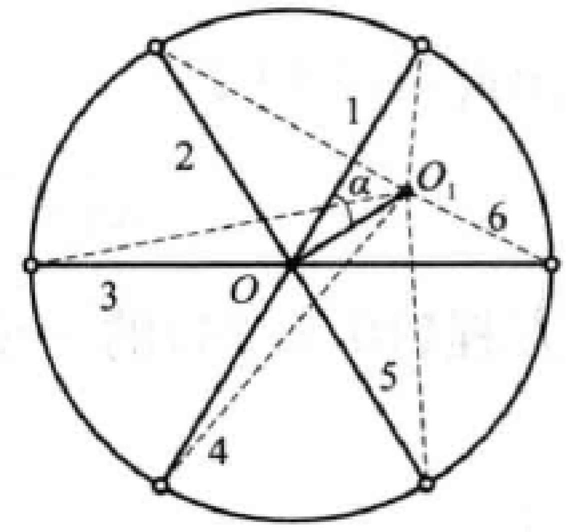


图 10.4

$$T=\frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

弹性线的势能为

$$V=\frac{1}{2}k(l_i-a)^2$$

其中 l_i 为第 i 个弹性线的长度,有

$$l_i=\left\{x^2+c^2-2xc\cos\left[\frac{2\pi}{n}(i-1)+\alpha\right]\right\}^{\frac{1}{2}}$$

因 x 是小量,可将 l_i 展开为

$$l_i=c+\left.\frac{\partial l_i}{\partial x}\right|_{x=0}x+\frac{1}{2!}\left.\frac{\partial^2 l_i}{\partial x^2}\right|_{x=0}x^2+\cdots$$

而

$$\left.\frac{\partial l_i}{\partial x}\right|_{x=0}=\frac{1}{2}\left\{x^2+c^2-2xc\cos\left[\frac{2\pi}{n}(i-1)+\alpha\right]\right\}^{-\frac{1}{2}}\left.\left\{2x-2c\cos\left[\frac{2\pi}{n}(i-1)+\alpha\right]\right\}\right|_{x=0}$$

$$=-\cos\left[\frac{2\pi}{n}(i-1)+\alpha\right]$$

$$\left.\frac{\partial^2 l_i}{\partial x^2}\right|_{x=0}=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left\{x^2+c^2-2xc\cos\left[\frac{2\pi}{n}(i-1)+\alpha\right]\right\}^{-\frac{3}{2}}\{2x-$$

$$2c\cos\left[\frac{2\pi}{n}(i-1)+\alpha\right]\}^2\Big|_{x=0}+\left\{x^2+c^2-2xc\cos\left\{\frac{2\pi}{n}(i-1)+\alpha\right]\right\}^{-\frac{1}{2}}\Big|_{x=0}$$

$$=\frac{1}{c}-\frac{1}{c}\cos^2\left[\frac{2\pi}{n}(i-1)+\alpha\right]$$

于是

$$l_i=c-x\cos\left[\frac{2\pi}{n}(i-1)+\alpha\right]+\frac{1}{2c}x^2-\frac{1}{2c}x^2\cos^2\left[\frac{2\pi}{n}(i-1)+\alpha\right]+\cdots$$

因此

$$(l_i-a)^2=\left\{c-a-x\cos\left[\frac{2\pi}{n}(i-1)+\alpha\right]+\frac{1}{2c}x^2-\frac{1}{2c}x^2\cos^2\left[\frac{2\pi}{n}(i-1)+\alpha\right]+\cdots\right\}^2$$

$$=(c-a)^2-2(c-a)x\cos\left[\frac{2\pi}{n}(i-1)+\alpha\right]+x^2\cos^2\left[\frac{2\pi}{n}(i-1)+\alpha\right]+$$

$$\frac{c-a}{c}\left\{x^2-x^2\cos^2\left[\frac{2\pi}{n}(i-1)+\alpha\right]\right\}+\cdots$$

$$=(c-a)^2-2(c-a)x\cos\left[\frac{2\pi}{n}(i-1)+\alpha\right]+$$

$$\left(1-\frac{a}{2c}\right)x^2+\frac{a}{2c}x^2\cos\left[\frac{4\pi}{n}(i-1)+2\alpha\right]+\cdots$$

势能为

$$V=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}k\left\{(c-a)^2-2(c-a)x\cos\left[\frac{2\pi}{n}(i-1)+\alpha\right]+\right.$$

$$\left.\left(1-\frac{a}{2c}\right)x^2+\frac{a}{2c}x^2\cos\left[\frac{4\pi}{n}(i-1)+2\alpha\right]+\cdots\right\}$$

注意到

$$\sum_{i=1}^{n}\cos\left[\frac{2\pi}{n}(i-1)\right]=0$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sin\left[\frac{2\pi}{n}(i-1)\right]=0 \qquad (n\geqslant 3)$$

Lagrange 方程给出

$$m\ddot{x}+kn\left(1-\frac{a}{2c}\right)x=0$$

将其表示为

$$\ddot{x}+\frac{g}{l}x=0$$

得等值单摆长

$$l=\frac{2mgc}{kn(2c-a)}$$

其次,质点垂直于平面的小振动。此时各弹性线变形一样。动能为

$$T=\frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

势能为

$$V=\frac{1}{2}kn\left(\sqrt{x^2+c^2}-a\right)^2=\frac{1}{2}kn\left[a^2-2ac+c^2+x^2\frac{c-a}{c}+\cdots\right]$$

$$=V_0+\frac{1}{2}kn\frac{c-a}{c}x^2+\cdots$$

因此,等值单摆长为

$$l=\frac{mgc}{kn(c-a)}$$

§10.2 刚体定点转动问题的分析动力学

本节讨论刚体定点转动问题,包括简史、Euler-Poisson 方程及三种经典可积情形、Харламов 方程及其降阶问题等。

10.2.1 简史

重刚体绕固定点运动问题是理论力学中最激起学者们好奇心的问题之一,寻求刚体动力学的精确解乃是分析力学的精华。

1758 年,Euler 建立了刚体动力学方程并给出刚体动力学问题的一般提法。从 1758 年到 1959 年这 200 年间,人们得到了刚体绕定点转动问题的 12 种解,其中 3 种为通解,9 种为特解。各种解的发现没有一般方法,主要靠研究者技巧,并且在很大程度上带有偶然性。有关刚体定点运动动力学已有多种专著出版[6-10]。刚体动力学的新成就是 20 世纪后半叶以苏联学者 Харламов 为首的一批学者的贡献。根据已知积分将原始方程组降阶的问题很早就提出来了,但著名的方法归结为异常笨重的,而因此实际上并不适用的方程。Харламов 放弃传统的主轴,引入所谓专门坐标轴,新选取的基本变量在此坐标轴中以自然方式建立,因此降阶基本完成。所得到的方程,称为 Харламов 方程,是两个一阶方程。在对质量分布的一些限制下。Харламов 将问题归结为一个微分—积分方程。文献[11]指出,如果刚体的运动被表示为角速度的动矢端图在定矢端图上的滚动,刚体动力学的解才称为完全解。文献[11]还给出构造完全解的算法。

10.2.2 Euler-Poisson 方程及三种经典可积情形

1)Euler-Poisson 方程

研究刚体在重力作用下绕固定点 O 的转动问题。设刚体总质量为 M,刚体质心在与刚体相固联的轴系中的坐标为(x_G,y_G,z_G)。铅垂向上的单位矢量在连体轴上投影为 γ,γ',γ''。假设连体轴为刚体在点 O 的惯性主轴,惯性主矩记作 A,B,C。刚体角速度在连体轴上投影为 p,q,r。Euler 动力学方程为

$$A\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}+(C-B)qr=Mg(z_G\gamma'-y_G\gamma'')$$

$$B\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}+(A-C)rp=Mg(x_G\gamma''-z_G\gamma) \tag{10.2.1}$$

$$C\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}+(B-A)pq=Mg(y_G\gamma-x_G\gamma')$$

在 Euler 动力学方程(10.2.1)中出现时间 t 的 6 个未知函数 $p,g,r,\gamma,\gamma',\gamma''$以及表征质量分布的 6 个常数 A,B,C,x_G,y_G,z_G。为寻求这 6 个未知函数,需再补充 3 个方程。由铅垂向上单位矢量的端点速度在固定坐标系中等于零,得到

$$\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}=r\gamma'-q\gamma'',\frac{\mathrm{d}\gamma'}{\mathrm{d}t}=p\gamma''-r\gamma,\frac{\mathrm{d}\gamma''}{\mathrm{d}t}=q\gamma-p\gamma' \tag{10.2.2}$$

这就是 Poisson 方程。

对 6 个未知函数 $p,q,r,\gamma,\gamma',\gamma''$的 6 个非线性微分方程(10.2.1),(10.2.2),称为 **Euler-Poisson 方程**。

2)Euler-Poisson 方程的三个第一积分

现将 Euler-Poisson 方程(10.2.1),(10.2.2)写成形式

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}=P,\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}=Q,\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=R,\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}=\Gamma,\frac{\mathrm{d}\gamma'}{\mathrm{d}t}=\Gamma',\frac{\mathrm{d}\gamma''}{\mathrm{d}t}=\Gamma''$$

其中

$$\begin{aligned}
P&=\{Mg(z_G\gamma'-y_G\gamma'')-(C-B)qr\}A^{-1}\\
Q&=\{Mg(x_G\gamma''-z_G\gamma)-(A-C)rp\}B^{-1}\\
R&=\{Mg(y_G\gamma-x_G\gamma')-(B-A)pq\}C^{-1}\\
\Gamma&=r\gamma'-q\gamma'',\Gamma'=p\gamma''-r\gamma,\Gamma''=q\gamma-p\gamma'
\end{aligned}$$

还可写成

$$\frac{\mathrm{d}p}{P}=\frac{\mathrm{d}q}{Q}=\frac{\mathrm{d}r}{R}=\frac{\mathrm{d}\gamma}{\Gamma}=\frac{\mathrm{d}\gamma'}{\Gamma'}=\frac{\mathrm{d}\gamma''}{\Gamma''}=\mathrm{d}t$$

解方程(10.2.1),(10.2.2)需要知道 6 个独立的第一积分。但是,因 $P,Q,R,\Gamma,\Gamma',\Gamma''$都不显含时间 t,故只需求得不含 t 的 5 个第一积分就够了。进而,因 1 是 Euler-Poisson 方程的 Jacobi 最终乘子。据 Jacobi 定理,只要知道 4 个第一积分就够了[9]。

Euler-Poisson 方程的 3 个不含时间的独立的第一积分如下:

(1)能量积分。

将方程(10.2.1)两端分别乘以 p,q,r,将方程(10.2.2)两端分别乘以 Mgx_G,Mgy_G,Mgz_G,然后相加,并积分得

$$Ap^2+Bq^2+Cr^2+2Mg(x_G\gamma+y_G\gamma'+z_G\gamma'')=C_1=2h \tag{10.2.3}$$

它表示机械能守恒。

(2)面积积分。

将方程(10.2.1)两端分别乘以 γ,γ',γ'',将方程(10.2.2)两端分别乘以 Ap,Bq,Cr,然后相加,并积分得

$$Ap\gamma+Bq\gamma'+Cr\gamma''=C_2 \tag{10.2.4}$$

它表示刚体对铅垂轴的动量矩守恒。

(3)平凡积分(几何积分)。

$$\gamma^2+\gamma'^2+\gamma''^2=C_3=1 \tag{10.2.5}$$

有了这3个经典积分,刚体绕定点转动问题的解便归结为寻求第四个积分。

3)Euler-Poisson 方程的三种经典可积情形

需补充的第四个第一积分,虽经众多数学家的努力,但在一般情形下尚未找到。在对刚体质量分布的限制下,即对 A,B,C,x_G,y_G,z_G 的限制下,补充的第一积分仅在下述三种情形中求得。

(1)Euler-Poinsot 情形。

在 Euler-Poinsot 情形下,有

$$x_G=y_G=z_G=0 \tag{10.2.6}$$

即质心 G 与固定点 O 重合。此时,Euler 方程(10.2.1)有形式

$$A\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}+(C-B)qr=0,B\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}+(A-C)rp=0$$

$$C\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}+(B-A)pq=0$$

三个方程分别乘以 Ap,Bq,Cr,然后相加并积分,得到第四个积分

$$Ap^2+Bq^2+Cr^2=C_4 \tag{10.2.7}$$

(2)Lagrange-Poisson 情形。

在 Lagrange-Poisson 情形下,有

$$A=B,x_G=y_G=0 \tag{10.2.8}$$

即固定点处的惯性椭球为旋转椭球,且质心在转轴上。此时,Euler 方程(10.2.1)最后一式为

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=0$$

而第四个积分为

$$r=C_4 \tag{10.2.9}$$

(3)Ковалевская 情形。

在 Ковалевская 情形下,有

$$A=B=2C,y_G=z_G=0 \tag{10.2.10}$$

此时,Euler 方程(10.2.1)给出

$$2\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}-qr=0,2\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}+rp=c\gamma'',\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=-c\gamma'$$

其中

$$c=\frac{Mgx_G}{C}$$

第四个积分为

$$(p^2-q^2-c\gamma)^2+(2pq-c\gamma')^2=C_4 \tag{10.2.11}$$

在以上三种情形下,问题归结为求积分。在前两种情形下,Euler-Poisson方程的通解表示为时间的椭圆函数,而在第三种情形下表示为时间的超椭圆函数。

10.2.3 Харламов 方程及其降阶问题

1)专门坐标轴中的运动方程

取任意直角坐标系 $O\xi_1\xi_2\xi_3$,轴向单位矢量 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 固联在刚体上,动量矩为

$$\boldsymbol{K}=x_1\boldsymbol{e}_1+x_2\boldsymbol{e}_2+x_3\boldsymbol{e}_3$$

角速度为

$$\boldsymbol{\omega}=\omega_1\boldsymbol{e}_1+\omega_2\boldsymbol{e}_2+\omega_3\boldsymbol{e}_3$$

因为

$$\boldsymbol{K}=\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{L}$$

其中

$$\boldsymbol{L}=\begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13}\\ L_{21} & L_{22} & L_{23}\\ L_{31} & L_{32} & L_{33}\end{bmatrix}$$

是惯量张量,于是

$$x_i=L_{i1}\omega_1+L_{i2}\omega_2+L_{i3}\omega_3 \qquad (i=1,2,3)$$

由此可反解出

$$\omega_i=l_{i1}x_1+l_{i2}x_2+l_{i3}x_3$$

其中

$$l_{11}=\frac{1}{\Delta}(L_{22}L_{33}-L_{23}^2),\ l_{22}=\frac{1}{\Delta}(L_{33}L_{11}-L_{31}^2),\ l_{33}=\frac{1}{\Delta}(L_{11}L_{22}-L_{12}^2)$$

$$l_{23}=l_{32}=\frac{1}{\Delta}(L_{12}L_{31}-L_{11}L_{23}),\ l_{31}=l_{13}=\frac{1}{\Delta}(L_{23}L_{12}-L_{22}L_{31})$$

$$l_{12}=l_{21}=\frac{1}{\Delta}(L_{31}L_{23}-L_{33}L_{12}),\ \Delta=\det(L_{ij})\neq 0$$

刚体的动能为

$$\begin{aligned} T&=\frac{1}{2}\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{\omega}=\frac{1}{2}(L_{11}\omega_1^2+L_{22}\omega_2^2+L_{33}\omega_3^2)+L_{23}\omega_2\omega_3+L_{31}\omega_3\omega_1+L_{12}\omega_1\omega_2\\ &=\frac{1}{2}(l_{11}x_1^2+l_{22}x_2^2+l_{33}x_3^2)+l_{23}x_2x_3+l_{31}x_3x_1+l_{12}x_1x_2 \end{aligned} \tag{10.2.12}$$

现将坐标轴 $O\xi_1\xi_2\xi_3$ 绕轴 $O\xi_1$ 转一角 α，得到新坐标系 $O\xi_1^*\xi_2^*\xi_3^*$，动量矩在新坐标中记作 x_1^*,x_2^*,x_3^*，有

$$x_1=x_1^*,x_2=x_2^*\cos\alpha-x_3^*\sin\alpha,x_3=x_2^*\sin\alpha+x_3^*\cos\alpha$$

而动能为

$$T=\frac{1}{2}(l_{11}^*x_1^{*2}+l_{22}^*x_2^{*2}+l_{33}^*x_3^{*2})+l_{23}^*x_2^*x_3^*+l_{31}^*x_3^*x_1^*+l_{12}^*x_1^*x_2^*$$

其中 l_{ij}^* 可用 l_{ij} 表示出，特别地，有

$$l_{23}^*=\frac{1}{2}(l_{33}-l_{22})\sin 2\alpha+l_{23}\cos 2\alpha$$

现在取

$$\alpha=\frac{1}{2}\arctan\frac{2l_{23}}{l_{22}-l_{33}}$$

则有

$$l_{23}^*=0$$

而动能为

$$T=\frac{1}{2}(l_{11}^*x_1^{*2}+l_{22}^*x_2^{*2}+l_{33}^*x_3^{*2})+(l_{31}^*x_3^*+l_{12}^*x_2^*)x_1^* \tag{10.2.13}$$

现取专门坐标系 $O\eta_1\eta_2\eta_3$，使 $O\eta_1$ 通过质心 G，而轴 $O\eta_2$ 和 $O\eta_3$ 的放置以使动能有表达式(10.2.13)。用 a,a_1,a_2,b_1,b_2 代替 $l_{11}^*,l_{22}^*,l_{33}^*,l_{12}^*,l_{31}^*$，用 x,y,z 代替 x_1^*,x_2^*,x_3^*，用 $\omega_x,\omega_y,\omega_z$ 代替 $\omega_1,\omega_2,\omega_3$，则动能和角速度表示为

$$T=\frac{1}{2}(ax^2+a_1y^2+a_2z^2)+(b_1y+b_2z)x \tag{10.2.14}$$

$$\omega_x=ax+b_1y+b_2z,\omega_y=a_1y+b_1x,\omega_2=a_2z+b_2x \tag{10.2.15}$$

于是，重刚体绕固定点运动的方程在专门坐标系中表示为[7,9]

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt}&=(a_2-a_1)yz+(b_2y-b_1z)x\\
\frac{dy}{dt}&=(a-a_2)zx+(b_1y+b_2z)z-b_2x^2-\nu_3\Gamma\\
\frac{dz}{dt}&=-(a-a_1)yx-(b_1y+b_2z)y+b_1x^2+\nu_2\Gamma
\end{aligned} \tag{10.2.16}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\nu_1}{dt}&=(a_2z+b_2x)\nu_2-(a_1y+b_1x)\nu_3\\
\frac{d\nu_2}{dt}&=(ax+b_1y+b_2z)\nu_3-(a_2z+b_2x)\nu_1\\
\frac{d\nu_3}{dt}&=-(ax+b_1y+b_2z)\nu_2+(a_1y+b_1x)\nu_1
\end{aligned} \tag{10.2.17}$$

其中 ν_1,ν_2,ν_3 为铅垂向上单位矢量在专门坐标轴中的投影，而 $\Gamma=-mg\rho_G$ (ρ_G为距离 $\overline{OG}$)。

在专门坐标系中,三个经典积分表示为

$$\frac{1}{2}(ax^2+a_1y^2+a_2z^2)+(b_1y+b_2z)x-\nu_1\Gamma=E \tag{10.2.18}$$

$$x\nu_1+y\nu_2+z\nu_3=m_1 \tag{10.2.19}$$

$$\nu_1^2+\nu_2^2+\nu_3^2=1 \tag{10.2.20}$$

2)Харламов 方程

下面利用积分(10.2.18)~(10.2.20)来降阶方程(10.2.16),(10.2.17)。用式(10.2.16)后两个方程和积分(10.2.18)来表达量 ν_1,ν_2,ν_3,有

$$\begin{aligned}\nu_1\Gamma&=\frac{1}{2}(ax^2+a_1y^2+a_2z^2)+(b_1y+b_2z)x-E\\ \nu_2\Gamma&=(a-a_1)yx+(b_1y+b_2z)y-b_1x^2+\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\\ \nu_3\Gamma&=(a-a_2)zx+(b_1y+b_2z)z-b_2x^2-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\end{aligned} \tag{10.2.21}$$

将其代入积分(10.2.19),(10.2.20),得到

$$y\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}-z\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+(b_1y+b_2z)(y^2+z^2)+$$

$$x\left\{\left(a-\frac{a_1}{z}\right)y^2+(a-\frac{a_2}{2})z^2\right\}+\frac{1}{2}ax^3-Ex-m=0 \qquad (m=\Gamma m_1)$$

$$\left\{\frac{1}{2}(ax^2+a_1y^2+a_2z^2)+(b_1y+b_2z)x-E\right\}^2+$$

$$\left\{(a-a_1)yx+(b_1y+b_2z)y-b_1x^2+\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right\}^2+$$

$$\left\{(a-a_2)zx+(b_1y+b_2z)z-b_2x^2-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right\}^2-\Gamma^2=0$$

由此借助式(10.2.16)第一个消去 t,得到如下两个一阶方程

$$\{(a_2-a_1)yz+(b_2y-b_1z)x\}\left(y\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}-z\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)+$$

$$(b_1y+b_2z)(y^2+z^2)+x\left\{\left(a-\frac{a_1}{2}\right)y^2+\left(a-\frac{a_2}{z}\right)z^2\right\}+$$

$$\frac{1}{2}ax^3-Ex-m=0,$$

$$\left\{(a-a_1)xy+(b_1y+b_2z)y-b_1x^2+[(a_2-a_1)yz+(b_2y-b_1z)x]\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right\}^2+$$

$$\left\{(a-a_2)xz+(b_1y+b_2z)z-b_2x^2+[(a_1-a_2)yz+(b_1z-b_2y)x]\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right\}^2+$$

$$\left\{\frac{1}{2}(ax^2+a_1y^2+a_2z^2)+(b_1y+b_2z)x-E\right\}^2-\Gamma^2=0$$

由这两个方程解出$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$和$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$,有

$$(y^2+z^2)\{(a_2-a_1)yz+(b_2y-b_1z)x\}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$
$$=(y^2+z^2)\{(a-a_2)zx+(b_1y+b_2z)z-b_2x^2\}+$$
$$xz\left\{\frac{1}{2}(ax^2+a_1y^2+a_2z^2)+(b_1y+b_2z)x-E\right\}-mz+yR \tag{10.2.22}$$
$$(y^2+z^2)\{(a_1-a_2)yz+(b_1z-b_2y)x\}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$$
$$=(y^2+z^2)\{(a-a_1)xy+(b_1y+b_2z)y-b_1x^2\}+$$
$$xz\left\{\frac{1}{2}(ax^2+a_1y^2+a_2z^2)+(b_1y+b_2z)x-E\right\}-my-zR$$

其中

$$R^2=(y^2+z^2)\Gamma^2+2mx\left\{\frac{1}{2}(ax^2+a_1y^2+a_2z^2)+(b_1y+b_2z)x-E\right\}-$$
$$(x^2+y^2+z^2)\left\{\frac{1}{2}(ax^2+a_1y^2+a_2z^2)+(b_1y+b_2z)x-E\right\}^2-m^2 \tag{10.2.23}$$

方程(10.2.22)称为 **Харламов 方程**[9,10]。如果可由方程(10.2.22)解得 $y=y(x)$, $z=z(x)$,将其代入方程(10.2.16)的第一个就可求得 $x=x(t)$,再将这些代入式(10.2.21)可求得 ν_1,ν_2,ν_3。注意到,x 为常数时的解需单独研究。Харламов 方程(10.2.22)还可归结为一个二阶方程[9]。当 $b_2=0$ 时,Харламова 证明,专门坐标轴中的方程可归结为一个积分-微分方程[9]。

10.2.4 Euler-Poisson 方程的若干特殊可积情形

Euler-Poinsot 情形、**Lagrange-Poisson 情形**和 **Ковалевская 情形**是 Euler-Poisson 方程的通解。如果不仅对刚体质量分布加以限制,而且对运动的初始条件也加以限制,则找到的解为特解。从 1890 年到 1959 年,共找到 9 种特解。

1)Hess 情形(1890 年)

在 **Hess 情形**,对刚体质量分布的限制条件为

$$y_G=0, Ax_G^2(B-C)=Cz_G^2(A-B) \tag{10.2.24}$$

此时有第四个积分

$$Ax_Gp+Cz_Gr=0 \tag{10.2.25}$$

条件(10.2.25)表示刚体动量矩在固定点 O 与质心 G 的连线上的投影为零,这是对运动初始条件的限制,它是一个特殊积分。

2)Бобылев-Стеклов 情形(1896 年)

在此情形,对刚体质量分布的限制条件为

$$B=2A, x_G=z_G=0 \tag{10.2.26}$$

此时积分为

$$r=0, q=q_0=\text{const.}, p=\frac{Mgy_G}{Aq_0}\gamma \tag{10.2.27}$$

3) Стеклов 情形(1899 年)

在此情形,对刚体质量分布的限制条件为

$$y_G=z_G=0 \tag{10.2.28}$$

且有

$$\begin{gathered}
-\gamma'=pq\,\frac{(A-B)(A-C)}{(2C-A)Mgx_G}\\
-\gamma''=pr\,\frac{(A-B)(A-C)}{(2B-A)Mgx_G}\\
Ap^2+(2B-A)q^2+(2C-A)r^2=0\\
A^2p^2+(2B-A)Bq^2+(2C-A)Cr^2=A\,\frac{(2B-A)(A-2C)}{(B-A)(A-C)}Mgx_G
\end{gathered} \tag{10.2.29}$$

4) Горячев 情形(1899 年)

在此情形,对刚体质量分布的限制条件为

$$y_G=z_G=0, AC=8(A-2B)(B-C) \tag{10.2.30}$$

此时有

$$-\gamma'=\frac{4B-3A}{2Mgx_G}pq, -\gamma''=\frac{(\varepsilon+\mu p^2)}{Mgx_G}pr \tag{10.2.31}$$

其中

$$\varepsilon=\frac{3A-4B}{BC}(2B-C)(2B-3C)$$

$$\mu=\frac{\varepsilon A(3A-4B)(4B-3C)(5C-4B)}{32Mgx_GBC(B-C)}$$

以及

$$\frac{B-C}{A}r^2=\frac{A-B+\frac{1}{2}(4B-3A)}{C}p^2+\frac{BCMgx_G}{(3A-4B)(2B-C)(2B-3C)} \tag{10.2.32}$$

5) Чаплыгин 情形(1904 年)

在此情形,对刚体质量分布的限制条件为

$$9(2B-A)(2C-A)=4BC, y_G=z_G=0 \tag{10.2.33}$$

此时有

$$-\gamma'=(\delta+\lambda p^{-\frac{4}{3}})\frac{pq}{Mgx_G}, -\gamma''=(\varepsilon+\mu p^{-\frac{4}{3}})\frac{pr}{Mgx_G} \tag{10.2.34}$$

其中

$$\delta=\frac{(B-A)(C-A)}{2C-A}, \varepsilon=\frac{(B-A)(C-A)}{2B-A}$$

$$\lambda=\frac{C(3A-2B)}{2C-A}-s,\mu=\frac{B(3A-2C)}{2B-A}s$$

而 s 为下列方程的根

$$A^3(2B+2C-3A)s^3=\frac{4(2B-A)^2(2C-A)^2}{9(3A-2B)(3A-2C)}M^2g^2x_G^2$$

并且有

$$A^2p^2-(2B-A)(2B-3A)q^2-(2C-A)(2C-3A)r^2=0 \quad (10.2.35)$$

6)Kowalewski 情形(1908 年)

在此情形,对刚体质量分布的限制条件为

$$A=18C\frac{B-C}{10B-9C},y_G=z_G=0 \quad (10.2.36)$$

此时有

$$-Mgx_G\gamma''=3C\frac{3C-2B}{10B-9C}r\left\{p-\frac{(3C-2B)(3C-4B)}{b(10B-9C)}\right\} \quad (10.2.37)$$

以及

$$q^2+m_0(p-c_0)^2=m_1=\text{const.} \quad (10.2.38)$$

其中 b 为常数,而

$$m_0=\frac{36C^2}{(10B-9C)^2},C_0=\frac{3}{2}\frac{(3C-2B)^2(3C-4B)}{bB(10B-9C)}$$

7) Горячев-Чаплыгин 情形(1900 年)

在此情形,对刚体质量分布的限制条件为

$$A=B=4C,Y_G=Z_G=0 \quad (10.2.39)$$

此时有

$$4(p\gamma+q\gamma')+r\gamma''=0 \quad (10.2.40)$$

$$r(p^2+q^2)-\frac{Mgx_G}{C}p\gamma''=\text{const.}$$

8)Grioli 情形(1947 年)

在此情形,对刚体质量分布的限制条件为

$$y_G=0,\sqrt{B-C}x_G=\sqrt{A-B}z_G \quad (10.2.41)$$

此时有积分

$$(Ax_Gp+Cz_Gr)q-Mg(x_G^2+z_G^2)\gamma'=0$$

$$x_Gp+z_Gr=m_0=\text{const.} \quad (10.2.42)$$

$$Bm_0(z_Gp-x_Gr)-(A-C)(x_G^2+z_G^2)pr+Mg(x_G^2+z_G^2)(x_G\gamma''-z_G\gamma)=0$$

$$p^2+q^2+r^2=c=\text{const.}$$

9) Харламова 情形(1959 年)

在此情形,对刚体质量分布的限制条件为

$$y_G=0$$

$$(2C-A)\sqrt{A(C-B)(2C-A)}x_G+(C-2A)\sqrt{C(A-B)(C-2A)}z_G=0 \tag{10.2.43}$$

$$C>2A>2B, x_G<0$$

此时有积分

$$Ap\cos\rho+Cr\sin\rho=n=\text{const.} \tag{10.2.44}$$

$$-Mg\gamma'\sqrt{x_G^2+z_G^2}=q(bp+b''r)$$

其中

$$\sin\rho=\sqrt{\frac{A(C-B)(2C-A)}{(C-A)\{3AC-B(A+C)\}}}$$

$$\cos\rho=\sqrt{\frac{C(A-B)(C-2A)}{(C-A)\{3AC-B(A+C)\}}}$$

$$b=\frac{(A-B)\sqrt{x_G^2+z_G^2}\sin\rho}{z_G\cos\rho-x_G\sin\rho}$$

$$b''=\frac{(B-C)\sqrt{x_G^2+z_G^2}\cos\rho}{z_G\cos\rho-x_G\sin\rho}$$

值得注意的是，在 Харламова 情形中，要求 $C>2A>2B$。但是，对刚体来说，这个条件不能实现，因为这与 $A+B>C$ 相矛盾。后来有人证明，这个条件对于充满无摩擦不可压缩流体的回转刚体是可实现的。

20 世纪 60 年代开始，人们借助不变关系方法找到了一些新的精确解[10]。

§10.3 相对运动动力学的 Lagrange 方程

随着科学技术的发展，对复杂系统的动力学研究变得越来越重要。这些复杂系统的运动包括载体的运动以及被载体相对于载体的运动。研究复杂系统的运动，可在惯性坐标系中进行，也可在固联于载体上的动坐标系中进行。用分析力学的理论与方法研究力学系统的相对运动动力学，不仅在表现形式上达到统一，而且对复杂系统显示出优越性。20 世纪初，Whittaker 研究了受匀速转动约束的 Lagrange 方程[1]。20 世纪 60 年代，Лурье 研究了完整系统的一般相对运动动力学[12]。对非完整系统，也可研究其相对运动动力学[13]。

10.3.1 被载体相对运动微分方程的一般形式

研究一质点系，它由载体和被载体组成，而被载体由 N 个质点组成。假设载体的运动已知，需要确定被载体的运动，并且假设被载体的运动不改变载体事先给定的运动规律。

假设载体的运动由基点 O 的速度 $\boldsymbol{v}_0$ 和它的角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 来确定。被载质点相对惯性坐标系 $\overline{O}xyz$ 的位置由矢径 $\boldsymbol{r}_i$ 确定，相对与载体相固联的坐标系 $Ox'y'z'$

的位置由矢经 $\boldsymbol{r}'_i$ 确定，设 $\boldsymbol{r}'_i$ 不显含时间 t，即

$$\boldsymbol{r}'_i=\boldsymbol{r}'_i(q_s) \qquad (i=1,2,\cdots,N;s=1,2,\cdots,n) \tag{10.3.1}$$

用 $\boldsymbol{r}_0$ 表示载体基点 O 的矢径，则有

$$\boldsymbol{r}_i=\boldsymbol{r}_0+\boldsymbol{r}'_i$$

其中 $\boldsymbol{r}_0$ 为时间的已知函数。将式(10.3.1)对时间 t 求导数，得

$$\dot{\boldsymbol{r}}'_i=\overset{*}{\boldsymbol{r}}{}'_i+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}'_i=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial\boldsymbol{r}'_i}{\partial q_s}\dot{q}_s+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}'_i \tag{10.3.2}$$

其中 $\overset{*}{r}{}'_i$ 为 $\boldsymbol{r}'_i$ 的相对导数。系统绝对运动的动能为

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\dot{\boldsymbol{r}}_i=\frac{1}{2}M\boldsymbol{v}_0^2+M\boldsymbol{v}_0\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}'_C)+$$
$$\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\theta}^0\cdot\boldsymbol{\omega}+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}m_i\overset{*}{\boldsymbol{r}}{}'_i\cdot\overset{*}{\boldsymbol{r}}{}'_i+\boldsymbol{v}_0\cdot\boldsymbol{Q}_{\mathrm{r}}+\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{K}_{\mathrm{r}}^0 \tag{10.3.3}$$

其中 $M=\sum_{i=1}^{N}m_i$ 为被载质点系的总质量，$\boldsymbol{r}'_C=\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N}m_i\boldsymbol{r}'_i$ 为被载体质心在 $Ox'y'z'$ 中的矢径，$\boldsymbol{\theta}^0$ 为系统在点 O 的**惯量张量**，$\boldsymbol{Q}_{\mathrm{r}}$ 为系统相对动量主矢

$$\boldsymbol{Q}_{\mathrm{r}}=\sum_{i=1}^{N}m_i\overset{*}{\boldsymbol{r}}{}'_i$$

$\boldsymbol{K}_{\mathrm{r}}^0$ 为系统对基点 O 的相对动量矩主矢

$$\boldsymbol{K}_{\mathrm{r}}^0=\sum_{i=1}^{N}m_i\boldsymbol{r}'_i\times\overset{*}{\boldsymbol{r}}{}'_i$$

将式(10.3.3)写成形式

$$T=T_{\mathrm{e}}+T_{\mathrm{m}}+T_{\mathrm{r}} \tag{10.3.4}$$

则有

$$T_{\mathrm{e}}=\frac{1}{2}M\boldsymbol{v}_0^2+M\boldsymbol{v}_0\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}'_C)+\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\theta}^0\cdot\boldsymbol{\omega} \tag{10.3.5}$$

$$T_{\mathrm{m}}=\boldsymbol{v}_0\cdot\boldsymbol{Q}_{\mathrm{r}}+\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{K}_{\mathrm{r}}^0 \tag{10.3.6}$$

$$T_{\mathrm{r}}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}m_i\overset{*}{\boldsymbol{r}}{}'_i\cdot\overset{*}{\boldsymbol{r}}{}'_i \tag{10.3.7}$$

它们分别为牵运动动能、混合动能和相对运动动能。

下面由 Lagrange 方程导出相对运动动力学的 Lagrange 方程。将 Lagrange 方程表示为

$$\mathrm{E}_s(T_{\mathrm{e}})+\mathrm{E}_s(T_{\mathrm{m}})+\mathrm{E}_s(T_{\mathrm{r}})=Q_s \qquad (s=1,2,\cdots,n) \tag{10.3.8}$$

其中

$$\mathrm{E}_s=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial\dot{q}_s}-\frac{\partial}{\partial q_s}$$

为 Euler 算子。做计算，得[12]

$$\mathrm{E}_s(T_e) = -M(\boldsymbol{v}_0 \times \boldsymbol{\omega}) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}'_C}{\partial q_s} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\theta}^0}{\partial q_s} \cdot \boldsymbol{\omega} \tag{10.3.9}$$

$$\mathrm{E}_s(T_m) = M\overset{*}{\dot{\boldsymbol{v}}}_0 \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}'_C}{\partial q_s} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{K}_r^0}{\partial \dot{q}_s} + \boldsymbol{\omega} \cdot \mathrm{E}_s^*(\boldsymbol{K}_r^0) \tag{10.3.10}$$

这里星号“*”表示在计算 Euler 算子时对时间的导数是在与载体相固联的坐标系中进行的。将式(10.3.9)和式(10.3.10)代入方程(10.3.8)，得

$$\mathrm{E}_s(T_r) = Q_s - M(\overset{*}{\boldsymbol{v}}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_0) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}'_C}{\partial q_s} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\theta}^0}{\partial q_s} \cdot \boldsymbol{\omega}$$
$$- \dot{\boldsymbol{\omega}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{K}_r^0}{\partial \dot{q}_s} - \boldsymbol{\omega} \cdot \mathrm{E}_s^*(\boldsymbol{K}_r^0) \tag{10.3.11}$$

下面说明方程(10.3.11)右端各项的力学意义。矢量

$$-M\dot{\boldsymbol{v}}_0 = -M(\overset{*}{\boldsymbol{v}}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_0)$$

称为平移运动的惯性力，而量

$$Q_s^0 = -M\dot{\boldsymbol{v}}_0 \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}'_C}{\partial q_s} = -\frac{\partial}{\partial q_s} M(\overset{*}{\boldsymbol{v}}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_0) \cdot \boldsymbol{r}'_C = -\frac{\partial V^0}{\partial q_s} \tag{10.3.12}$$

称为平移运动的广义惯性力，其中 V^0 为这些力的均匀场势能。角速度投影的二次型

$$V^\omega = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\theta}^0 \cdot \boldsymbol{\omega} \tag{10.3.13}$$

为离心力势能，而量

$$Q_s^\omega = -\frac{\partial V^\omega}{\partial q_s} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\theta}^0}{\partial q_s} \cdot \boldsymbol{\omega} \tag{10.3.14}$$

为广义离心力。又

$$-\dot{\boldsymbol{\omega}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{K}_r^0}{\partial \dot{q}_s} = -\sum_{i=1}^{N} m_i(\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{r}'_i) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}'_i}{\partial q_s} = Q_s^{\dot{\omega}} \tag{10.3.15}$$

为广义转动惯性力。最后一项

$$-\boldsymbol{\omega} \cdot \mathrm{E}_s^*(\boldsymbol{K}_r^0) = -\sum_{i=1}^{N} m_i(2\boldsymbol{\omega} \times \overset{*}{\dot{\boldsymbol{r}}}{}'_i) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}'_i}{\partial q_s} \tag{10.3.16}$$

表示广义 **Coriolis 惯性力**，同时也可作为广义陀螺力

$$-\boldsymbol{\omega} \cdot \mathrm{E}_s^*(\boldsymbol{K}_r^0) = \Gamma_s = \sum_{k=1}^{n} \gamma_{sk}\dot{q}_k \tag{10.3.17}$$

其中**陀螺系数**为

$$\gamma_{sk} = 2\boldsymbol{\omega} \cdot \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\partial \boldsymbol{r}'_i}{\partial q_s} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}'_i}{\partial q_k} = -\gamma_{ks} \tag{10.3.18}$$

最后，将式(10.3.12)，(10.3.14)，(10.3.15)和(10.3.17)代入式(10.3.11)，得到[12]

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T_r}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial T_r}{\partial q_s}=Q_s-\frac{\partial}{\partial q_s}(V^0+V^\omega)+Q_s^{\dot{\omega}}+\Gamma_s \qquad (s=1,2,\cdots,n) \tag{10.3.19}$$

方程(10.3.19)就是完整力学系统相对运动动力学的Lagrange方程。方程左端仅依赖由被载体相对载体的位形和运动所确定的量。只要在方程右端给主动力加上由载体运动引起的惯性力,相对运动方程就有绝对运动方程的形式。

10.3.2 被载体相对运动微分方程的几种特殊形式

首先,如果载体做平移,则有

$$V^\omega=Q_s^{\dot{\omega}}=\Gamma_s=0 \qquad (s=1,2,\cdots,n)$$

则方程(10.3.19)成为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T_r}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial T_r}{\partial q_s}=Q_s-\frac{\partial V^0}{\partial q_s} \qquad (s=1,2,\cdots,n) \tag{10.3.20}$$

其次,如果载体做定点运动,可取固定点为基点,则有

$$V^0=0$$

而方程(10.3.19)给出

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T_r}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial T_r}{\partial q_s}=Q_s-\frac{\partial V^\omega}{\partial q_s}+Q_s^{\dot{\omega}}+\Gamma_s \qquad (s=1,2,\cdots,n) \tag{10.3.21}$$

最后,如果载体做定轴匀速转动,则再

$$V^0=Q_s^{\dot{\omega}}=0$$

方程(10.3.19)给出

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T_r}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial T_r}{\partial q_s}=Q_s-\frac{\partial V^\omega}{\partial q_s}+\Gamma_s \qquad (s=1,2,\cdots,n) \tag{10.3.22}$$

若取定轴为$\overline{O}z(Oz')$,则

$$V^\omega=-\frac{1}{2}\omega^2\sum_{i=1}^{N}m_i(x_i'^2+y_i'^2)$$

$$\Gamma_s=2\omega\sum_{i=1}^{N}m_i\left(\overset{*}{y}{}_i'\frac{\partial x'_i}{\partial q_s}+\overset{*}{x}{}_i'\frac{\partial y'_i}{\partial q_s}\right)$$

于是方程(10.3.22)给出

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T_r}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial T_r}{\partial q_s}=Q_s+\omega^2\sum_{i=1}^{N}m_i\left(x'_i\frac{\partial x'_i}{\partial q_s}+y'_i\frac{\partial y'_i}{\partial q_s}\right)+$$
$$2\omega\sum_{i=1}^{N}m_i\left(\overset{*}{y}{}_i'\frac{\partial x'_i}{\partial q_s}-\overset{*}{x}{}_i'\frac{\partial y'_i}{\partial q_s}\right) \qquad (s=1,2,\cdots,n) \tag{10.3.23}$$

在不少情况下,方程(10.3.23)右端第三项为零。

10.3.3 能量方程

现将广义力Q_s分成两部分

$$Q_s=Q'_s+Q''_s$$

其中 Q''_s 为有势力

$$Q''_s=-\frac{\partial V}{\partial q_s}$$

而 Q'_s 为非势力。这样,方程(10.3.19)可写成形式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L_r}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial L_r}{\partial q_s}=Q'_s+Q_s^{\dot{\omega}}+\Gamma_s \qquad (s=1,2,\cdots,n) \tag{10.3.24}$$

其中

$$L_r=T_r-V-V^0-V^\omega \tag{10.3.25}$$

将方程(10.3.24)两端乘以 $\dot{q}_s$ 并对 s 求和,得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L_r}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s-L_r\right)=\sum_{s=1}^{n}Q'_s\dot{q}_s+\sum_{s=1}^{n}Q_s^{\dot{\omega}}\dot{q}_s+\sum_{s=1}^{n}\Gamma_s\dot{q}_s-\frac{\partial L_r}{\partial t}$$

由陀螺力性质,有

$$\sum_{s=1}^{n}\Gamma_s\dot{q}_s=0$$

于是有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L_r}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s-L_r\right)=\sum_{s=1}^{n}Q'_s\dot{q}_s+\sum_{s=1}^{n}Q_s^{\dot{\omega}}\dot{q}_s-\frac{\partial L_r}{\partial t} \tag{10.3.26}$$

这就是完整力学系统相对运动动力学的能量方程。由能量方程(10.3.26),可得如下结果:

如果 L_r 不显含时间 t,非势力为陀螺力或不存在,且 $\dot{\boldsymbol{\omega}}=0$,则系统存在广义能量积分

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L_r}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s-L_r=\text{const.} \tag{10.3.27}$$

10.3.4 相对平衡

设
$$q_s=q_s^0=\text{const.} \qquad (s=1,2,\cdots,n) \tag{10.3.28}$$

是被载体的相对平衡位置。当研究被载体相对平衡时,自然要提出下述问题:①载体怎样运动才存在**相对平衡**;②如何确定可能的相对平衡位置;③什么样的相对平衡位置是稳定的,什么样的是不稳定的。限于研究载体的这样运动:载体上任何点的加速度,对于与载体固联的轴系来说,其大小和方向都不改变,因此,基点的加速度和载体的角速度对载体来说大小和方向保持不变。此外,还解设方程(10.3.19)中的广义力 Q_s 不依赖于时间。

当被载体处于相对平衡时,广义相对速度 $\dot{q}_s$ 和广义相对加速度 $\ddot{q}_s$ 都等于零,因此,相对运动动能 T_r 和陀螺力 Γ_s 也等于零。此外,据对载体运动所作假设,广义转动惯性力 $Q_s^{\dot{\omega}}$ 也等于零。这样,由方程(10.3.19)得到广义坐标 q_s^0 满足方程

$$Q_s-\frac{\partial}{\partial q_s}(V^0+V^\omega)=0 \qquad (s=1,2,\cdots,n) \tag{10.3.29}$$

如果方程(10.3.29)有一个或几个解,那么就确定了相对平衡位置。相对平衡位置的稳定性,可按运动稳定性的通常方法分别对每个可能的相对平衡位置进行研究。

10.3.5 应用举例

例 1 在重力作用下,一质量为 m 的质点在半径为 a 的光滑圆管中运动,此圆管以角速度 ω 绕与其平面成 α 角并过圆心的固定铅垂轴 Oz 匀速转动。试建立质点的相对运动微分方程,并研究其相对平衡位置。

解:问题属于载体以匀角速度 ω 做定轴转动的情形。取质点离圆管最低点张角 θ 为广义坐标,则相对运动动能为

$$T_r=\frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2$$

势能为

$$V=-mga\cos\theta\cos\alpha$$

在圆管上固联一坐标系 $Ox'y'z'$,其中 Oz' 与 Oz 重合,Oy' 与 Oz' 垂直且在圆管平面内,Ox' 与 Oy',Oz' 成右手系,如图 10.5 所示。质点的相对坐标为

$$x'=a\cos\theta\sin\alpha,\ y'=a\sin\theta,\ z'=-a\cos\theta\cos\alpha$$

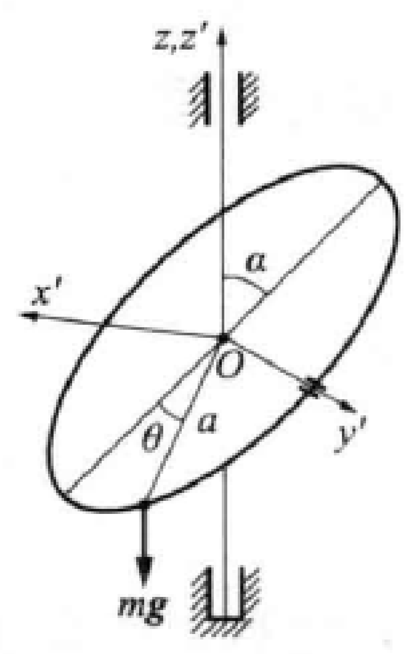


图 10.5

相对运动动力学的 Lagrange 方程(10.3.23)给出

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T_r}{\partial\dot{\theta}}-\frac{\partial T_r}{\partial\theta}=-\frac{\partial V}{\partial\theta}+m\omega^2\left(x'\frac{\partial x'}{\partial\theta}+y'\frac{\partial y'}{\partial\theta}\right)+2m\omega\left(\overset{*}{y}{}'\frac{\partial x'}{\partial\theta}-\overset{*}{x}{}'\frac{\partial y'}{\partial\theta}\right)$$

即

$$ma^2\ddot{\theta}=-mga\sin\theta\cos\alpha+m\omega^2a^2\sin\theta\cos\theta\cos^2\alpha$$

假设 $\theta=\theta_0$ 是相对平衡位置,则有

$$-mga\sin\theta_0\cos\alpha+m\omega^2a^2\sin\theta_0\cos\theta_0\cos^2\alpha=0$$

由此得

$$\sin\theta_0=0$$

$$\cos\theta_0=\frac{g}{a\omega^2\cos\alpha}$$

前一个方程给出两个平衡位置:$\theta_0=0$ 和 $\theta_0=\pi$。后一个方程,在

$$\frac{g}{a\omega^2\cos\alpha}\leqslant 1$$

时有解

$$\theta_0=\arccos\left(\frac{g}{a\omega^2\cos\alpha}\right)$$

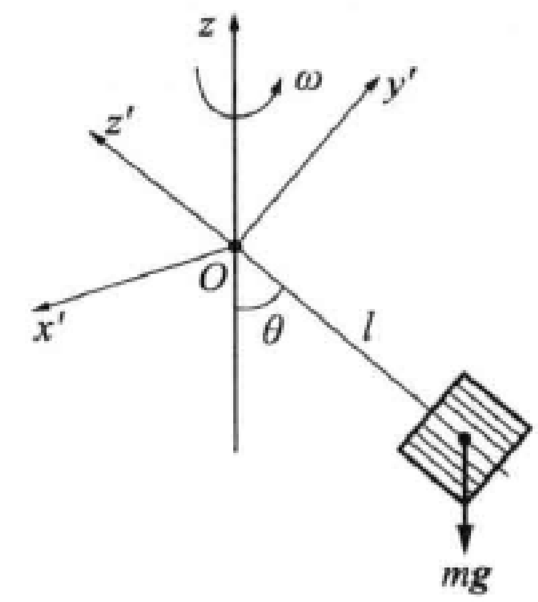


图 10.6

例 2 一重物可绕过点 O 的水平轴转动，同时水平轴又以匀角速度 ω 绕铅垂轴 Oz 转动，如图 10.6 所示。设重物对于过点 O 的三个主轴 $Ox'Oy'Oz'$ 的转动惯量分别为 A,B,C。重物质心 C 与 O 的距离为 l。试确定重物的相对平衡位置，并讨论其稳定性。

解： 计算势能 V,V^0,V^ω，有 $V^0=0$

$$V=-mgl\cos\theta$$

$$V^\omega=-\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\theta}^0\cdot\boldsymbol{\omega}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\ \omega\sin\theta\\ \omega\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A&0&0\\0&B&0\\0&0&C\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ \omega\sin\theta\\ \omega\cos\theta\end{pmatrix}$$

$$=-\frac{1}{2}\omega^2(B\sin^2\theta+C\cos^2\theta)$$

相对平衡方程(10.3.29)给出

$$\frac{\partial}{\partial\theta}(V+V^0+V^\omega)=0$$

即

$$\sin\theta[mgl+(C-B)\omega^2\cos\theta]=0$$

由此得到平衡位置

$$(1)\qquad \theta_0=0$$

$$(2)\qquad \theta_0=\pi$$

$$(3)\qquad \theta_0=\arccos\frac{mgl}{(B-C)\omega^2}$$

当 $(B-C)\omega^2>mgl$ 或 $(B-C)\omega^2<-mgl$。

为研究稳定性，计算势能的二次导数，有

$$\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}(V+V^0+V^\omega)=\sin\theta[(B-C)\omega^2\sin\theta]+\cos\theta[mgl+(C-B)\omega^2\cos\theta]$$

对平衡位置(1)，有

$$\left.\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}(V+V^0+V^\omega)\right|_{(1)}=mgl+(C-B)\omega^2$$

因此，当 $C\geqslant B$ 时，势能有极小，相对平衡位置是稳定的，不论 ω 为何值；当 $C<B$ 时，如果 $\omega^2<mgl/(B-C)$，则二次导数为正，平衡是稳

定的;如果 $\omega^2>mgl/(B-C)$,则是不稳定的。当 $\omega^2=mgl/(B-C)$ 时,将二次导数表示为

$$\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}(V+V^0+V^\omega)=(B-C)\omega^2(\cos\theta-\cos 2\theta)$$

当 $\theta_0=0$ 时,它为零。再求三次导数,有

$$\frac{\partial^3}{\partial\theta^3}(V+V^0+V^\omega)=(B-C)\omega^2(-\sin\theta+2\sin 2\theta)$$

当 $\theta_0=0$ 时,它为零。再求四次导数,有

$$\frac{\partial^4}{\partial\theta^4}(V+V^0+V^\omega)=(B-C)\omega^2(-\cos\theta+4\cos 2\theta)$$

当 $\theta_0=0$ 时,它大于零。因此,在此临界状态下,$\theta_0=0$ 这一位置也是稳定的。

对平衡位置(2),有

$$\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}(V+V^0+V^\omega)=(C-B)\omega^2-mgl$$

仅当 $C>B,\omega^2>mgl/(C-B)$ 时,$\theta_0=\pi$ 这一位置才是稳定的。

对平衡位置(3),当 $B>C,(B-C)\omega^2>mgl$ 时,有 $0<\theta_0<\pi/2$;而当 $B<C,(C-B)\omega^2>mgl$ 时,有 $\pi/2<\theta_0<\pi$。此时有

$$\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}(V+V^0+V^\omega)=(B-C)\omega^2\sin^2\theta$$

当 $B>C$ 时,它为正;当 $B<C$ 时,它为负。因此,在 0 和 π 之间存在一个相对平衡位置,那么,$\theta_0>\pi/2$ 时是不稳定的,$\theta_0<\pi/2$ 时是稳定的。

§10.4 变质量系统的 Lagrange 方程

由于空间技术和其他工业技术的发展,**变质量系统**动力学的研究日渐重要。喷气飞机、火箭、卫星、航天器等,一般都是变质量系统。1897 年,俄国学者 Мещерский ИВ(1859—1935)在他的博士学位论文《变质量质点动力学》中提出了变质量质点的动力学方程[14],后人称为 **Мещерский** 方程。以 Мещерский 方程为基础,可建立变质量系统的牛顿力学和 Lagrange 力学的基本框架[15]。

10.4.1 变质量力学系统的 d'Alembert-Lagrange 原理

研究由 N 个质点组成的力学系统。在瞬时 t,第 i 个质点的质量为 $m_i(i=1,2,\cdots,N)$;在瞬时 $t+\mathrm{d}t$,由质点分离(或并入)的微粒的质量为 $\mathrm{d}m_i$。对每个

质点列写 Мещерский 方程[15]

$$-m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i+\boldsymbol{F}_i+\boldsymbol{R}_i^c+\boldsymbol{R}_i=0 \qquad (i=1,2,\cdots,N) \tag{10.4.1}$$

其中 $\ddot{\boldsymbol{r}}_i$ 为点的加速度；m_i 为点的质量；$\boldsymbol{F}_i$ 为作用在点上的主动力的合力；$\boldsymbol{R}_i^c$ 为约束力的合力；$\boldsymbol{R}_i$ 为反推力

$$\boldsymbol{R}_i=\frac{\mathrm{d}m_i}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{u}_i \tag{10.4.2}$$

其中 $\boldsymbol{u}_i$ 为由质点分离(或并入)的微粒相对质点的速度。将方程(10.4.1)两端点乘 $\delta\boldsymbol{r}_i$，并对 i 求和，考虑到理想约束条件

$$\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{R}_i^c\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=0$$

则有

$$\sum_{i=1}^{N}(-m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i+\boldsymbol{F}_i+\boldsymbol{R}_i)\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=0 \tag{10.4.3}$$

这就是变质量力学系统的 d'Alembert—Lagrange 原理。

下面将原理(10.4.3)表示为广义坐标形式。假设系统的位形由 n 个广义坐标 $q_s(s=1,2,\cdots,n)$ 来确定。令 $\partial^*/\partial q_s$，$\partial^*/\partial\dot{q}_s$ 为把质量当作常数时对 q_s 和对 $\dot{q}_s$ 的偏导数，令 $\mathrm{d}^*/\mathrm{d}t$ 为把质量当作常数时对时间 t 的导数，分别称为**凝固偏导数**和**凝固导数**。系统的动能为

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\dot{\boldsymbol{r}}_i$$

由凝固偏导数的定义，有

$$\frac{\partial^* T}{\partial q_s}=\sum_{i=1}^{N}m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\frac{\partial\dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial q_s}$$

$$\frac{\partial^* T}{\partial\dot{q}_s}=\sum_{i=1}^{N}m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\frac{\partial\dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial\dot{q}_s}$$

取凝固导数，有

$$\frac{\mathrm{d}^*}{\mathrm{d}t}\frac{\partial^* T}{\partial\dot{q}_s}=\sum_{i=1}^{N}m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\frac{\partial\dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial\dot{q}_s}+\sum_{i=1}^{N}m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial\dot{q}_s}$$

利用经典 Lagrange 关系

$$\frac{\partial\dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial\dot{q}_s}=\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_s},\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_s}=\frac{\partial\dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial q_s}$$

以及变分关系

$$\delta\boldsymbol{r}_i=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_s}\delta q_s$$

得到

$$\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\mathrm{d}^*}{\mathrm{d}t}\frac{\partial^* T}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial^* T}{\partial q_s}\right)\delta q_s=\sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i \tag{10.4.4}$$

将式(10.4.4)代入原理(10.4.3),得到

$$\sum_{s=1}^{n}\left\{-\frac{\mathrm{d}^*}{\mathrm{d}t}\frac{\partial^* T}{\partial \dot{q}_s}+\frac{\partial^* T}{\partial q_s}+Q_s+\Psi_s\right\}\delta q_s=0 \tag{10.4.5}$$

其中

$$Q_s=\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{F}_i\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_s} \tag{10.4.6}$$

为广义力,而

$$\Psi_s=\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{R}_i\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_s} \tag{10.4.7}$$

为广义反推力。

如采用普通导数和普通偏导数表示,则原理(10.4.3)可表示为

$$\sum_{s=1}^{n}\left(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}+\frac{\partial T}{\partial q_s}+Q_s+P_s\right)\delta q_s=0 \tag{10.4.8}$$

其中

$$P_s=\sum_{i=1}^{N}\left\{(\boldsymbol{R}_i+\dot{m}_i\dot{\boldsymbol{r}}_i)\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_s}-\frac{1}{2}v_i^2\frac{\partial m_i}{\partial q_s}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}v_i^2\frac{\partial m_i}{\partial \dot{q}_s}\right)\right\} \tag{10.4.9}$$

特别地,如果质量仅依赖于时间 t,即

$$m_i=m_i(t)$$

则式(10.4.9)给出

$$P_s=\sum_{i=1}^{N}(\boldsymbol{R}_i+\dot{m}_i\dot{\boldsymbol{r}}_i)\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_s} \tag{10.4.10}$$

10.4.2 变质量力学系统的 Lagrange 方程

对于受有完整约束的力学系统,原理(10.4.5),(10.4.8)中的 $\delta q_s(s=1,2,\cdots,n)$是彼此独立的,任意的,因此有

$$\frac{\mathrm{d}^*}{\mathrm{d}t}\frac{\partial^* T}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial^* T}{\partial q_s}=Q_s+\Psi_s \qquad (s=1,2,\cdots,n) \tag{10.4.11}$$

以及

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial T}{\partial q_s}=Q_s+P_s \qquad (s=1,2,\cdots,n) \tag{10.4.12}$$

方程(10.4.11)和方程(10.4.12)称为变质量完整力学系统的 Lagrange 方程。方程的这两种形式是等价的。在具体应用时,凝固导数和凝固偏导数的形式(10.4.11)显得简单些。

10.4.3 应用举例

例 1 质量为 M 的气球在高度 H 处由静止开始上升，如图 10.7 所示，下方悬挂一条长而柔软的均质重索。其单位长质量为 γ，索的未带起部分完全卷聚在气球的正下方。作用在气球上的力，除重力之外，还有升力 $\boldsymbol{F}$(大小为常数)和阻力 $R=\beta v^2$(β 为常数，v 为气球的速度)。把原点 O 取在地面上，试将气球的速度表示为高度的函数[16]。

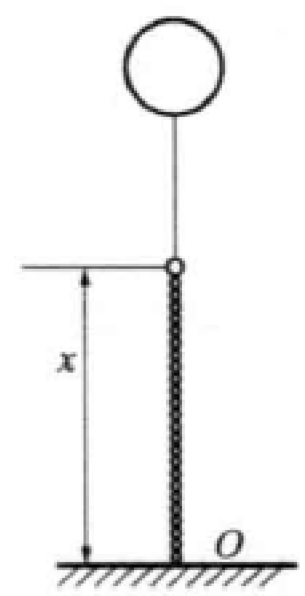


图 10.7

解：首先，建立问题的运动微分方程。动能为

$$T=\frac{1}{2}(M+\gamma x)\dot{x}^2$$

广义力为

$$Q_x=F-(M+\gamma x)g-\beta\dot{x}^2$$

反推力为

$$\Psi_x=\dot{m}u_x$$

因重索进入时为静止，故相对并入速度为 $u_x=-\dot{x}$，于是

$$\Psi_x=-\gamma\dot{x}^2$$

方程(10.4.11)给出

$$(M+\gamma x)\ddot{x}=F-(M+\gamma x)g-\beta\dot{x}^2-\gamma\dot{x}^2$$

其次，解方程。令 $\dot{x}^2=y$，则方程表示为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{2(\gamma+\beta)}{M+\gamma x}y=\frac{2F}{M+\gamma x}-2g$$

它在初始条件 $t=0, y_0=\dot{x}_0^2=0, x_0=H$ 下的解为[16]

$$y=\dot{x}^2=\frac{F}{\gamma+\beta}\left[1-\left(\frac{M+\gamma H}{M+\gamma x}\right)^{2\left(1+\frac{\beta}{\gamma}\right)}\right]$$

$$-\frac{2g(M+\gamma x)}{\gamma\left(3+\frac{2\beta}{\alpha}\right)}\left[1-\left(\frac{M+\gamma H}{M+\gamma x}\right)^{3+2\frac{\beta}{\gamma}}\right]$$

例 2 质量为 M_1，半径为 R_1 的圆柱水桶被质量为 M_2 的重物用粗绳提起。粗绳本身是不可伸长的，无重量的，并且绕过半径为 R 的滑轮。滑轮的转动惯量为 J。水桶装满了水，水从底部中心处的截面为 s 的孔中流出。桶中水的水准面一直是水平的，而流速为 $u(t)$。试列写水桶的运动微分方程。

解：令水桶上升速度为 $\dot{x}$，则滑轮角速度为 $\dot{x}/R$，重物下降速度为 $\dot{x}$，而桶中流水的绝对速度为

$$\dot{x}-\frac{us}{\pi R_1^2}$$

系统的动能为

$$T=\frac{1}{2}M_2\dot{x}^2+\frac{1}{2}J\left(\frac{\dot{x}}{R}\right)^2+\frac{1}{2}M_1\dot{x}^2+\frac{1}{2}m(t)\left(\dot{x}-\frac{us}{\pi R_1^2}\right)^2$$

其中 m 是桶中水的质量,它的变化规律为

$$\dot{m}=-u\rho s$$

其中 ρ 为水的密度。广义力为

$$Q_x=M_2g-\{M_1+m(t)\}g$$

流水的广义反推力为

$$\Psi_x=-\dot{m}\left(u-\frac{us}{\pi R_1^2}\right)$$

Lagrange 方程(10.4.11)给出

$$\frac{\mathrm{d}^*}{\mathrm{d}t}\frac{\partial^*T}{\partial\dot{x}}-\frac{\partial^*T}{\partial x}=Q_x+\Psi_x$$

代入得

$$\left(M_1+M_2+\frac{J}{R^2}\right)\ddot{x}+m(t)\left(\ddot{x}-\frac{\dot{u}s}{\pi R_1^2}\right)$$
$$=-\dot{m}\left(u-\frac{us}{\pi R_1^2}\right)+M_2g-[M_1+m(t)]g$$

本章讨论了 Lagrange 方程应用的四个专门问题:运动稳定性与小振动理论、刚体定点转动动力学、相对运动动力学,以及变质量系统动力学。在这些问题中,应用 Lagrange 方程研究,能够显示优越性。正如 Арнольд 指出的,Lagrange的观点使我们能够完全地解决一系列重要的力学问题,包括小振动理论和刚体动力学中的问题。[17]

思考题

10.1 Lagrange-Dirichlet 定理的反述总是不成立的。这个结论对否?

10.2 试说明方程(10.2.1),(10.2.2)的 Jacobi 最终乘子中有 $M=1$(参见第 18 章)。

10.3 能否从质点的相对运动微分方程出发导出完整系统相对运动的 Lagrange方程?

10.4 三自由度系统有

$$L_r=\frac{1}{2}(\dot{q}_1^1+\dot{q}_2^2+\dot{q}_3^2)-\frac{1}{2}q_1^2,Q_1^{\dot{\omega}}=Q_2^{\dot{\omega}}=Q_3^{\dot{\omega}}=0$$

$$Q'_1=\dot{q}_2^2, Q'_2=-\dot{q}_1\dot{q}_2, Q'_3=0$$

此系统有能量积分吗?

10.5 对变质量完整系统,除 Lagrange 方程外,还能建立其他形式的方程吗?

习题

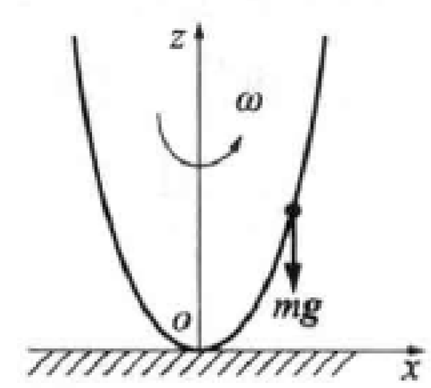
10.1 研究 Van der Pol 方程

$$\ddot{x}+\mu(x^2-1)\dot{x}+x=0$$

零解 $x=\dot{x}=0$ 的稳定性。

答:$\mu>0$ 不稳定;$\mu\leqslant 0$ 稳定。

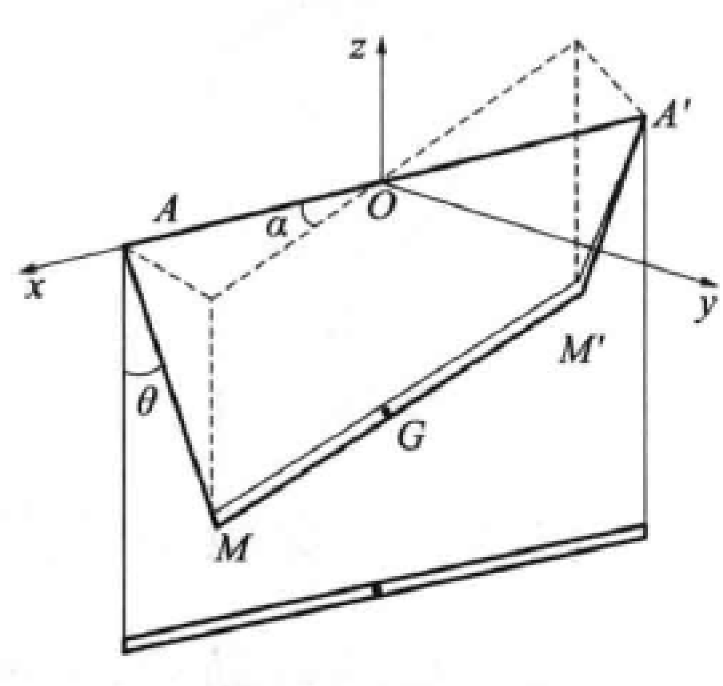
10.2 如图所示,一重珠在一弯成抛物线 $x^2=2pz$ 形状的光滑金属丝上,金属丝以匀角速度 ω 绕铅垂轴 Oz 转动。试求小珠的相对平衡位置,并讨论其稳定性。



题 10.2 图

答:$x=0, \dfrac{g}{p}-\omega^2>0$ 稳定,$\dfrac{g}{p}-\omega^2<0$ 不稳定。

10.3 如图所示,两固定点 A 和 A' 放在水平轴 Ox 上,且 $OA=OA'=a$。长 l 的两条无重线 AM,$A'M'$ 拴住长为 $2a$ 的均质重杆 MM'。此杆中心 G 有一无限小孔,铅垂向上的轴 Oz 通过小孔。系统无初速地轻轻地偏离其平衡位置 $M_1M'_1$。试研究小振动[18]。

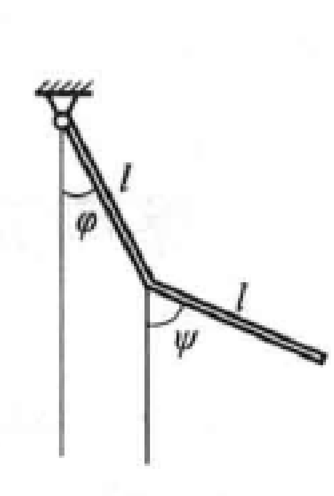


题 10.3 图

答:动能

$$T=\frac{1}{2}M\left(l^2\sin^2\theta+\frac{4}{3}\frac{a^2l^2\cos^2\theta}{4a^2-l^2\sin^2\theta}\right)\dot{\theta}^2$$

10.4 如图所示,势能 $V=mgl(1-\cos\theta)$,小振动周期 $2\pi\sqrt{\dfrac{l}{3g}}$ 在重力场内双摆在铅垂平面内运动。两杆长为 l,质量为 m。试研究在平衡位置 $\varphi=\psi=0$ 附近的小振动的频率与振型[19]。



题 10.4 图

答:通解为

$$\begin{pmatrix}\varphi\\ \psi\end{pmatrix}=C_1\begin{bmatrix}-1 & -\sqrt{7}\\ 5 & +\sqrt{7}\end{bmatrix}\sin(\omega_1 t+\alpha_1)+C_2\begin{bmatrix}-1 & +\sqrt{5}\\ 5 & -\sqrt{7}\end{bmatrix}\sin(\omega_2 t+\alpha_2)$$

$$\omega_1=\sqrt{3\left(1+\frac{2\sqrt{7}}{7}\right)\frac{g}{l}}, \omega_2=\sqrt{3\left(1-\frac{2\sqrt{7}}{7}\right)\frac{g}{l}}$$

10.5　如图所示，半径为 R 的光滑金属丝弯成的圆环以匀角速度 ω 绕其铅垂直径转动。在圆环上套有质量为 m 的小圆环，小圆环用刚度为 k 的弹簧与大圆环上点 O 联结。弹簧未变形时长度为 $R\varphi_0$。试用 Lagrange 方程建立小圆环的相对运动微分方程。

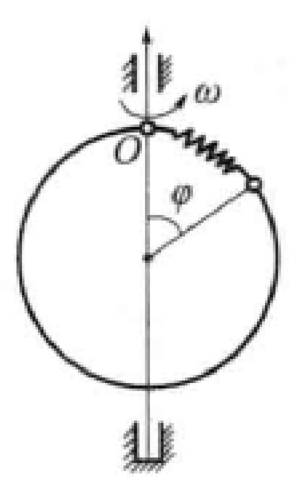
答：$mR\ddot{\varphi}-\frac{1}{2}mR\omega^2\sin 2\psi+kR(\varphi-\varphi_0)-mg\sin\varphi=0$

10.6　如图所示，质量为 m 的质点在光滑铅垂面内沿曲线 $z=f(y)$ 运动。平面 Oyz 以匀角速度 ω 绕轴 Ox 转动。试用相对运动动力学的 Lagrange 方程(10.3.23)建立质点的运动微分方程。

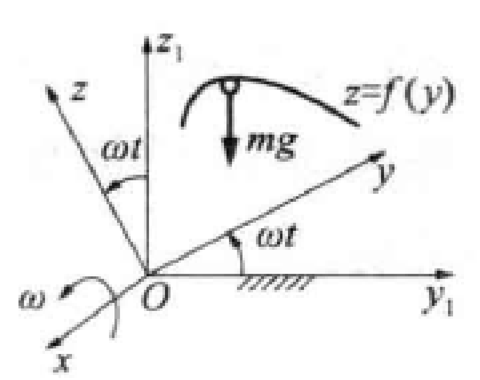
答：$(1+z'^2)\ddot{y}+z'z''\dot{y}^2-\omega^2(y+zz')+g\sin\omega t+gz'\cos\omega t=0$

10.7　物理摆是质量为 M、长度为 l 的充满从中流出液体的细管。管中液体质量按规律 $m(t)=\rho h(t)$ 变化，其中 $h(t)$ 为液体高度，如图所示。假设流动的部分液体无阻力地在均匀重力场中运动，试列出管的运动方程。

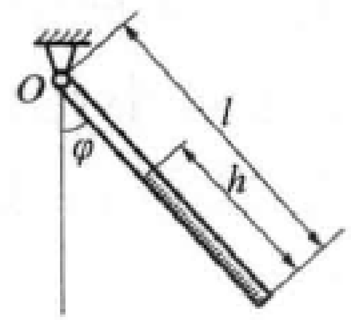
解：$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\frac{1}{3}Ml^2\dot{\varphi}^2+\rho h\dot{\varphi}\left(l^2-lh+\frac{h}{3}\right)\right\}$$
$$=\rho l^2 h\dot{\varphi}-\frac{1}{2}Mgl\sin\varphi-\rho hg\left(l-\frac{h}{2}\right)\sin\varphi$$



题 10.5 图



题 10.6 图



题 10.7 图

10.8　一变质量质点沿光滑曲线 $y^3+ax^2=0(a>0)$ 的凹边以速度 $\frac{2}{3}(2ga)^{\frac{1}{2}}$ 从原点抛出，x 轴水平，y 轴铅垂向上。质点的质量为 $m=m(t)$。试证明，当微粒分离的相对速度为零时，质点速度以 y 分量保持不变。

参考文献

[1] Гантмахер ФР. Лекции по Аналитической Механике[M]. Москва: ГИФМЛ, 1960.
Ф. Р. 甘特马赫．分析力学讲义[M]．钟奉俄，薛问西，译，北京：高等教育出版社，1964.

[2]陈滨．分析动力学[M]．北京：北京大学出版社，1987.

[3]Whittaker ET. A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies[M]. 9th ed. New York:Macmillan Co,1944.
[4]马尔金 ИГ. 运动稳定性理论[M]. 解伯民,译. 北京:科学出版社,1958.
[5]朱照宣,周起钊,殷金生. 理论力学(下册)[M]. 北京:北京大学出版社,1982.
[6]Голубев ВВ. Лекции по Интегрированию Уравнений Движения Тяжелого Твердого Тела около Неподвижной Точки[M]. Москва:Гостехиздат,1953.
[7]Харламов ДВ. Лекции по Динамике Твердого Тела[M]. Новобирск:Издво Новобирск Ун—та,1965.
[8]Leimanis E. The General Problem of the Motion of Coupled Rigid Bodies about a Fixed Point[M]. New York:Springer-Verlag,1965.
[9]Архангельский ЮА. Аналитическая Динамика Твердого Тела[M]. Москва:Наука,1977.
[10]Горр ГВ,Кудоряшова ЛВ,Степанова ЛА. Классические Задачи Динамики Твердого Тела[M]. Киев:Наукова Думка,1978.
[11]Kharlamov MP, Kharlamov PV. To solve a problem of rigid body dynamics. What does it mean. In Benenti S,et al[J]. Proc of the IUTAM-ISIMM Symposium on Modern Developments in Analytical Mechanics Ⅶ,535-562. Torino,1983.
[12]Лурье А И. Аналитическая Механика[M]. Москва:ГИФМЛ,1961.
[13]梅凤翔,刘端,罗勇. 高等分析力学[M]. 北京:北京理工大学出版社,1991.
[14]Мещерский ИВ. Работы по Механике Тел Переменной Массы[M]. Москва:ГИТТЛ,1952.
[15]杨来伍,梅凤翔. 变质量系统力学[M]. 北京:北京理工大学出版社,1989.
[16]程勉. 变质量力学基础[M]. 北京:人民教育出版社,1983.
[17]Arnold VI. Mathematical Methods of Classical Mechanics[M]. New York:Springer-Verlag,1978.
[18]Appell P. Traité de Mécanique Rationnelle[M]. Ⅰ. Ⅱ Paris:Gauthier-Villars et Cie Éd,1953.
[19]Маркеев АП. 理论力学[M]. 李俊峰,译. 北京:高等教育出版社,2006.

11 Lagrange 方程的应用(Ⅲ)

本章讨论 Lagrange 方程应用的彼此独立的四个专题：**事件空间中的** Lagrange方程、**可控力学系统**的 Lagrange 方程、**机电系统**的 Lagrange 方程，以及 Lagrange **力学逆问题**等。

§11.1 事件空间中的Lagrange方程

Synge JL 在他的著作中研究了各种空间(包括事件空间)中的完整保守系统的分析动力学[1]。这种研究不仅有几何意义，还有重要的力学意义。首先，由此不仅可以得到位形空间中的动力学方程，还可以直接得到能量积分。其次，由于在事件空间中坐标和时间处于同等地位，这可使人们灵活选取参数，以便建立较为简单的方程[2]。

11.1.1 事件空间中的Hamilton原理

设力学系统的位形由 n 个广义坐标 $q_s(s=1,2,\cdots,n)$ 来确定。构造 $(n+1)$ 维扩充的位形空间 R_{n+1}(事件空间)，此空间中点的坐标是广义坐标 $q_s(s=1,2,\cdots,n)$ 和时间 t。引入记号

$$x_s=q_s \quad (s=1,2,\cdots,n),x_{n+1}=t \tag{11.1.1}$$

所有这些变量可作为某参数 τ 的连续可微函数。令 $x_\alpha(\alpha=1,2,\cdots,n+1)$ 是 $C^2\in R_{n+1}$ 类曲线，使得 $x'_\alpha=\dfrac{\mathrm{d}x_\alpha}{\mathrm{d}\tau}$ 不同时为零。这些带某确定方向的曲线对应于无约束的完整系统的可能运动。x_α 对时间的导数表示为

$$\dot{x}_\alpha=\frac{\mathrm{d}x_\alpha}{\mathrm{d}t}=\frac{x'_\alpha}{x'_{n+1}} \tag{11.1.2}$$

根据给定的 Lagrange 函数 $L=L(t,q_s,\dot{q}_s)$，对空间 R_{n+1} 定义参数形式的 Lagrange 函数

$$\Lambda(x_\alpha,x'_\alpha)=x'_{n+1}L\left(x_1,x_2,\cdots,x_{n+1},\frac{x'_1}{x'_{n+1}},\frac{x'_2}{x'_{n+1}},\cdots,\frac{x'_n}{x'_{n+1}}\right) \quad (11.1.3)$$

于是有

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial x_\alpha}=x'_{n+1}\frac{\partial L}{\partial x_\alpha} \qquad (\alpha=1,2,\cdots,n+1) \quad (11.1.4)$$

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial x'_{n+1}}=L-\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_s}\dot{q}_s=-H \quad (11.1.5)$$

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial x'_s}=\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_s} \qquad (s=1,2,\cdots,n) \quad (11.1.6)$$

其中 H 为 Hamilton 函数。由式(11.1.5)和式(11.1.6),得到

$$\sum_{\alpha=1}^{n+1}\frac{\partial\Lambda}{\partial x'_\alpha}x'_\alpha=\Lambda(x_\alpha,x'_\alpha) \quad (11.1.7)$$

这表明,函数 Λ 对 x'_α 是正定的,一阶齐次的。

反之,根据给定的 Lagrange 函数 $\Lambda(x_\alpha,x'_\alpha)$ 可确定 Lagrange 函数 $L(t,q_s,\dot{q}_s)$。因此,函数 $\Lambda(x_\alpha,x'_\alpha)$ 和 $L(t,q_s,\dot{q}_s)$ 是彼此等价的,即知一个可确定另一个。由此得到 Lagrange 作用元的不变性

$$L(t,q_s,\dot{q}_s)\mathrm{d}t=\Lambda(x_\alpha,x'_\alpha)\mathrm{d}\tau \quad (11.1.8)$$

这样,在位形空间中的 Hamilton 原理

$$\int_{t_0}^{t_1}\delta L\mathrm{d}t=0,\ \delta q_s\Big|_{t=t_0}=\delta q_s\Big|_{t=t_1}=0 \qquad (s=1,2,\cdots,n) \quad (11.1.9)$$

在参数化下取形式

$$\int_{\tau_0}^{\tau_1}\Delta\Lambda(x_\alpha,x'_\alpha)\mathrm{d}\tau=0,\ \Delta x_\alpha\Big|_{\tau=\tau_0}=\Delta x_\alpha\Big|_{\tau=\tau_1}=0 \qquad (\alpha=1,2,\cdots,n) \quad (11.1.10)$$

这就是事件空间中的 Hamilton 原理。

11.1.2 事件空间中的 d'Alembert-Lagrange 原理

下面变换原理(11.1.10)。考虑到 R_{n+1} 中的交换关系

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\Delta x_\alpha=\Delta x'_\alpha \quad (11.1.11)$$

则有

$$\left(\sum_{\alpha=1}^{n+1}\frac{\partial\Lambda}{\partial x'_\alpha}\Delta x_\alpha\right)\Bigg|_{\tau=\tau_0}^{\tau=\tau_1}-\int_{\tau_0}^{\tau_1}\sum_{\alpha=1}^{n+1}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\partial\Lambda}{\partial x'_\alpha}-\frac{\partial\Lambda}{\partial x_\alpha}\right)\Delta x_\alpha\mathrm{d}\tau=0$$

由

$$\Delta x_\alpha\Big|_{\tau=\tau_0}=\Delta x_\alpha\Big|_{\tau=\tau_1}=0$$

得到

$$\int_{\tau_0}^{\tau_1}\sum_{\alpha=1}^{n+1}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\partial\Lambda}{\partial x_\alpha'}-\frac{\partial\Lambda}{\partial x_\alpha}\right)\Delta x_\alpha\mathrm{d}\tau=0$$

由积分区间$[\tau_0,\tau_1]$的任意性，得到

$$\sum_{\alpha=1}^{n+1}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\partial\Lambda}{\partial x_\alpha'}-\frac{\partial\Lambda}{\partial x_\alpha}\right)\Delta x_\alpha=0 \tag{11.1.12}$$

这就是事件空间中的 d'Alembert-Lagrange 原理。

11.1.3 事件空间中的参数方程

对于完整保守系统，原理(11.1.12)中的 Δx_α 是彼此独立的，因此有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\partial\Lambda}{\partial x_\alpha'}-\frac{\partial\Lambda}{\partial x_\alpha}=0\qquad(\alpha=1,2,\cdots,n) \tag{11.1.13}$$

这就是事件空间中完整保守系统的 Lagrange 方程[1]，或称**参数方程**。$(n+1)$个方程(11.1.13)不全是独立的，因为，考虑到式(11.1.7)，有

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha=1}^{n+1}x_\alpha'\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\partial\Lambda}{\partial x_\alpha'}-\frac{\partial\Lambda}{\partial x_\alpha}\right)&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\sum_{\alpha=1}^{n+1}x_\alpha'\frac{\partial\Lambda}{\partial x_\alpha'}\right)-\sum_{\alpha=1}^{n+1}x_\alpha''\frac{\partial\Lambda}{\partial x_\alpha'}-\sum_{\alpha=1}^{n+1}x_\alpha'\frac{\partial\Lambda}{\partial x_\alpha}\\&=\frac{\mathrm{d}\Lambda}{\mathrm{d}\tau}-\frac{\mathrm{d}\Lambda}{\mathrm{d}\tau}=0\end{aligned}$$

现研究方程(11.1.13)的最后一个。利用式(11.1.4)和式(11.1.5)，最后一个方程可写成形式

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}\tau}+t'\frac{\partial L}{\partial t}=0$$

由此得知，当

$$\frac{\partial L}{\partial t}=0$$

时，便得到积分

$$H=\text{const.}$$

对方程(11.1.13)的前 n 个方程，当取 $t=\tau$ 时，成为通常的 Lagrange 方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_s}-\frac{\partial L}{\partial q_s}=0\qquad(s=1,2,\cdots,n)$$

对于完整非保守系统，位形空间中的 Lagrange 方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_s}-\frac{\partial L}{\partial q_s}=Q_s\qquad(s=1,2,\cdots,n) \tag{11.1.14}$$

在事件空间中定义广义力为[2]

$$P_s(x_\alpha,x_\alpha')=x_{n+1}'Q_s\left(x_1,x_2,\cdots,x_{n+1},\frac{x_1'}{x_{n+1}'},\frac{x_2'}{x_{n+1}'},\cdots,\frac{x_n'}{x_{n+1}'}\right) \tag{11.1.15}$$

$$P_{n+1}(x_\alpha,x_\alpha')=-\sum_{s=1}^{n}Q_sx_s'$$

则参数方程可表示为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\partial\Lambda}{\partial x'_\alpha}-\frac{\partial\Lambda}{\partial x_\alpha}=P_\alpha \qquad (\alpha=1,2,\cdots,n+1) \qquad (11.1.16)$$

这就是事件空间中完整非保守系统的 Lagrange 方程。$(n+1)$ 个方程(11.1.16)不全是独立的,因为

$$\sum_{\alpha=1}^{n+1}x'_\alpha\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\partial\Lambda}{\partial x'_\alpha}-\frac{\partial\Lambda}{\partial x_\alpha}-P_\alpha\right)=0$$

方程(11.1.16)的前面 n 个方程,当 $t=\tau$ 时,就是通常的 Lagrange 方程(11.1.14)。

11.1.4 应用举例

位形空间中系统的 Lagrange 函数和广义力分别为

$$L=\frac{1}{2}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2+\dot{q}_3^2)$$

$$Q_1=-\frac{g\dot{q}_1}{2\dot{q}_3},Q_2=-\frac{g\dot{q}_2}{2\dot{q}_3},Q_3=-\frac{1}{2}g$$

其中 g 为常数。试建立事件空间中的运动方程。

事件空间中的 Lagrange 函数(11.1.3)给出

$$\Lambda=\frac{1}{2x'_4}(x'^2_1+x'^2_2+x'^2_3)$$

按式(11.1.15)构造广义力,有

$$P_1=-\frac{gx'_1x'_4}{2x'_3},P_2=-\frac{gx'_2x'_4}{2x'_3},P_3=-\frac{1}{2}gx'_4$$

方程(11.1.16)给出

$$\left(\frac{x'_1}{x'_4}\right)'=-\frac{gx'_1x'_4}{2x'_3},\left(\frac{x'_2}{x'_4}\right)'=-\frac{gx'_2x'_4}{2x'_3},\left(\frac{x'_3}{x'_4}\right)'=-\frac{1}{2}gx'_4$$

现取

$$x_3=\tau$$

则

$$x'_3=1,x''_3=0$$

第三个方程成为

$$x''_4=\frac{1}{2}gx'^3_4$$

而前两个方程成为

$$x''_1=0,x''_3=0$$

积分得

$$x_1=C_1+C_2x_3,x_2=C_3+C_4x_3,x_4=-\frac{2}{g}\sqrt{-2\left(C_5+\frac{1}{2}gx_3\right)}+C_6$$

返回位形空间,则解为

$$q_1=C_1+C_2q_3, q_2=C_3+C_4q_3, q_3=-\frac{g}{4}(t-C_6)^2-\frac{2C_5}{g}$$

对于非完整系统，亦可研究事件空间中的动力学[2-5]。

§11.2 可控力学系统的 Lagrange 方程

可控系统的分析动力学问题大致可分成三类：约束方程中包含控制参数的、带有**伺服约束**的，以及受迫控制的。

11.2.1 带参数约束系统的 Lagrange 方程

众所周知，力学系统的运动依赖于作用力以及所施加的约束。因此，既可借助于力来控制运动(称为动力学控制)，也可借助于约束来控制运动(称为动力学控制)。下面研究一类力学系统，它的约束依赖于某些控制参数。

力学中所研究的通常约束是表示物体间接触条件的。这类约束的反力显然是接触作用力，它属于被动力的范畴，以区别于加在物体上的主动力。这里研究的约束也表示接触条件，但不同于通常的约束，它的约束力不纯粹是被动力，因为这些力不仅依赖于主动力，一般说来还依赖于出现于约束方程中的控制参数，主动的作用可以借助这些参数加在系统的运动上。

研究一质点系，点的质量为 $m_\nu(\nu=1,2,\cdots,N)$，直角坐标为 $x_i(i=1,2,\cdots,3N)$，主动力在坐标轴上的投影为 $X_i(i=1,2,\cdots,3N)$，因此，第 ν 个质点的质量，它的坐标以及主动力在坐标轴上投影分别为 $m_{3\nu-2}=m_{3\nu-1}=m_{3\nu}$, $x_{3\nu-2}$, $x_{3\nu-1}$, $x_{3\nu}$, $X_{3\nu-2}$, $X_{3\nu-1}$, $X_{3\nu}$。设系统受有 m 个双面理想完整约束

$$f_\rho(x_i,u_r,t)=0 \qquad (\rho=1,2,\cdots,m;i=1,2,\cdots,3N;r=1,2,\cdots,l) \tag{11.2.1}$$

约束中包含参数 u_r，称其为**参数约束**，而参数 u_r 称为控制参数。系统的虚位移 δx_i 满足条件

$$\sum_{i=1}^{3N}\frac{\partial f_\rho}{\partial x_i}\delta x_i=0 \tag{11.2.2}$$

理想约束条件表示为

$$\sum_{i=1}^{3N}R_i\delta x_i=0 \tag{11.2.3}$$

其中 R_i 为约束力。在双面理想约束条件下，带参数约束系统的 d'Alembert-Lagrange 原理表示为

$$\sum_{i=1}^{3N}(X_i-m_i\ddot{x}_i)\delta x_i=0 \tag{11.2.4}$$

它与通常不带参数的系统的原理有同样形式。

选 $n=3N-m$ 个广义坐标 $q_s(s=1,2,\cdots,n)$，点的直角坐标可表示为

$$x_i = x_i(q_s, u_r, t) \qquad (i=1,2,\cdots,3N; s=1,2,\cdots,n; r=1,2,\cdots,l) \tag{11.2.5}$$

于是有

$$\dot{x}_i = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial q_s}\dot{q}_s + \sum_{r=1}^{l} \frac{\partial x_i}{\partial u_r}\dot{u}_r + \frac{\partial x_i}{\partial t} \tag{11.2.6}$$

因此,仍有两个经典 Lagrange 关系

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_s} = \frac{\partial x_i}{\partial q_s}, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial x_i}{\partial q_s} = \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_s} \tag{11.2.7}$$

利用这个关系可将原理(11.2.4)表示为广义坐标形式

$$\sum_{s=1}^{n}\left(Q_s - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} + \frac{\partial T}{\partial q_s}\right)\delta q_s = 0 \tag{11.2.8}$$

对于完整力学系统,原理(11.2.8)中的 δq_s 是彼此独立的,于是有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial T}{\partial q_s} = Q_s \qquad (s=1,2,\cdots,n) \tag{11.2.9}$$

这就是带参数约束完整系统的 Lagrange 方程,它们与通常系统的第二类 Lagrange方程有同样的形式。但是,在方程(11.2.9)中还包含一些控制参数。仅当给出控制规律时,方程(11.2.9)才是封闭的。

11.2.2 包含伺服约束系统的 Lagrange 方程

1922 年,Beghin H 在他的著名博士学位论文《Anschütz 和 Sperri 陀螺罗盘的理论研究》中提出了**伺服约束**的新概念。有一类重要的机构,用完全不同于通常实现约束的方法来实现约束。用这些机构实现的约束可以是任意的,多半是完整的。这些约束不是靠简单接触实现的,即不是被动的。约束的实现借助各种力(电磁力,压缩空气的压力等),即一些辅助能源,这些能源自动地作用且自动地调节来实现各类约束[6]。

设力学系统的位形由 n 个广义坐标 $q_s(s=1,2,\cdots,n)$ 来确定,并受有 g 个双面理想非完整约束

$$f_\beta(q_s, \dot{q}_s, t) = 0 \qquad (\beta=1,2,\cdots,g) \tag{11.2.10}$$

以及 r 个包含伺服约束:n_1 个完整约束及 $n_2(n_2=r-n_1)$ 个非完整约束

$$\begin{aligned} &\varphi_\alpha(q_s, t) = 0 && (\alpha=1,2,\cdots,n_1) \\ &\Psi_{n_1+\gamma}(q_s, \dot{q}_s, t) = 0 && (\gamma=1,2,\cdots,n_2) \end{aligned} \tag{11.2.11}$$

将约束分成两类,式(11.2.10)称为第一类约束,式(11.2.11)称为第二类约束。对于第一类约束(11.2.10),按 Appell-Четаев 定义,对虚位移的限制表示为

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\delta q_s = 0 \qquad (\beta = 1,2,\cdots,g) \tag{11.2.12}$$

第一类约束力的虚功之和等于零,但第二类约束力的虚功之和一般说异于零。在为第一类约束所允许的虚位移中间,存在一些虚位移,使第二类约束力在其

上做功为零,设这些虚位移满足 j 个关系

$$\sum_{s=1}^{n} A_{\nu s}\delta q_s = 0 \qquad (\nu = 1,2,\cdots,j) \tag{11.2.13}$$

一般来说,系数 $A_{\nu s}$ 与约束(11.2.11)无关。

一般形式的 d'Alembert-Lagrange 原理为

$$\sum_{i=1}^{N}(-m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i+\boldsymbol{F}_i+\boldsymbol{R}_{i1}+\boldsymbol{R}_{i2})\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=0 \tag{11.2.14}$$

其中 $\boldsymbol{R}_{i1}$ 为第一类约束力;$\boldsymbol{R}_{i2}$ 为第二类约束力;$\boldsymbol{F}_i$ 为主动力。因第一类约束力的虚功之和为零,即

$$\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{R}_{i1}\cdot\delta\boldsymbol{r}_i = 0 \tag{11.2.15}$$

于是原理(11.2.14)成为

$$\sum_{i=1}^{N}(-m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i+\boldsymbol{F}_i+\boldsymbol{R}_{i2})\cdot\delta\boldsymbol{r}_i = 0 \tag{11.2.16}$$

进而,如果限于研究第二类约束力的功为零的虚位移,即满足下式的虚位移

$$\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{R}_{i2}\cdot\delta\boldsymbol{r}_i = 0 \tag{11.2.17}$$

则原理(11.2.16)可写成形式

$$\sum_{i=1}^{N}(-m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i+\boldsymbol{F}_i)\cdot\delta\boldsymbol{r}_i = 0 \tag{11.2.18}$$

原理(11.2.16)和(11.2.18)可表示为广义坐标形式,分别有

$$\sum_{s=1}^{n}\left(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_s}+\frac{\partial T}{\partial q_s}+Q_s+L_{s2}\right)\delta q_s = 0 \tag{11.2.19}$$

其中

$$L_{s2}=\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{R}_{i2}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_s}$$

以及

$$\sum_{s=1}^{n}\left(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_s}+\frac{\partial T}{\partial q_s}+Q_s\right)\delta q_s = 0 \tag{11.2.20}$$

利用原理(11.2.20)以及关系(11.2.10),(11.2.13),由 Lagrange 乘子法,得到系统的运动微分方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_s}-\frac{\partial T}{\partial q_s}=Q_s+\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial\dot{q}_s}+\sum_{\nu=1}^{j}\mu_\nu A_{\nu s} \qquad (s = 1,2,\cdots,n) \tag{11.2.21}$$

其中 λ_β,μ_ν 为待定乘子。这就是包含伺服约束系统的运动方程。这些方程连同表示通常非完整约束的 g 个方程(11.2.10)以及表示伺服约束的 r 个方程(11.2.11),给出对于 $n+g+j$ 个变量 $g_s,\lambda_\beta,\mu_\nu$ 的 $n+g+r$ 个方程。如果$r>j$,

那么一般地说,问题是不可能成立的;如果 $r=j$,方程的解就确定系统的运动;如果 $r<j$,那么问题是不确定的。

下面讨论四种特殊情形[6]。

第一种情形。设由式(11.2.12)和(11.2.13)可解出 $g+j=m$ 个 δq:

$$\delta q_{n-m+k}=\sum_{\zeta=1}^{n-m}B_{n-m+k,\zeta}\delta q_{\zeta}\qquad(k=1,2,\cdots,m)\qquad(11.2.22)$$

其中系数 B_{n-m+k},ζ 可为 $q_s,\dot{q}_s,t$ 的函数。将式(11.2.22)代入原理(11.2.20),并注意到 δq_ζ 的独立性,得到 Maggi 型方程

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_\zeta}-\frac{\partial T}{\partial q_\zeta}+\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_{n-m+k}}-\frac{\partial T}{\partial q_{n-m+k}}\right)B_{n-m+k,\zeta}\\&=Q_\zeta+\sum_{k=1}^{m}Q_{n-m+k}B_{n-m+k,\zeta}\qquad(\zeta=1,2,\cdots,n-m)\end{aligned}\qquad(11.2.23)$$

第二种情形。如果关系(11.2.22)归结为

$$\delta q_{n-m+k}=0\qquad(11.2.24)$$

则由 δq_ζ 的独立性,得到 Lagrange 方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_s}-\frac{\partial T}{\partial q_\zeta}=Q_\zeta\qquad(\zeta=1,2,\cdots,n-m)\qquad(11.2.25)$$

第三种情形。设第二类约束的反力仅仅是障碍运动的辅助系统的接触作用,其位置依赖于 q_s 中的 $q_{n-l+1},q_{n-l+2},\cdots,q_n$。在此情形中,关系(11.2.13)变成

$$\delta q_{n-l+1}=0,\delta q_{n-l+2}=0,\cdots,\delta q_n=0\qquad(11.2.26)$$

于是方程(11.2.21)成为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_\eta}-\frac{\partial T}{\partial q_\eta}=Q_\eta+\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial\dot{q}_\eta}\qquad(\eta=1,2,\cdots,n-l)\qquad(11.2.27)$$

第四种情形。在第三种情形下,再设第一类约束全是完整的,则方程(11.2.27)成为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_\eta}-\frac{\partial T}{\partial q_\eta}=Q_\eta\qquad(\eta=1,2,\cdots,n-l)\qquad(11.2.28)$$

11.2.3 有约束的受迫控制问题的 Lagrange 方程

设约束力的分量为 X_i^R,则质点的运动微分方程为

$$m_i\ddot{x}_i=X_i+X_i^R\qquad(i=1,2,\cdots,3N)\qquad(11.2.29)$$

假设对每个质点添加参数 u_i,而这些参数按微分方程

$$\mu_i\frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t}=\Phi_i\qquad(i=1,2,\cdots,3N)\qquad(11.2.30)$$

而强制改变,其中 $\mu_1=\mu_2=\mu_3,\cdots,\mu_{3N-2}=\mu_{3N-1}=\mu_{3N}$,它们为 t,x_i,u_i 的某些常正函数;Φ_i 为“强制”,可为 $t,u_i,x_i,\dot{x}_i$ 的函数。方程(11.2.30)适合无约束情

形。如果有强制反作用力 X_i^{Ru}，则为

$$\mu_i \frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t}=\Phi_i+X_i^{Ru} \qquad (i=1,2,\cdots,3N) \tag{11.2.31}$$

假设所加约束的作用等价于强制反作用 X^{Ru} 和约束力 X_i^R，那么理想约束的定义给出[7]

$$\sum_{i=1}^{3N}(X_i^R\delta x_i+X_i^{Ru}\delta u_i)=0 \tag{11.2.32}$$

由此，考虑到方程(11.2.29)和(11.2.31)，得到广义 d'Alembert-Lagrange 原理

$$\sum_{i=1}^{3N}\{(X_i-m_i\ddot{x}_i)\delta x_i+(\Phi_i-\mu_i\dot{u}_i)\delta u_i\}=0 \tag{11.2.33}$$

研究受完整约束的情形。设系统受如下 k 个完整约束

$$f_j(x_i,u_i,t)=0 \qquad (j=1,2,\cdots,k) \tag{11.2.34}$$

约束(11.2.34)加在变分 $\delta x_i,\delta u_i$ 上的条件为

$$\sum_{i=1}^{3N}\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\delta x_i+\frac{\partial f_i}{\partial u_i}\delta u_i\right)=0 \tag{11.2.35}$$

由原理(11.2.33)和关系(11.2.35)，利用 Lagrange 乘子法容易得到方程

$$\begin{aligned}&X_i-m_i\ddot{x}_i+\sum_{j=1}^{k}\lambda_j\frac{\partial f_j}{\partial x_i}=0\\&\Phi_i-\mu_i\dot{u}_i+\sum_{j=1}^{k}\lambda_j\frac{\partial f_j}{\partial u_i}=0\end{aligned} \qquad (i=1,2,\cdots,3N) \tag{11.2.36}$$

其中 λ_j 为待定乘子。由 $6N+k$ 个方程(11.2.36)和(11.2.34)可解出 x_i,u_i 和 λ_j。

选 $n=3N-k$ 个广义坐标 $q_s(s=1,2,\cdots,n)$，使得

$$x_i=x_i(q_s,u_l,t) \qquad (i,l=1,2,\cdots,3N;s=1,2,\cdots,n) \tag{11.2.37}$$

此时，约束(11.2.34)成为恒等式。对式(11.2.37)取变分，得

$$\delta x_i=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial x_i}{\partial q_s}\delta q_s+\sum_{l=1}^{3N}\frac{\partial x_i}{\partial u_l}\delta u_l \tag{11.2.38}$$

将式(11.2.38)代入原理(11.2.33)，得到

$$\sum_{i=1}^{3N}\sum_{s=1}^{n}(X_i-m_i\ddot{x}_i)\frac{\partial x_i}{\partial q_s}\delta q_s+\sum_{l=1}^{3N}\{\sum_{i=1}^{3N}(X_i-m_i\ddot{x}_i)\frac{\partial x_i}{\partial u_l}+\Phi_l-\mu_l\dot{u}_l\}\delta u_l=0 \tag{11.2.39}$$

由 $\delta q_s,\delta u_l$ 的彼此独立，得到方程

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{3N}(X_i-m_i\ddot{x}_i)\frac{\partial x_i}{\partial q_s}=0 \qquad (s=1,2,\cdots,n)\\&\sum_{i=1}^{3N}(X_i-m_i\dot{x}_i)\frac{\partial x_i}{\partial u_l}+\Phi_l-\mu_l\dot{u}_l=0 \qquad (l=1,2,\cdots,3N)\end{aligned} \tag{11.2.40}$$

下面继续变换方程(11.2.40)。引入动能

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3N}m_i\dot{x}_i^2$$

则有

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{3N}m_i\ddot{x}_i\frac{\partial x_i}{\partial q_s}&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_s}-\frac{\partial T}{\partial q_s}\\\sum_{i=1}^{3N}m_i\ddot{x}_i\frac{\partial x_i}{\partial u_l}&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial\dot{u}_l}-\frac{\partial T}{\partial u_l}\end{aligned}\tag{11.2.41}$$

令

$$\sum_{i=1}^{3N}X_i\frac{\partial x_i}{\partial q_s}=Q_s,\ \sum_{i=1}^{3N}X_i\frac{\partial x_i}{\partial u_l}=P_l\tag{11.2.42}$$

将式(11.2.41)和式(11.2.42)代入式(11.2.40),得到有约束受迫控制问题的Lagrange方程[8]

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_s}-\frac{\partial T}{\partial q_s}=Q_s\qquad(s=1,2,\cdots,n)\\&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial\dot{u}_l}-\frac{\partial T}{\partial u_l}=P_l+\Phi_l-\mu_l\dot{u}_l\qquad(l=1,2,\cdots,3N)\end{aligned}\tag{11.2.43}$$

11.2.4 应用举例

例 1 一薄板 Q,质量为 m,放在固定光滑水平面上,并以点 C 与半径为 R 的圆盘 P 铰接。圆盘也放在同一水平面上,并且可绕其固定中心 O 转动。在点 C 与薄板质心 G 的联线上有一点 A,在 A 上作用有常力 $\boldsymbol{F}$,此力平行于固定直线 Ox,如图 11.1 所示。一伺服电机作用在圆盘上,使得实现约束

$$\alpha-\beta=\frac{\pi}{2}$$

其中 $\alpha=(Ox,OC)$,$\beta=(Ox,OA)$,$OC=R$,$OA=a$,$CG=b$[6]。试列写问题的 Lagrange 方程。

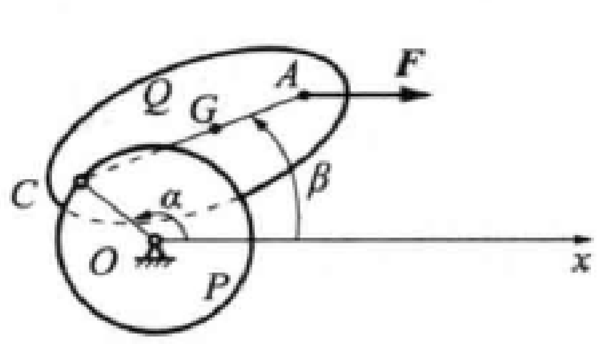


图 11.1

解:因圆盘 P 的位置仅依赖于参数 α,这属于伺服约束的第四种情形。使得第二类约束力的虚功为零的虚位移满足

$$\delta\alpha=0$$

因此,可单独对单板 Q 列写运动微分方程,圆盘的质量不影响运动。平板 Q 的动能为

$$T=\frac{1}{2}m\{R^2\dot{\alpha}^2+b^2\dot{\beta}^2+2Rb\dot{\alpha}\dot{\beta}\cos(\alpha-\beta)+k^2\dot{\beta}^2\}$$

其中 mk^2 为平板对其质心的转动惯量。考虑到 $\delta\alpha=0$,力 $\boldsymbol{F}$ 的虚功为

$$F\delta(R\cos\alpha+a\cos\beta)=-Fa\sin\beta\delta\beta$$

于是,广义力为

$$Q_\beta=-Fa\sin\beta$$

方程(11.2.28)给出

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial\dot{\beta}}-\frac{\partial T}{\partial\beta}=Q_\beta$$

将 T,Q_β 代入,并消去 α 和 $\dot{\alpha}$,得到

$$m(b^2+k^2)\ddot{\beta}-mRb\dot{\beta}^2+Fa\sin\beta=0$$

例 2 一质量为 m,长为 l 的单摆,在重力作用下在铅垂平面 Ox_1x_2 内运动,其悬挂点的位移分量为 u_1,u_2。参数 u_1,u_2 的变化受强制作用,满足微分方程

$$\mu\dot{u}_1=\Phi_1+X_1^{Ru},\mu\dot{u}_2=\Phi_2+X_2^{Ru}$$

假设所受约束是双面理想的。试建立问题的运动微分方程[8]。

解:取摆与铅垂向下的线 Ox_1 的夹角 θ 为广义坐标,则有

$$x_1=u_1+l\cos\theta,x_2=u_2+l\sin\theta$$

系统的动能为

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2)=\frac{1}{2}m\{(\dot{u}_1-l\dot{\theta}\sin\theta)^2+(\dot{u}_2+l\dot{\theta}\cos\theta)^2\}$$

方程(11.2.43)给出

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial\dot{\theta}}-\frac{\partial T}{\partial\theta}=Q_\theta,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial\dot{u}_l}-\frac{\partial T}{\partial u_l}=P_l+\Phi_l-\mu\dot{u}_l\qquad(l=1,2)$$

作计算,有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial\dot{\theta}}-\frac{\partial T}{\partial\theta}=m(l^2\ddot{\theta}-l\ddot{u}_1\sin\theta+l\ddot{u}_2\cos\theta)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial\dot{u}_1}-\frac{\partial T}{\partial u_1}=m(\ddot{u}_1-l\ddot{\theta}\sin\theta-l\dot{\theta}^2\cos\theta)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial\dot{u}_2}-\frac{\partial T}{\partial u_2}=m(\ddot{u}_2-l\ddot{\theta}\cos\theta-l\dot{\theta}^2\sin\theta)$$

$$P_1=X_1\frac{\partial x_1}{\partial u_1}+X_2\frac{\partial x_2}{\partial u_1}=mg$$

$$P_2=X_1\frac{\partial x_1}{\partial u_2}+X_2\frac{\partial x_2}{\partial u_2}=0$$

$$Q_\theta=X_1\frac{\partial x_1}{\partial \theta}+X_2\frac{\partial x_2}{\partial \theta}=-mgl\sin\theta$$

代入，得到

$$m(l^2\ddot{\theta}-l\ddot{u}_1+l\ddot{u}_2\cos\theta)=-mgl\sin\theta$$

$$m(\ddot{u}_1-l\ddot{\theta}\sin\theta-l\dot{\theta}^2\cos\theta)=mg+\Phi_1-\mu\dot{u}_1$$

$$m(\ddot{u}_2+l\ddot{\theta}\cos\theta-l\dot{\theta}^2\sin\theta)=\Phi_2-\mu\dot{u}_2$$

§11.3 机电系统的 Lagrange 方程

机电系统广泛应用于各种技术领域。电动机、发电机、刚体的非接触(电磁的、静电的)悬挂、电测仪器等都是机电系统。为合理构造这些系统并进行一系列分析，现代工程实际要求建立正确的数学模型，这些模型应包括机械运动的微分方程以及电磁过程的方程。为组成机电系统的方程，分析力学的工具是非常方便的，其中表征系统的电磁量和力学量形式上看作同等的，而运动方程可借助 Lagrange 模式来得到。

11.3.1 基本概念和电路方程

机械过程和电磁过程相互联系的系统，称为**机电系统**。

这个定义是相当广泛的，因为包括了机械系统和电路以各种构造结合相联系的机构和仪器。机电系统的主要特征是机械能到电磁能的转换。机电系统在测量技术、电声装置、自动调节和遥控系统中有重要应用。

研究机电系统必须从提出基本假设和选取模型开始，考虑到主要现象，忽略非本质的次要现象。机电系统的机械部分的描述可利用力学系统的模型，作为 N 个质点的总合。假设所加约束是双面理想完整的，约束方程的数目是 d，那么机械子系统在空间中的位置可用 $n=3N-d$ 个广义坐标 $q_s(s=1,2,\cdots,n)$ 来确定。电部分“位置”的给定却是复杂的，因为要描述任何装置中的电磁现象，就必须知道电磁场——磁感应强度 $\boldsymbol{B}$、电场强度 $\boldsymbol{E}$ 及其随时间的变化。因此，作为分布参数系统的电系统，其状态的给定需无穷多个时间函数。在理论电工学中引入的电路和磁路运用有限个参数——电流、电压、磁通等。在用有限个参数描述电动现象时，类似于力学中运用广义坐标。

假设导体截面尺寸与其长度相比甚小，因此，磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 对电流沿截面

分布的依赖性可忽略。此外，还要求所谓准平稳近似条件，在此条件下电路理论才是对的。

现在用 Lagrange 模式建立电路方程。

假设机电系统由 m 个回路组成。每个回路由线导体和电容组成，各个电路之间是电无关的，但回路中的电磁过程不是独立的。因为所有电路处在共同磁场中。用 $i_k(k=1,2,\cdots,m)$ 表示第 k 个回路中的电流，u_k 为加在第 k 个回路上的电动势。设 e_k 为电容器中的电荷，它与电流有关系，$\dot{e}_k=i_k$。第 k 个回路中的电阻和电容分别为 R_k 和 C_k。电容是电荷与电容器极板间电动势(电压)之比

$$C_k=\frac{e_k}{u_k} \tag{11.3.1}$$

当机电系统相互位置改变时，电容器极板间距离也改变，因此，电容是系统广义坐标的函数

$$C_k=C_k(q_s) \qquad (k=1,2,\cdots,m;s=1,2,\cdots,n) \tag{11.3.2}$$

由物理学知，电场能量为

$$W_e=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\frac{e_k^2}{C_k} \tag{11.3.3}$$

由式(11.3.1)和式(11.3.3)知，第 k 个电容器两极板间的电压 u_k^e 可用电场能 W_e 对电荷 e_k 的偏导数来求得

$$u_k^e=\frac{\partial W_e}{\partial e_k}=\frac{e_k}{C_k} \tag{11.3.4}$$

由物理学知，m 个带电回路的磁场能量为

$$W_m=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\sum_{r=1}^{m}L_{kr}i_ki_r \tag{11.3.5}$$

其中 L_{kk} 为第 k 个回路的自感；$L_{kr}(k\neq r)$ 为第 k 个和第 r 个回路的互感。L_{kr} 依赖于第 k、第 r 个回路的尺寸和形状，它们之间的距离、相互分布，以及周围介质的导磁率。因此，量 L_{kr} 是广义坐标的函数

$$L_{kr}=L_{kr}(q_s) \tag{11.3.6}$$

通过第 k 个回路的磁通与回路中电流成正比

$$\Phi_k=\sum_{r=1}^{m}L_{kr}i_r \tag{11.3.7}$$

比较式(11.3.5)和式(11.3.7)，得

$$\Phi_k=\frac{\partial W_m}{\partial i_k} \tag{11.3.8}$$

用 u_k^i 表示第 k 个回路中，当磁通 Φ_k 改变时引起的感应电动势，按电磁感应定律，有

$$u_k^i=-\frac{\mathrm{d}\Phi_k}{\mathrm{d}t}=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial W_m}{\partial i_k} \tag{11.3.9}$$

对第 k 个回路，利用欧姆定律，有

$$u_k+u_k^i=R_k i_k+u_k^e \tag{11.3.10}$$

注意到式(11.3.4)和式(11.3.9)，由式(11.3.10)得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial W_m}{\partial i_k}+\frac{\partial W_e}{\partial \mathrm{e}_k}+R_k i_k=u_k \qquad (k=1,2,\cdots,m) \tag{11.3.11}$$

引进电耗散函数

$$\Psi_\mathrm{e}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}R_k i_k$$

于是有

$$\frac{\partial \Psi_\mathrm{e}}{\partial i_k}=R_k i_k$$

代入式(11.3.11)，得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial W_m}{\partial i_k}+\frac{\partial W_e}{\partial e_k}+\frac{\partial \Phi_e}{\partial i_k}=u_k \qquad (k=1,2,\cdots,m) \tag{11.3.12}$$

这就是电路方程。

11.3.2 Lagrange-Maxwell 方程

电场和磁场对物体作用而产生的力，称为磅达马达力。

相应于广义坐标 q_s 的广义磅达马达力记作 Q_s^*，以区别于通常的机械性质的广义力。为求得广义磅达马达力的表达式，可利用系统的能量平衡方程。电动力所做的功提供焦耳热、磁场和电场能量的改变以及磅达马达力所做的功。系统能量平衡方程为

$$\sum_{k=1}^{m}u_k i_k = \sum_{k=1}^{m}R_k i_k^2+\frac{\mathrm{d}W_m}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}W_e}{\mathrm{d}t}+\sum_{s=1}^{n}Q_s^*\dot{q}_s \tag{11.3.13}$$

由式(11.3.5)和式(11.3.6)知，$W_m=W_m(i_k,q_s)$，于是

$$\frac{\mathrm{d}W_m}{\mathrm{d}t}=\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial W_m}{\partial i_k}\frac{\mathrm{d}i_k}{\mathrm{d}t}+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial W_m}{\partial q_s}\dot{q}_s \tag{11.3.14}$$

考虑到 W_m 对 i_k 是二次齐次的，有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial W_m}{\partial i_k}i_k\right)=2\frac{\mathrm{d}W_m}{\mathrm{d}t}$$

则式(11.3.14)可变换为

$$\frac{\mathrm{d}W_m}{\mathrm{d}t}=\sum_{k=1}^{m}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial W_m}{\partial i_k}i_k-\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial W_m}{\partial q_s}\dot{q}_s \tag{11.3.15}$$

系统的电能，按式(11.3.2)和(11.3.3)，应为电荷 e_k 和广义坐标 q_s 的函数，$W_e=W_e(e_k,q_s)$，因此有

$$\frac{\mathrm{d}W_e}{\mathrm{d}t}=\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial W_e}{\partial e_k}i_k+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial W_e}{\partial q_s}\dot{q}_s \tag{11.3.16}$$

将式(11.3.15)和(11.3.16)代入方程(11.3.13)，得

$$\sum_{k=1}^{m}\left(u_k-R_k i_k-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial W_m}{\partial i_k}-\frac{\partial W_e}{\partial e_k}\right)i_k=\sum_{s=1}^{n}\left(-\frac{\partial W_m}{\partial q_s}+\frac{\partial W_m}{\partial q_s}+Q_s^*\right)\dot{q}_s \tag{11.3.17}$$

将电路方程(11.3.12)代入式(11.3.17),得

$$\sum_{s=1}^{n}\left(Q_s^*-\frac{\partial W_m}{\partial q_s}+\frac{\partial W_e}{\partial q_s}\right)\dot{q}_s=O \tag{11.3.18}$$

由于广义速度是独立的量,可任意选取,由式(11.3.18)得到

$$Q_s^*=\frac{\partial}{\partial q_s}(W_m-W_e) \tag{11.3.19}$$

将式(11.3.5)和(11.3.3)代入式(11.3.19),最终得到广义磅达马达力的表达式

$$Q_s^*=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\sum_{r=1}^{m}\frac{\partial L_{kr}}{\partial q_s}i_k i_r+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial C_k}{\partial q_s}\frac{e_k^2}{C_k^2} \tag{11.3.20}$$

用 T 表示系统的动能,在完整定常约束下,它是广义速度的齐二次式

$$T=\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}a_{sl}\dot{q}_s\dot{q}_l \tag{11.3.21}$$

其中系数 a_{sl} 仅依赖于广义坐标。系统机械部分的势能是广义坐标的函数

$$V=V(q_s)$$

用 $\Psi_m(q_s,\dot{q}_s)$ 表示机械耗散函数。考虑到在机械系统上除了有势力 $-\partial V/\partial q_s$,耗散力 $-\partial\Psi_m/\partial\dot{q}_s$,非势力 Q_s 以外,还作用有磅达马达力 Q_s^*,广义坐标中的 Lagrange 方程写成形式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_s}-\frac{\partial T}{\partial q_s}=-\frac{\partial V}{\partial q_s}-\frac{\partial\Psi_m}{\partial\dot{q}_s}+Q_s+Q_s^*\qquad(s=1,2,\cdots,n) \tag{11.3.22}$$

将式(11.3.19)代入方程(11.3.22),并联合电路方程(11.3.12),得到机电系统的封闭方程组

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial W_m}{\partial i_k}+\frac{\partial W_e}{\partial e_k}+\frac{\partial\Psi_e}{\partial i_k}=u_k\qquad(k=1,2,\cdots,m)\\&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_s}-\frac{\partial T}{\partial q_s}+\frac{\partial V}{\partial q_s}-\frac{\partial W_m}{\partial q_s}+\frac{\partial W_e}{\partial q_s}+\frac{\partial\Psi_m}{\partial\dot{q}_s}=Q_s\qquad(s=1,2,\cdots,n)\end{aligned} \tag{11.3.23}$$

取机电系统的 Lagrange 函数为

$$L=T(q_s,\dot{q}_s)-V(q_s)+W_m(q_s,i_k)-W_e(q_s,e_k) \tag{11.3.24}$$

并引入电的和机械的耗散函数之和

$$\Psi=\Psi_e(i_k)+\Psi_m(q_s,\dot{q}_s) \tag{11.3.25}$$

则方程(11.3.23)可写成形式[9]

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{e}_k}-\frac{\partial L}{\partial e_k}+\frac{\partial \Psi}{\partial \dot{e}_k}=u_k \qquad (k=1,2,\cdots,m)\\
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial L}{\partial q_s}+\frac{\partial \Psi}{\partial \dot{q}_s}=Q_s \qquad (s=1,2,\cdots,n)
\end{aligned}
\tag{11.3.26}
$$

方程(11.3.26)就是机电系统的 **Lagrange-Maxwell 方程**,它组成对广义坐标和电荷的$(n+m)$个二阶常微分方程。

为积分方程(11.3.26),还需给出电荷、电流、广义坐标和广义速度的初始条件

$$
e_k\Big|_{t=0}=e_{k0},\ i_k\Big|_{t=0}=i_{k0},\ q_s\Big|_{t=0}=q_{s0},\ \dot{q}_s\Big|_{t=0}=\dot{q}_{s0} \tag{11.3.27}
$$

11.3.3 应用举例

刚体的电磁悬挂。

在火车车厢上安一电磁铁,它与 T 形铁轨相吸引。在电磁铁绕组中的电流名义力以及磁铁和铁轨间名义间隙下,引力与车厢重力平衡。假设车厢沿铅垂轴做直线平移。将在电磁铁和铁轨间间隙名义值下的质心位置取为坐标原点 O。车厢质心的坐标 y 取为广义坐标。电磁铁绕组中的电流记作 i。此机电系统的广义坐标是 y 和 i。系统不包含电容,因此,对电流的微分方程是一阶的,此时常说有半个自由度。

车厢动能为

$$
T=\frac{1}{2}\frac{P}{g}\dot{y}^2 \tag{11.3.28}
$$

重力势能为

$$
V=Py \tag{11.3.29}
$$

因系统中没有电容,故电能等于零。磁能表示为

$$
W_m=\frac{1}{2}\int_V \frac{1}{\mu}B^2\mathrm{d}V \tag{11.3.30}
$$

其中 $\boldsymbol{B}$ 为磁感应强度矢量;μ 为导磁率;V 为磁场包含的体积。设磁铁与铁轨间的间隙为 $h-y$,它与磁铁尺寸相比甚小。此时,可认为磁铁与铁轨间气隙中的磁场是均匀的,并忽略边界效应。不计铁轨、磁铁、气隙中的磁漏泄。假设磁铁和铁轨的导磁率 μ 很大,可忽略 W_m 中对磁铁和铁轨体积的积分。此时,只有常矢量 $\boldsymbol{B}$ 沿两个气隙体积的积分

$$
W_m=\frac{1}{\mu_0}S(h-y)B^2 \tag{11.3.31}
$$

其中 S 为磁铁面积;μ_0 为空气导磁率。通过电磁铁绕组的磁通为

$$
\Phi=BSN \tag{11.3.32}
$$

其中 N 为绕组圈数。另一方面,磁通与电流成比例

$$\Phi=L_{11}i \tag{11.3.33}$$

其中 L_{11} 为自感系数。可求出

$$B=\frac{L_{11}i}{SN}$$

代入 W_m 中,得

$$W_m=\frac{(h-y)L_{11}^2}{\mu_0 SN^2}i^2$$

但因

$$W_m=\frac{1}{2}L_{11}i^2$$

于是有

$$L_{11}=\frac{\mu_0 SN^2}{2(h-y)}$$

而系统的磁能为

$$W_m=\frac{\mu_0 SN^2}{4(h-y)}i^2 \tag{11.3.34}$$

因此,机电系统的 Lagrange 函数为

$$L=\frac{1}{2}\frac{P}{g}\dot{y}^2-Py+\frac{1}{4}\frac{\mu_0 SN^2}{h-y}i^2 \tag{11.3.35}$$

系统的耗散函数为

$$\Psi=\frac{1}{2}b\dot{y}^2+\frac{1}{2}Ri^2 \tag{11.3.36}$$

其中 b 为车厢运动中的黏摩擦系数;R 为电路中的电阻。

假设非势广义力不存在,并用 u 表示电磁铁绕组上的电压。为确保车厢悬挂的稳定性,这个电压应依赖于气隙$(h-y)$。

Lagrange-Maxwell 方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial i}+\frac{\partial\Psi}{\partial i}=u,\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{y}}-\frac{\partial L}{\partial y}+\frac{\partial\Psi}{\partial\dot{y}}=0 \tag{11.3.37}$$

给出

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\mu_0 SN^2}{h-y}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{2}\frac{\mu_0 SN^2}{(h-y)^2}\dot{y}i+Ri=u\\&\frac{P}{g}\ddot{y}+P-\frac{1}{4}-\frac{\mu_0 SN^2}{(n-y)^2}i^2+b\dot{y}=0\end{aligned} \tag{11.3.38}$$

这里项

$$-\frac{1}{2}\frac{\mu_0 SN^2}{(h-y)^2}\dot{y}i$$

是车厢运动引起的感应电动势,而项

$$\frac{\mu_0 SN^2}{4(h-y)^2}i^2$$

是磅达马达力,即车厢对铁轨的引力。

下面研究方程平衡位置的稳定性。

假设

$$u=u_0+k(h-y),u_0=\text{const.} \tag{11.3.39}$$

其中 k 是传感器信号放大系数。在车厢的平衡位置上,有

$$y=0,\dot{y}=0,i=i_0 \tag{11.3.40}$$

将其代入微分方程(11.3.38),得到所需电动势和电流的名义值

$$u_0=Ri_0-kh,i_0^2=\frac{2Ph}{l_0} \tag{11.3.41}$$

其中

$$l_0=\frac{\mu_0 SN^2}{2h}$$

为 $y=0$ 时的自感系数。

设车厢由平衡位置发生小位移 $y\ll h$,并设电磁铁绕组中的电流靠近其名义值 i_0,即 $i=i_0+x,x\ll i_0$。于是有

$$i^2\approx i_0^2+2i_0x,\frac{1}{(h-y)^2}\approx\frac{1}{h^2}+\frac{2y}{h^3}$$

$$\frac{i^2}{(h-y)^2}\approx\frac{i_0^2}{h^2}+\frac{2i_0x}{h^2}+\frac{2i_0^2y}{h^3} \tag{11.3.42}$$

将式(11.3.42)代入方程(11.3.38),并考虑到式(11.3.39)和(11.3.41),略去运动方程中的非线性项,得到线性化方程

$$\begin{aligned}&l_0\dot{x}+Rx+l_0r\dot{y}+ky=0\\&-l_0rx+m\ddot{y}+b\dot{y}-l_0r^2y=0\end{aligned} \tag{11.3.43}$$

其中

$$r=\frac{i_0}{h},m=\frac{P}{g}$$

将形如

$$x=C_1\exp(\lambda t),y=C_2\exp(\lambda t) \tag{11.3.44}$$

的解代入方程(11.3.43),得到特征方程

$$\begin{vmatrix}l_0\lambda+R & l_0r\lambda+k\\ -l_0r & m\lambda^2+b\lambda-l_0r^2\end{vmatrix}=0$$

即

$$ml_0\lambda^3+(bl_0+mR)\lambda^2+bR\lambda+l_0r(k-rR)=0 \tag{11.3.45}$$

因此,车厢平衡位置的稳定性条件归结为

$$k>rR,bR(bl_0+mR)>ml_0^2r(k-rR)$$

由此得到火车电磁悬挂的工作能力条件为[9]

$$\frac{i_0 R}{h}<k<\frac{i_0 R}{h}+b\,\frac{hR(mR+l_0 b)}{m{l_0}^2 i_0} \tag{11.3.46}$$

可见,在没有阻力($b=0$)的情况下,它是不能工作的。

§11.4 Lagrange 力学逆问题

Lagrange 力学指出,对于一个确定的动势 L,就可按 Lagrange 方程(8.4.4)列写系统的运动微分方程。对于 n 个自由度系统,它们是 n 个二阶常微分方程。这是 Lagrange 力学的正问题。所谓 Lagrange 力学的逆问题,是指要求找到一个函数 L,使得一个二阶常微分方程组可写成 Lagrange 方程(8.4.4)的形式。专著[10]将这个问题称为 Helmholtz 系统问题。自 Jacobi (1837),Helmholtz(1887),Darboux(1891)等的工作,Lagrange 力学逆问题的研究已取得重要进展。

11.4.1 问题的提出

完整保守系统的 Lagrange 方程为(8.4.4),即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial L}{\partial q_s}=0 \qquad (s=1,2,\cdots,n) \tag{11.4.1}$$

其中 $L=T-V$ 为动势;T 为动能;V 为势能。对于确定的 T,V,按式(11.4.1)做运算,可得到 n 个二阶常微分方程。

现在给出一个二阶常微分方程组

$$\sum_{k=1}^{n} A_{sk}(q_m,\dot{q}_m,t)\ddot{q}_k+B_s(q_m,\dot{q}_m,t)=0 \qquad (s,m=1,2,\cdots,n) \tag{11.4.2}$$

要求找到一个函数 L,使得方程(11.4.2)可以写成形式(11.4.1)。这就是 Lagrange力学逆问题。当然,一般说来,这样的函数 L 已不再是动势了。

11.4.2 函数 L 存在的条件

如果方程(11.4.2)中的系数 A_{sk},B_s 满足下述条件

$$A_{sk}=A_{ks} \tag{11.4.3}$$

$$\frac{\partial A_{sk}}{\partial \dot{q}_m}=\frac{\partial A_{mk}}{\partial \dot{q}_s} \tag{11.4.4}$$

$$\frac{\partial B_s}{\partial \dot{q}_k}+\frac{\partial B_k}{\partial \dot{q}_s}=2\left\{\frac{\partial}{\partial t}+\sum_{m=1}^{n}\dot{q}_m\frac{\partial}{\partial q_m}\right\}A_{sk} \tag{11.4.5}$$

$$\frac{\partial B_s}{\partial q_k}-\frac{\partial B_k}{\partial q_s}=\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial t}+\sum_{m=1}^{n}\dot{q}_m\frac{\partial}{\partial q_m}\right\}\left(\frac{\partial B_s}{\partial \dot{q}_k}-\frac{\partial B_k}{\partial \dot{q}_s}\right) \qquad (s,k,m=1,2,\cdots,n) \tag{11.4.6}$$

可以证明能够找到函数 L,使得方程(11.4.2)成为方程(11.4.1)[11]。条件(11.4.3)～(11.4.6)称为基本形式的**自伴随条件**。

如果方程表示为

$$\ddot{q}_s - f_s(q_k, \dot{q}_k, t) = 0 \qquad (s,k=1,2,\cdots,n) \tag{11.4.7}$$

则自伴随条件为

$$\frac{\partial f_s}{\partial \dot{q}_k} + \frac{\partial f_k}{\partial \dot{q}_s} = 0 \tag{11.4.8}$$

$$\frac{\partial^2 f_s}{\partial \dot{q}_k \partial \dot{q}_m} - \frac{\partial^2 f_k}{\partial \dot{q}_s \partial \dot{q}_m} = 0 \tag{11.4.9}$$

$$\frac{\partial f_s}{\partial q_k} - \frac{\partial f_k}{\partial q_s} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial l} + \sum_{m=1}^{n} \dot{q}_m \frac{\partial}{\partial q_m}\right\}\left(\frac{\partial f_s}{\partial \dot{q}_R} - \frac{\partial f_k}{\partial \dot{q}_s}\right) \qquad (s,k,m=1,2,\cdots,n) \tag{11.4.10}$$

如果方程表示为

$$\ddot{q}_s - \sum_{k=1}^{n} \rho_{sk}(t, q_m)\dot{q}_k - \sigma_s(t, q_m) = 0 \qquad (s = 1,2,\cdots,n) \tag{11.4.11}$$

则自伴随条件表示为

$$\rho_{sk} + \rho_{ks} = 0 \tag{11.4.12}$$

$$\frac{\partial \rho_{sk}}{\partial q_m} + \frac{\partial \rho_{km}}{\partial q_s} + \frac{\partial \rho_{ms}}{\partial q_k} = 0 \tag{11.4.13}$$

$$\frac{\partial \rho_{sk}}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_s}{\partial q_k} - \frac{\partial \sigma_k}{\partial q_s} \qquad (s,k,m=1,2,\cdots,n) \tag{11.4.14}$$

如果方程表示为

$$A(t,q,\dot{q})\ddot{q} + B(t,q,\dot{q}) = 0 \tag{11.4.15}$$

则自伴随条件为

$$\frac{\partial B}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial q}\dot{q} \tag{11.4.16}$$

11.4.3 函数 L 的构造方法

在自伴随条件(11.4.3)～(11.4.6)下,L 是可以找到的,但是解不是唯一的。实际上,展开方程(11.4.1),有

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_s \partial \dot{q}_k}\ddot{q}_k + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_s \partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_s \partial t} - \frac{\partial L}{\partial q_s} = 0 \tag{11.4.17}$$

比较方程(11.4.17)与(11.4.2),得到

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_s \partial \dot{q}_k} = A_{sk} \qquad (s,k=1,2,\cdots,n) \tag{11.4.18}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_s \partial q_k}\dot{q}_k+\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_s \partial t}-\frac{\partial L}{\partial q_s}=B_s \qquad (s=1,2,\cdots,n) \quad (11.4.19)$$

方程(11.4.18)～(11.4.19)是(n^2+n)个偏微分方程,仅有一个未知函数 L,因此,问题是超定的。当然,只要能找到哪怕是一个 L,问题就算解决了。

下面由条件(11.4.3)～(11.4.6),方程(11.4.18),(11.4.19)给出 Lagrange函数 L 的构造方法。

方程(11.4.18)有通解

$$L(t,q_m,\dot{q}_m)=K(t,q_m,\dot{q}_m)+\sum_{k=1}^{n}D_k(t,q_m)\dot{q}_k+C(t,q_m) \quad (11.4.20)$$

其中 $K(t,q_m,\dot{q}_m)$是一个特解。将式(11.4.20)代入式(11.4.18)和(11.4.19),得到

$$\frac{\partial^2 K}{\partial \dot{q}_{k_1}\partial \dot{q}_{k_2}}=A_{k_1k_2} \qquad (k_1,k_2=1,2,\cdots,n) \qquad (11.4.21)$$

$$\left(\frac{\partial D_{k_1}}{\partial t}-\frac{\partial C}{\partial q_{k_1}}\right)+\sum_{k_2=1}^{n}\left(\frac{\partial D_{k_1}}{\partial q_{k_2}}-\frac{\partial D_{k_1}}{\partial q_{k_1}}\right)\dot{q}_{k_2}$$
$$=B_{k_1}+\frac{\partial K}{\partial q_{k_1}}-\frac{\partial^2 K}{\partial \dot{q}_{k_1}\partial t}-\sum_{k_2=1}^{n}\frac{\partial^2 K}{\partial \dot{q}_{k_1}\partial q_{k_2}}\dot{q}_{k_2} \qquad (k_1=1,2,\cdots,n)$$
$$(11.4.22)$$

方程(11.4.21)的右端是已知的,由此可解出 L 中的第一项 K。将所得到的 K 代入方程(11.4.22),则方程(11.4.22)的右端也是已知的。为得到 L 中第二项的系数 D_k 所满足的方程,可将式(11.4.22)两端对 $\dot{q}_{k_2}$ 求导数,得

$$\frac{\partial D_{k_1}}{\partial q_{k_2}}-\frac{\partial D_{k_2}}{\partial q_{k_1}}=\frac{\partial B_{k_1}}{\partial \dot{q}_{k_2}}-\left\{\frac{\partial}{\partial t}+\sum_{k_3=1}^{n}\dot{q}_{k_3}\frac{\partial}{\partial q_{k_3}}\right\}\frac{\partial^2 K}{\partial \dot{q}_{k_1}\partial \dot{q}_{k_2}}+\frac{\partial^2 K}{\partial q_{k_1}\partial \dot{q}_{k_2}}-\frac{\partial^2 K}{\partial \dot{q}_{k_1}\partial q_{k_2}}$$
$$(k_1,k_2=1,2,\cdots,n) \qquad (11.4.23)$$

其右端是已知的,设由此可解出 D_k。为求得 L 中的第三项 C 所满足的方程,只要将式(11.4.23) 代入式(11.4.22),得

$$\frac{\partial C}{\partial q_{k_1}}=\frac{\partial D_{k_1}}{\partial t}-B_{k_1}-\frac{\partial K}{\partial q_{k_1}}+\frac{\partial^2 K}{\partial \dot{q}_{k_1}\partial t}+\sum_{k_2=1}^{n}\frac{\partial^2 K}{\partial q_{k_1}\partial \dot{q}_{k_2}}\dot{q}_{k_2}+\sum_{k_2=1}^{n}\frac{\partial B_{k_1}}{\partial \dot{q}_{k_2}}q_{k_2}-$$
$$\left\{\frac{\partial}{\partial t}+\sum_{k=1}^{n}\dot{q}_k\frac{\partial}{\partial q_k}\right\}\frac{\partial^2 K}{\partial \dot{q}_{k_1}\partial \dot{q}_{k_2}}\dot{q}_{k_2} \qquad (11.4.24)$$

其右端都是已知的,由此可解出 C。

假设所有条件(11.4.3) ～ (11.4.6) 都满足,则式(11.4.23) 和式(11.4.24) 可以写得更简短些。实际上,将式(11.4.22) 和(11.4.5) 代入式(11.4.23),得到

$$\frac{\partial D_{k_1}}{\partial q_{k_2}}-\frac{\partial D_{k_2}}{\partial q_{k_1}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial B_{k_1}}{\partial \dot{q}_{k_2}}-\frac{\partial B_{k_2}}{\partial \dot{q}_{k_1}}\right)+\left(\frac{\partial^2 K}{\partial q_{k_1}\partial \dot{q}_{k_2}}-\frac{\partial^2 K}{\partial \dot{q}_{k_1}\partial q_{k_2}}\right)\equiv Z_{k_1k_2} \tag{11.4.25}$$

将式(11.4.21)和(11.4.5)代入式(11.4.24),得到

$$\frac{\partial C}{\partial q_{k_1}}=\frac{\partial D_{k_1}}{\partial t}-B_{k_1}-\frac{\partial K}{\partial q_{k_1}}+\frac{\partial^2 K}{\partial \dot{q}_{k_1}\partial t}+\sum_{k_2=1}^{n}\left[\frac{\partial^2 K}{\partial q_{k_1}\partial \dot{q}_{k_2}}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial B_{k_1}}{\partial \dot{q}_{k_2}}-\frac{\partial B_{k_2}}{\partial \dot{q}_{k_1}}\right)\right]\dot{q}_{k_2}\equiv W_{k_1} \tag{11.4.26}$$

这样,方程(11.4.21),(11.4.25)和(11.4.26)就给出构造 Lagrange 函数 L 的方法。由这些方程得到

$$K(t,q_m,\dot{q}_m)=\sum_{k_1=1}^{n}\sum_{k_2=1}^{n}\dot{q}_{k_1}\int_0^1 \mathrm{d}\tau'\left\{\left[\int_0^1 \mathrm{d}\tau A_{k_1k_2}(\boldsymbol{q},\tau\dot{\boldsymbol{q}},t)\right]\dot{q}_{k_2}\right\}(\boldsymbol{q},\tau'\dot{\boldsymbol{q}},t) \tag{11.4.27}$$

$$D_{k_1}=\sum_{k_2=1}^{n}\left[\int_0^1 \mathrm{d}\tau\tau Z_{k_1k_2}(\tau\boldsymbol{q},t)\right]q_{k_2} \tag{11.4.28}$$

$$C=\sum_{k=1}^{n}\left[\int_0^1 \mathrm{d}\tau W_k(\tau\boldsymbol{q},t)\right]q_k \tag{11.4.29}$$

必须注意,方程(11.4.21),(11.4.25)和(11.4.26)一定要按顺序求解。首先,由式(11.4.27)在已知 $A_{k_1k_2}$ 下计算出 K;再由式(11.4.25)计算出 $Z_{k_1k_2}$,由式(11.4.28)解出 D_{k_1};最后,由式(11.4.26)计算出 W_{k_1},由式(11.4.29)解出 C。这样,函数 L 就由式(11.4.20)给出。

上述表达称为直接解析表达。如果方程是非自伴随的,但在乘以积分因子后可成为自伴随的,这样就称为间接解析表达。函数 L 的构造,还有其他方法[11]。

11.4.4 应用举例

例 1 二自由度非线性系统的微分方程为

$$(\dot{q}_1+2\dot{q}_2)\ddot{q}_1+2(\dot{q}_1+\dot{q}_2)\ddot{q}_2+q_2\dot{q}_2-q_1\dot{q}_2+q_1q_2+\frac{1}{2}q_2^2=0$$

$$2(\dot{q}_1+\dot{q}_2)\ddot{q}_1+(2\dot{q}_1+\dot{q}_2)\ddot{q}_2+q_1\dot{q}_1-q_2\dot{q}_1+q_1q_2+\frac{1}{2}q_1^2=0$$

试构造 Lagrange 函数[11,12]。

解:首先,验证自伴随条件。由方程知

$$A_{11}=\dot{q}_1+2\dot{q}_2,A_{12}=2(\dot{q}_1+\dot{q}_2),A_{21}=2(\dot{q}_1+\dot{q}_2),A_{22}=2\dot{q}_1+\dot{q}_2$$

$$B_1=q_2\dot{q}_2-q_1\dot{q}_2+q_1q_2+\frac{1}{2}q_2^2,B_2=q_1\dot{q}_1-q_2\dot{q}_1+q_1q_2+\frac{1}{2}q_1^2$$

显然有 $A_{12}=A_{21}$，条件(11.4.3)成立。又

$$\frac{\partial A_{12}}{\partial\dot{q}_2}=2,\frac{\partial A_{21}}{\partial\dot{q}_1}=2,\frac{\partial A_{11}}{\partial\dot{q}_2}=2,\frac{\partial A_{22}}{\partial\dot{q}_1}=2$$

则条件(11.4.4)成立。做计算，有

$$\frac{\partial B_1}{\partial\dot{q}_2}+\frac{\partial B_2}{\partial\dot{q}_1}=0,\left(\frac{\partial}{\partial t}+\sum_{m=1}^{2}\dot{q}_m\frac{\partial}{\partial q_m}\right)A_{12}=0$$

$$\frac{\partial B_1}{\partial\dot{q}_1}+\frac{\partial B_1}{\partial\dot{q}_1}=0,\left(\frac{\partial}{\partial t}+\sum_{m=1}^{2}\dot{q}_m\frac{\partial}{\partial q_m}\right)A_{11}=0$$

$$\frac{\partial B_2}{\partial\dot{q}_2}+\frac{\partial B_2}{\partial\dot{q}_2}=0,\left(\frac{\partial}{\partial t}+\sum_{m=1}^{2}\dot{q}_m\frac{\partial}{\partial q_m}\right)A_{22}=0$$

因此，条件(11.4.5)成立。最后，因

$$\frac{\partial B_1}{\partial q_2}-\frac{\partial B_2}{\partial q_1}=\dot{q}_2-\dot{q}_1$$

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t}+\sum_{m=1}^{2}\dot{q}_m\frac{\partial}{\partial q_m}\right\}\left(\frac{\partial B_1}{\partial\dot{q}_2}-\frac{\partial B_2}{\partial\dot{q}_1}\right)=2(\dot{q}_2-\dot{q}_1)$$

故条件(11.4.6)也成立。

其次，构造 Lagrange 函数 L。由 A_{sk} 按式(11.4.27)计算 K，得

$$\begin{aligned}K=&\dot{q}_1\int_0^1\mathrm{d}\tau'\left\{\int_0^1\mathrm{d}\tau(\dot{q}_1+2\dot{q}_2)\tau q_1\right\}(\tau'\dot{\boldsymbol{q}})+\\&\dot{q}_1\int_0^1\mathrm{d}\tau'\left\{\int_0^1\mathrm{d}\tau(2\dot{q}_1+2\dot{q}_2)\tau q_1\right\}(\tau'\dot{\boldsymbol{q}})+\\&\dot{q}_2\int_0^1\mathrm{d}\tau'\left\{\int_0^1\mathrm{d}\tau(2\dot{q}_1+2\dot{q}_2)\tau q_1\right\}(\tau'\dot{\boldsymbol{q}})+\\&\dot{q}_2\int_0^1\mathrm{d}\tau'\left\{\int_0^1\mathrm{d}\tau(2\dot{q}_1+\dot{q}_2)\tau q_2\right\}(\tau'\dot{\boldsymbol{q}})\\=&\frac{1}{6}(\dot{q}_1^3+\dot{q}_2^3)+\dot{q}_1^2\dot{q}_2+\dot{q}_1\dot{q}_1^2\end{aligned}$$

将所得 K 代入式(11.4.25)，求得

$$Z_{11}=Z_{22}=0,Z_{12}=q_2-q_1,Z_{21}=q_1-q_2$$

将其代入式(11.4.28)，得

$$D_1=\int_0^1\tau Z_{11}(\tau\boldsymbol{q})q_1\mathrm{d}\tau+\int_0^1\tau Z_{12}(\tau\boldsymbol{q})q_2\mathrm{d}\tau$$

$$=\frac{1}{3}(q_2^2-q_1q_2)$$

$$D_2=\frac{1}{3}(q_1^2-q_1q_2)$$

因此

$$\sum_{k=1}^{2}D_k\dot{q}_k=\frac{1}{3}(q_2^2\dot{q}_1+q_1^2\dot{q}_2)-\frac{1}{3}q_1q_2(\dot{q}_1+\dot{q}_2)$$

将所得 K,D_k 代入式(11.4.26),得到

$$W_1=\frac{\partial D_1}{\partial t}-B_1-\frac{\partial K}{\partial q_1}+\frac{\partial^2 K}{\partial\dot{q}_1\partial t}+\frac{\partial^2 K}{\partial q_1\partial\dot{q}_1}\dot{q}_1+$$

$$\left[\frac{\partial^2 K}{\partial q_1\partial\dot{q}_2}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial B_1}{\partial\dot{q}_2}-\frac{\partial B_2}{\partial q_1}\right)\right]\dot{q}_2=-q_1q_2-\frac{1}{2}q_2^2$$

$$W_2=-q_1q_2-\frac{1}{2}q_1^2$$

将所得 W_1,W_2 代入式(11.4.29),得到

$$C=\int_0^1 W_1(\tau\boldsymbol{q})q_1\,\mathrm{d}\tau+\int_0^1 W_2(\tau\boldsymbol{q})q_2\,\mathrm{d}\tau$$

$$=-\frac{1}{2}(q_1^2q_2+q_1q_2^2)$$

最后,Lagrange 函数为

$$L=K+D_1\dot{q}_1+D_2\dot{q}_2+C$$

$$=\frac{1}{6}(\dot{q}_1^3+\dot{q}_2^3)+\dot{q}_1^2\dot{q}_2+\dot{q}_1\dot{q}_1^2+\frac{1}{3}(q_2^2\dot{q}_1+q_1^2\dot{q}_2)-$$

$$\frac{1}{3}q_1q_2(\dot{q}_1+\dot{q}_2)-\frac{1}{2}(q_1^2q_2+q_1q_2^2)$$

例 2 Emden 方程为

$$\ddot{q}+\frac{2}{t}\dot{q}+q^5=0$$

试将其化成 Lagrange 方程。

解:Emden 方程是非自伴随的。将其两端乘以因子 $h(t,q)$,有

$$h\ddot{g}+\frac{2h}{t}\dot{q}+hq^5=0$$

自伴随条件(11.4.16)给出

$$\frac{\partial}{\partial\dot{q}}\left(\frac{2h}{t}\dot{q}+hq^5\right)=\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial h}{\partial q}\dot{q}$$

可找到

$$h=t^2$$

Emden 方程化成自伴随形式

$$t\ddot{q}+2t\dot{q}+t^2q^5=0$$

下面构造 Lagrange 函数。式(11.4.27)给出

$$K=\dot{q}\int_0^1\left[\int_0^1 t^2(\dot{q}\tau')\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{d}\tau'=\frac{1}{2}t^2\dot{q}^2$$

代入式(11.4.25),得

$$Z_{11}=0$$

式(11.4.28)给出

$$D_1=0$$

式(11.4.26)给出

$$W_1=-B+\frac{\partial^2 K}{\partial\dot{q}\partial t}=-t^2q^5$$

式(11.4.29)给出

$$C=\int_0^1 -t^2(q\tau)^5q\mathrm{d}\tau=-\frac{1}{6}t^2q^6$$

于是,Lagrange 函数为

$$L=t^2\left(\frac{1}{2}\dot{q}^2-\frac{1}{6}q^6\right)$$

第 9~11 章讨论了 Lagrange 方程的多种应用,包括 12 个专题:准坐标下的 Lagrange 方程、耗散函数的 Lagrange 方程、初始运动问题、打击运动的 Lagrange 方程、运动稳定性和小振动理论、刚体定点转动动力学、相对运动动力学、变质量系统的 Lagrange 方程、事件空间中的 Lagrange 方程、可控力学系统的 Lagrange 方程、机电系统的 Lagrange、Lagrange 力学逆问题等。每个专题都有极为丰富的内容,以及可以延拓的课题,本书只介绍了一些基本内容。由这些专门问题可以看到 Lagrange 力学的光辉和永久的生命力。

思考题

11.1 研究事件空间的 Lagrange 方程有什么好处?

11.2 伺服约束系统中的第二类约束是非 Четаев 型约束。这种提法可否?

11.3 文献[10]将 Lagrange 力学逆问题称为 Helmholtz 系统。为什么会有此说?

11.4 在机电系统的微分方程(11.3.23)中,机与电是怎样相互影响的?

11.5 Lagrange 方程的应用,除 12 个专题外,还有什么专题可以研究?

习题

11.1 在事件空间 R_{n+1} 中构造函数

$$R=\frac{1}{2}(\Lambda''-3\Lambda''_0)$$

其中

$$\Lambda''=\frac{\mathrm{d}^2\Lambda}{\mathrm{d}\tau^2}$$

而 Λ''_0 为 Λ 中取 x'_α 为常数时对参数 τ 的两次导数,即有

$$\frac{\partial\Lambda''_0}{\partial x''_\alpha}=\frac{\partial\Lambda}{\partial x_\alpha}\qquad(\alpha=1,2,\cdots,n+1)$$

试证:方程(11.1.13)可表示为 Ценов 形式

$$\frac{\partial R}{\partial x''_\alpha}=0$$

11.2 在例 1 中,如果约束 $\alpha-\beta=\pi/2$ 靠平板与圆盘的接触来实现,试列写系统的运动微分方程。

答:$\{M(R^2+b^2+k^2)+J_0\}\ddot{\beta}+F(a\sin\beta+R\cos\beta)=0$

其中 J_0 为圆盘对 O 轴的转动惯量。

11.3 在电磁继电器中,有

$$V-W_m=\frac{1}{2}K(l_0\varphi)^2+Pr_0\cos\varphi-\frac{W_0h^2}{h^2-l^2\varphi^2}$$

其中 V 为机械部分势能;W_m 为磁势;K,l_0,P,r_0,h,W_0,l 为常数。试用 Lagrange-Dirichlet定理证明:当

$$Kl_0^2-Pr_0-\frac{2W_0l^2}{h^2}>0$$

时,平衡位置 $\varphi=0$ 是稳定的。

11.4 试将方程

$$\ddot{q}+\gamma\dot{q}=0\qquad(\gamma=\text{const.})$$

化成 Lagrange 方程。

答:$L=\frac{1}{2}\dot{q}^2\exp(\gamma t)$

11.5 力学系统的微分方程为

$$\sum_{k=1}^{n}c_{sk}(t)\ddot{q}_k+\sum_{k=1}^{n}\dot{c}_{sk}(t)\dot{q}_k+\sum_{k=1}^{n}a_{sk}(t)q_k=0\qquad(s=1,2,\cdots,n)$$

其中 $a_{sk}=a_{ks}$,$c_{sk}=c_{ks}$,试将其写成 Lagrange 形式。

答:$L=\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}c_{sk}(t)\dot{q}_s\dot{q}_k-\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{sk}(t)q_sq_k$

参考文献

[1]Synge JL. Classical Dynamics[M]. Berlin:Springer-Verlag,1960.

[2]Mei FX. Parametric equations of monholonomic non conservative systems in the event space and the method of their integration[J]. Acta Mech Sin, 1990,6(2):160-168.

[3]Румянцев ВВ. К Динамике Лагранжевых реономных систем со связями[J]. ПММ, 1984,48(4):540-550.

[4]梅凤翔. 非完整系统力学基础[M]. 北京:北京工业学院出版社,1985.

[5]梅凤翔,刘端,罗勇. 高等分析力学[M]. 北京:北京理工大学出版社,1991.

[6]Appell P. Traité de Mécanique Rationnelle[M]. TII, Sixième Édition. Paris: Gauthier-Villars,1953.

[7]Румянцев ВВ. Труды IV Всесоюзного Сьезда по Теоретической и Прикладной Механики[M]. Киев: Наукова Думка,1978.

[8]梅凤翔. 关于有约束的受迫运动的控制问题[J]. 北京工业学院学报,1988, 8(4):17-23.

[9]Мартыненко ЮГ. Аналитическая Динамика Злектромеханических Систем[M]. Москва: МЗИ,1984.

[10]Галиуллйн АС, ГаФаров ГГ, Малайшка РП, Хван АМ. Аналитическая Динамика Систем Гельмгольца, Биркгофа, Намбу[M]. Москва: УФН,1997.

[11]Santilli RM. Foundations of Theoretical Mechanics I [M]. New York: Springer-Verlag,1978.

[12]梅凤翔,刘桂林. 分析力学基础[M]. 西安:西安交通大学出版社,1987.

12

Hamilton 方程

本章讨论 Hamilton 方程，包括 Legendre 变换与正则方程、正则方程的经典积分与降阶法、正则方程的逆变型与协变型等。

§12.1 Legendre 变换与正则方程

本节讨论 Legendre 变换、Hamilton 正则方程，研究正则方程的意义以及关于正则方程的各种推导等。

12.1.1 Legendre 变换

变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的函数 $\Phi(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，是连续的且对所有变量有连续一阶和二阶偏导数。称 Φ 为**母函数**，借助它可将旧变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 变换为新变量

$$y_s = \frac{\partial \Phi}{\partial x_s} \qquad (s=1,2,\cdots,n) \tag{12.1.1}$$

函数组 y_s 的 **Jacobi 行列式**称为 Φ 的 **Hess 行列式**，记作 $H(\Phi)$，其元素为 Φ 对 x_k 的二阶偏导数

$$H(\Phi) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2 \partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial x_n \partial x_1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial x_n} & \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2 \partial x_n} & \cdots & \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial x_n{}^2} \end{vmatrix} \tag{12.1.2}$$

由方程组(12.1.1)，可在 Hess 行列式不等于零的区域解出旧变量，得到旧变量用新变量表示的逆变换

$$x_s = x_s(y_1, y_2, \cdots, y_n) \qquad (s=1,2,\cdots,n) \tag{12.1.3}$$

这个变换可以写成形式(12.1.1)。为此，引入新变量的母函数 $\Psi(y_1, y_2, \cdots, y_n)$，有

$$\Psi(y_1,y_2,\cdots,y_n)=\sum_{k=1}^{n}x_ky_k-\Phi(x_1,x_2,\cdots,x_n) \qquad (12.1.4)$$

其中旧变量 x_k 用式(12.1.3)替代。求 Ψ 对 y_s 的偏导数,得

$$\frac{\partial\Psi}{\partial y_s}=x_s+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial x_k}{\partial y_s}y_k-\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\Phi}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial y_s}$$

利用式(12.1.1),则有

$$x_s=\frac{\partial\Psi}{\partial y_s} \qquad (s=1,2,\cdots,n) \qquad (12.1.5)$$

关系(12.1.1)和(12.1.5)确定的正变换和逆变换,组成 **Legendre 变换**[1]。

特别地,如果母函数 Φ 是二次型

$$\Phi=\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{sk}x_sx_k \qquad (12.1.6)$$

于是

$$H(\Phi)=|a_{sk}| \qquad (12.1.7)$$

如果矩阵(a_{sk})非奇异,即 $\det(a_{sk})\neq 0$,那么由线性方程组

$$y_s=\frac{\partial\Phi}{\partial x_s}=\sum_{k=1}^{n}b_{sk}x_k \qquad (s=1,2,\cdots,n) \qquad (12.1.8)$$

可解出旧变量

$$x_s=\sum_{k=1}^{n}b_{sk}y_k \qquad (s=1,2,\cdots,n) \qquad (12.1.9)$$

由式(12.1.1),(12.1.4)得到逆变换的母函数

$$\Psi=\sum_{k=1}^{n}x_ky_k-\Phi=\Phi \qquad (12.1.10)$$

而 Φ 以新变量表示。这样,就有

$$\Psi=\Phi=\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n}x_sy_s=\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}b_{sk}y_sy_k \qquad (12.1.11)$$

12.1.2 Hamilton 正则方程

具有 n 个自由度的完整系统的 Lagrange 方程是 n 个二阶常微分方程。可以用许多办法将这个方程组用 $2n$ 个一阶方程来替代。例如,取 $\dot{q}_s=r_s$,那么 $\dot{r}_s$ 可用 q_k,r_k 表示出。但是,这样做并没有带来方便。

作为一阶方程组的 $2n$ 个变量,可取广义坐标 $q_s(s=1,2,\cdots,n)$以及广义速度的线性函数——广义动量 $p_s(s=1,2,\cdots,n)$。广义动量定义为

$$p_s=\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_s} \qquad (s=1,2,\cdots,n) \qquad (12.1.12)$$

当广义力有势时,在这样选取变量下,运动方程可写成非常对称又非常紧凑的形式,称为正则形式。动能 T 作为广义速度的函数,起着由旧变量 $\dot{q}_s$ 向新变量 p_k 过渡的母函数的作用。它的 Hess 行列式是二次型 T_2 的系数矩阵行列式。

这个行列式不为零，因此可由式(12.1.12)解出所有广义速度

$$\dot{q}_s=\dot{q}_s(q_k,p_k,t) \qquad (s,k=1,2,\cdots,n) \tag{12.1.13}$$

它相对广义动量是线性的。这 n 个一阶方程是正则方程的第一组。

Legendre 变换可将式(12.1.13)写成另一种形式。据式(12.1.4)，逆变换的母函数为

$$\Psi=\sum_{s=1}^{n}p_s\dot{q}_s-T=\Psi(q_k,p_k,t) \tag{12.1.14}$$

其中广义速度用广义动量表示出。文献[2]指出，式(12.1.14)由法国数学家 Poisson SD(1781—1840)于 1809 年给出的。文献[3]将式(12.1.14)称为 Poisson变换。按式(12.1.5)，得

$$\dot{q}_s=\frac{\partial\Psi}{\partial p_s} \qquad (s=1,2,\cdots,n) \tag{12.1.15}$$

利用它可组成运动方程的第二组。实际上，注意到

$$\frac{\partial\Psi}{\partial q_s}=-\frac{\partial T}{\partial q_s} \tag{12.1.16}$$

利用 Lagrange 方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_s}-\frac{\partial T}{\partial q_s}=Q_s \qquad (s=1,2,\cdots,n) \tag{12.1.17}$$

以及关系(12.1.12)和(12.1.16)，得到

$$\dot{p}_s=-\frac{\partial\Psi}{\partial q_s}+Q_s \qquad (s=1,2,\cdots,n) \tag{12.1.18}$$

这是对变量 q_s，p_s 的正则方程的第二组。当广义力有势时，它可过渡到 Hamilton方程的第二组。定义 **Hamilton 函数**

$$H(q_k,p_k,t)=\Psi+V=\sum_{s=1}^{n}p_s\dot{q}_s-T+V$$

或

$$H=\sum_{s=1}^{n}p_s\dot{q}_s-L=\Psi+V \tag{12.1.19}$$

势能不依赖于广义动量，代替式(12.1.15)和式(12.1.18)，有

$$\dot{q}_s=\frac{\partial H}{\partial p_s},\dot{p}_s=-\frac{\partial H}{\partial q_s} \qquad (s=1,2,\cdots,n) \tag{12.1.20}$$

这就是 Hamilton 正则方程，由 Hamilton WR(1805—1865)于 1834 年给出。满足 Hamilton 正则方程的变量 q_s 和 p_s 称为**正则变量**。

对有非势力情形，正则方程有形式

$$\dot{q}_s=\frac{\partial H}{\partial p_s},\dot{p}_s=-\frac{\partial H}{\partial q_s}+\widetilde{Q}_s \qquad (s=1,2,\cdots,n) \tag{12.1.21}$$

其中位形空间中的广义力 Q_s 用正则变量表示为 $\widetilde{Q}_s$

$$\widetilde{Q}_s(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},t)=Q_s(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},t),t) \tag{12.1.22}$$

12.1.3 研究正则方程的意义

前面导出的系统运动方程的正则形式(12.1.20)是 $2n$ 个一阶微分方程组成的方程组,在解决实际问题时和 Lagrange 方程是等价的。但是,首先,正则方程在形式上比 Lagrange 方程要简单,结构上又对称,在解决许多复杂的力学问题时,如天体力学、振动问题等,更便于做普遍讨论。其次,与正则方程相联系所引进的新概念,如正则变量,在力学和物理中(如统计物理、量子力学等)有很多用途。第三,由正则方程建立了一整套积分方法,如 Poisson 方法、Hamilton-Jacobi方法等。最后,正则方程促进了辛几何、广义 Hamilton 力学、Birkhoff 力学的发展。

利用正则方程求解运动的步骤大致如下:

1)根据所研究的力学系统的物理条件和特点,分析其自由度,选取适当的广义坐标;

2)写出系统的动能 T 和势能 V 的表达式;

3)求广义动量

$$p_s=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}$$

并反解出

$$\dot{q}_s=f_s(q_k,p_k,t) \qquad (k,s=1,2,\cdots,n)$$

4)求出 Hamilton 函数

$$H(q_s,p_s,t)=\left(\sum_{s=1}^{n} p_s\dot{q}_s-L\right)\bigg|_{\dot{q}_s=f_s}$$

5)将 H 代入方程(12.1.20),得到 $2n$ 个一阶方程,积分之,解出

$$q_s=q_s(t,C_\nu),p_s=p_s(t,C_\nu) \qquad (s=1,2,\cdots,n;\nu=1,2,\cdots,2n)$$

6)分析结果的物理意义。

12.1.4 关于正则方程的导出

1)Lagrange 著作的附录

Bertrand MJ 在 Lagrange 著作的附录Ⅵ之Ⅱ中的论述如下[4]。

“假设约束不依赖于时间,系统所受力可用同一函数的偏导数给出,即活力原理可应用于所论系统。

取运动微分方程

$$(1)\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial T}{\partial q_1'}-\dfrac{\partial T}{\partial q_1}=Q_1\\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial T}{\partial q_2'}-\dfrac{\partial T}{\partial q_2}=Q_2\\ \cdots\\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial T}{\partial q_k'}-\dfrac{\partial T}{\partial q_k}=Q_k\end{cases}$$

这些方程是二阶的，但是将由方程

$$(2)\frac{\mathrm{d}q_1}{\mathrm{d}t}=q_1',\frac{\mathrm{d}q_2}{\mathrm{d}t}=q_2',\cdots,\frac{\mathrm{d}q_k}{\mathrm{d}t}=q_k'$$

确定的 $q_1',q_2',\cdots,q_k'$ 作为 k 个新的未知量，就可将其表示为一阶的，这样就有 $2k$ 个一阶方程。

Poisson 想变换方程组(1)，(2)，用新的未知量 $\partial T/\partial q_1',\partial T/\partial q_2',\cdots,\partial T/\partial q_k'$ 代替未知量 $q_1',q_2',\cdots,q_k'$，但是他没有完全地详述他的变换运算，而 Hamilton 第一个给出了这些新变量下的非常简单的方程。

取

$$\frac{\partial T}{\partial q_1'}=p_1,\frac{\partial T}{\partial q_2'}=p_2,\cdots,\frac{\partial T}{\partial q_k'}=p_k$$

则方程(1)成为

$$\frac{\mathrm{d}p_1}{\mathrm{d}t}-\frac{\partial T}{\partial q_1}=Q_1,\frac{\mathrm{d}p_2}{\mathrm{d}t}-\frac{\partial T}{\partial q_2}=Q_2,\cdots,\frac{\mathrm{d}p_k}{\mathrm{d}t}-\frac{\partial T}{\partial q_k}=Q_k$$

但是，用 $p_1,p_2,\cdots,p_k$ 代替 $q_1',q_2',\cdots,q_k'$，需要变换方程的第二项。显然，T 是 $q_1,q_2,\cdots,q_k,q_1',q_2',\cdots,q_k'$ 的函数，不是 $q_1,q_2,\cdots,q_k,p_1,p_2,\cdots,p_k$ 的函数。

T 是 $q_1',q_2',\cdots,q_k'$ 的二次齐次函数，即有

$$2T=q_1'\frac{\partial T}{\partial q_1'}+q_2'\frac{\partial T}{\partial q_2'}+\cdots+q_k'\frac{\partial T}{\partial q_k'}$$

这可写成

$$(3)\quad T=q_1'\frac{\partial T}{\partial q_1'}+q_2'\frac{\partial T}{\partial q_2'}+\cdots+q_k'\frac{\partial T}{\partial q_k'}-T=q_1'p_1+q_2'p_2+\cdots+q_k'p_k-T$$

两端对所有变量同时取变分，得

$$(4)\quad \delta T=q_1'\delta p_1+q_2'\delta p_2+\cdots+q_k'\delta p_k-\frac{\partial T}{\partial q_1}\delta q_1-\frac{\partial T}{\partial q_2}\delta p_2-\cdots-\frac{\partial T}{\partial q_k}\delta q_k$$

(令人惊奇的是，在第二项中，项 $p_m\delta q_m'$ 与 $-\dfrac{\partial T}{\partial q_m'}\delta q_m'$ 抵消了。)

然而，考虑到 T 为 $p_1,p_2,\cdots,p_k,q_1,q_2,\cdots,q_k$ 的函数，由方程(4)显然导出

$$(5)\quad \frac{\partial T}{\partial p_1}=q_1',\frac{\partial T}{\partial p_2}=q_2',\cdots,\frac{\partial T}{\partial p_k}=q_k'$$

(6) $\frac{\partial T}{\partial q_1}=-\frac{\partial T}{\partial q_1},\frac{\partial T}{\partial q_2}=-\frac{\partial T}{\partial q_2},\cdots,\frac{\partial T}{\partial q_k}=-\frac{\partial T}{\partial q_k}$

方程(6)给出形式

(A) $\frac{\mathrm{d}p_1}{\mathrm{d}t}=Q_1-\frac{\partial T}{\partial q_1},\frac{\mathrm{d}p_2}{\mathrm{d}t}=Q_2-\frac{\partial T}{\partial q_2},\cdots,\frac{\mathrm{d}p_k}{\mathrm{d}t}=Q_k-\frac{\partial T}{\partial q_k}$

而如将它们联合关系(5)

(B) $\frac{\partial T}{\partial p_1}=\frac{\mathrm{d}q_1}{\mathrm{d}t},\frac{\partial T}{\partial p_2}=\frac{\mathrm{d}q_2}{\mathrm{d}t},\cdots,\frac{\partial T}{\partial p_k}=\frac{\mathrm{d}q_k}{\mathrm{d}t}$

就有关于未知量 $p_1,p_2,\cdots,p_k,q_1,q_2,\cdots,q_k$ 的 $2k$ 个一阶方程。为简化这些方程,注意到加在点 x_i,y_i,z_i 上的力的分量 X_i,Y_i,Z_i,据假设,是同一函数 U 的偏导数,有

$$X_i=\frac{\partial U}{\partial x_i},Y_i=\frac{\partial U}{\partial y_i},Z_i=\frac{\partial U}{\partial z_i}$$

得到

$$Q_m=\frac{\partial U}{\partial q_m}$$

如在方程(A)中 $Q_1,Q_2,\cdots,Q_k$ 用这个公式给出,而后取 $U-T=H$,这些方程成为

(C) $\frac{\mathrm{d}p_1}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial H}{\partial q_1},\frac{\mathrm{d}p_2}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial H}{\partial q_2},\cdots,\frac{\mathrm{d}p_k}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial H}{\partial q_k}$

注意到 U 不含 $p_1,p_2,\cdots,p_k$,则有

$$\frac{\partial H}{\partial p_i}=-\frac{\partial T}{\partial p_i}$$

而方程(B)可表示为

(D) $\frac{\mathrm{d}q_1}{\mathrm{d}t}=-\frac{\partial H}{\partial p_1},\frac{\mathrm{d}q_2}{\mathrm{d}t}=-\frac{\partial H}{\partial p_2},\cdots,\frac{\mathrm{d}q_k}{\mathrm{d}t}=-\frac{\partial H}{\partial p_k}$

系统(C)和(D)在最简形式下,为力学问题的方程,而活力原理可应用于这个问题。”

上面的文字出现在 Lagrange 著作 1853 年第三版和 1888 年第四版的附录中,其中函数 H 与通常的 Hamilton 函数差一符号。

2)Appell 的论述

在 Appell 著作第二卷第 25 章第 471 节中有如下表述[3]:

“Lagrange 方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_\nu}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_\nu}=Q_\nu,q'_\nu=\frac{\mathrm{d}q_\nu}{\mathrm{d}t}\qquad(\nu=1,2,\cdots,k)\tag{1}$$

如 Poisson 那样,取量

$$p_1=\frac{\partial T}{\partial q'_1},p_2=\frac{\partial T}{\partial q'_2},\cdots,p_k=\frac{\partial T}{\partial q'_k}\tag{2}$$

代替 $q'_1, q'_2, \cdots, q'_k$ 作为新变量。方程(2)对 $q'_1, \cdots, q'_k$ 是线性的，可以解出以得到对 $q_1, \cdots, q_k$ 的线性表达式。来看一下，如果作这样的变量变换，方程(1)变成了什么。

变量 t 取为常数，给变量 q 和 p 任意无限小独立位移 δq 和 δp。此时所有 q'得到位移 $\delta q'$，它们由关系(2)确定，假设对 q'解出。

依赖于变量 q 和 q'的函数 T，此时得到改变

$$\delta T = \sum_{\nu} \frac{\partial T}{\partial q_\nu}\delta q_\nu + \sum_{\nu} \frac{\partial T}{\partial q'_\nu}\delta q'_\nu$$

或据方程(2)，有

$$\delta T = \sum \frac{\partial T}{\partial q_\nu} + \sum p_2 \delta q'_\nu$$

令 $K = \sum p_2 q'_\nu - T$，可写成形式

$$\delta K = -\sum \frac{\partial T}{\partial q_\nu}\delta q_2 + \sum q'_\nu \delta p_2$$

因此得到对微分 δK 的第一个表达式。另一方面，K 用新一组变量 q_ν 和 p_ν 表示，当 t 仍为常数时，这些变量得到任意变分 δq_ν 和 δp_ν，此时有

$$\delta K = \sum \frac{\partial K}{\partial q_\nu}\delta q_\nu + \sum \frac{\partial K}{\partial p_\nu}\delta p_\nu$$

对 δK 的这个新表达式应恒等于前面的表达式，无论 δq 和 δp 怎样。因此，有

$$-\frac{\partial T}{\partial q_\nu} = \frac{\partial K}{\partial q_\nu}, q'_\nu = \frac{\partial K}{\partial p_\nu} \qquad (\nu = 1, 2, \cdots, k) \tag{3}$$

在这些方程中，T 的偏导数是 T 由 q 和 q'表示的，而 K 的偏导数是 K 用 q 和 p 表示的。据关系(3)，Lagrange 方程(1)有形式

$$\frac{\mathrm{d}p_\nu}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial K}{\partial q_\nu} = Q_\nu, \frac{dq_\nu}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial K}{\partial p_\nu} \qquad (\nu = 1, 2, \cdots, k) \tag{4}$$

这些一阶方程可确定变量 $p_1, p_2, \cdots, p_k, q_1, q_2, \cdots, q_k$ 为时间的函数。

……

当 $Q_\nu = \partial U / \partial q_\nu$，取

$$K - U = H \tag{5}$$

得到

$$\frac{\partial K}{\partial p_\nu} = \frac{\partial H}{\partial p_\nu}, \frac{\partial K}{\partial q_\nu} - Q_\nu = \frac{\partial H}{\partial q_\nu}$$

而方程(4)取形式

$$\frac{dq_\nu}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H}{\partial p_\nu}, \frac{\mathrm{d}p_\nu}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial H}{\partial q_\nu} \qquad (\nu = 1, 2, \cdots, k) \tag{6}$$

这就是 Hamilton 给出的正则运动方程。”[3]

Appell 著作中给出的式(3)第一式，与 Bertrand 给出的式(6)是一样的。

Appell 认为 δq 与 δp 是彼此独立的。

3)Whittaker 的论述

Whittaker 在其著作 109 节"运动方程的 Hamilton 形式"中有如下表述[2]：

"令$(q_1, q_2, \cdots, q_n)$是坐标，而 $L(q_1, q_2, \cdots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots, \dot{q}_n, t)$是系统的动势，那么 Lagrange 形式的运动方程是

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_r}=0 \qquad (r=1,2,\cdots,n)$$

令

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}=p_r \qquad (r=1,2,\cdots,n)$$

那么

$$\dot{p}_r=\frac{\partial L}{\partial q_r} \qquad (r=1,2,\cdots,n)$$

由前面一些方程组，可将一组量$(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots, \dot{q}_n)$或$(p_1, p_2, \cdots, p_n)$当作另一组的函数。

如果 δ 记作变量$(q_1, q_2, \cdots, q_n, p_1, p_2, \cdots, p_n)$或$(q_1, q_2, \cdots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots, \dot{q}_n)$的任意函数由自变量小改变引起的增量，有

$$\begin{aligned}\delta L &= \sum_{r=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial q_r}\delta q_r+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}\delta \dot{q}_r\right)=\sum_{r=1}^{n}(\dot{p}_r\delta q_r+p_r\delta \dot{q}_r)\\ &=\delta\sum_{r=1}^{n}p_r\dot{q}_r+\sum_{r=1}^{n}(\dot{p}_r\delta q_r-\dot{q}_r\delta p_r)\end{aligned}$$

或

$$\delta\left(\sum_{r=1}^{n}p_r\dot{q}_r-L\right)=\sum_{r=1}^{n}(\dot{q}_r\delta p_r-\dot{p}_r\delta q_r)$$

因此，如果量 $\sum_{r=1}^{n}p_r\dot{q}_r-L$ 用$(q_1, q_2, \cdots, q_n, p_1, p_2, \cdots, p_n, t)$表示出并记作 H，则有

$$\delta H=\sum_{r=1}^{n}(\dot{q}_r\delta p_r-\dot{p}_r\delta q_r) \tag{1}$$

或者

$$\frac{\mathrm{d}q_r}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial H}{\partial p_r}, \qquad \frac{\mathrm{d}q_r}{\mathrm{d}t}=-\frac{\partial H}{\partial p_r} \qquad (r=1,2,\cdots,n) \tag{2}$$

动力系统的运动用这些方程表示，就说它们是 Hamilton 形式或正则形式。"[2]

Whittaker 认为 δq 与 δp 是彼此独立的。

4)由 Hamilton 原理导出

Hamilton 原理

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}L(t,q,\dot{q})\mathrm{d}t=0 \tag{12.1.23}$$

可在正则变量下表示为

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}\left(\sum_{s=1}^{n}p_s\dot{q}_s-H\right)\mathrm{d}t=0 \tag{12.1.24}$$

它可变换为

$$\int_{t_0}^{t_1}\sum_{s=1}^{n}\left\{\left(-\frac{\partial H}{\partial q_s}-\dot{p}_s\right)\delta q_s+\left(-\frac{\partial H}{\partial p_s}+\dot{q}_s\right)\delta p_s\right\}\mathrm{d}t=0 \tag{12.1.25}$$

由此怎样导出正则方程，就出现了分歧。有人认为式(12.1.25)中 δq_s 与 δp_s 是彼此独立的，因而可导出正则方程[5]；有人认为 δq_s 与 δp_s 不是彼此独立的，例如，吴大猷先生指出，"δp_s 之系数等于零者，盖系由变换而来"[6]；还有人认为"可将坐标和动量看作独立变分的变量，……原理从形式上推导出哈密顿方程。"[7]

12.1.5 应用举例

例 1 已知二自由度系统的 Lagrange 函数为

$$L=\frac{5}{2}\dot{q}_1^2+\frac{1}{2}\dot{q}_2^2+\dot{q}_1\dot{q}_2\cos(q_1-q_2)+3\cos q_1+\cos q_2$$

试求系统的 Hamilton 函数 H。

解：首先，求广义动量，有

$$p_1=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}=5\dot{q}_1+\dot{q}_2\cos(q_1-q_2)$$

$$p_2=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2}=\dot{q}_2+\dot{q}_1\cos(q_1-q_2)$$

其次，由此解出广义速度，有

$$\dot{q}_1=\frac{p_1-p_2\cos(q_1-q_2)}{5-\cos^2(q_1-q_2)},\quad \dot{q}_2=\frac{5p_2-p_1\cos(q_1-q_2)}{5-\cos^2(q_1-q_2)}$$

最后，将所得 $\dot{q}_1,\dot{q}_2$ 代入 H 中，有

$$H=p_1\dot{q}_1+p_2\dot{q}_2-\left\{\frac{5}{2}\dot{q}_1^2+\frac{1}{2}\dot{q}_2^2+\dot{q}_1\dot{q}_2\cos(q_1-q_2)+3\cos q_1+\cos q_2\right\}$$

$$=\frac{p_1^2+5p_2^2-2p_1p_2\cos(q_1-q_2)}{2[5-\cos^2(q_1-q_2)]}-3\cos q_1-\cos q_2$$

例 2 已知二自由度系统的 Hamilton 函数为

$$H=\frac{1}{2}\left(p_1^2+\frac{p_2^2}{\sin^2 q_1}\right)-a\cos q_1 \qquad (a\ 为常数)$$

试列写系统的 Lagrange 函数 L。

解：首先，利用正则方程求 $\dot{q}_1,\dot{q}_2$，有

$$\dot{q}_1=\frac{\partial H}{\partial p_1}=p_1,\dot{q}_2=\frac{\partial H}{\partial p_2}=\frac{p_2}{\sin^2 q_1}$$

其次，由此反解出广义动量，有

$$p_1=\dot{q}_1,p_2=\dot{q}_2\sin^2 q_1$$

最后，由 H 变换到 L

$$L=p_1\dot{q}_1+p_2\dot{q}_2-H=\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2\sin^2 q_1-\frac{1}{2}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2\sin^2 q_1)+a\cos q_1$$

$$=\frac{1}{2}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2\sin^2 q_1)+a\cos q_1$$

例 3 Kepler-Newton 问题。

质量为 m 的质点，受到质量为 M 的中心吸引，在万有引力场中运动。试导出点运动的正则方程，认为引力中心不动。

解：设点的坐标为(x,y,z)，坐标原点 O 为引力中心。取球坐标(r,φ,ψ)为广义坐标，其中 r 为点距引力中心的距离，φ 为从赤道计起的纬度，ψ 为经度，如图 12.1 所示。点的动能在球坐标中为

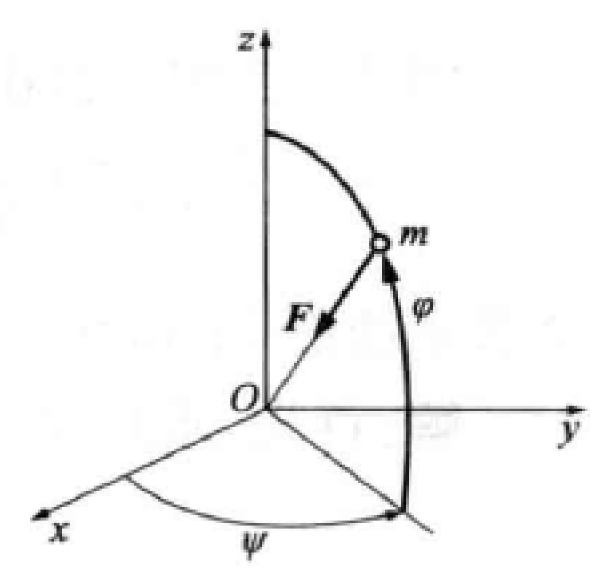


图 12.1

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2+r^2\dot{\psi}^2\cos^2\varphi)$$

下面计算势能 V。按牛顿引力定律，点受吸引力

$$\boldsymbol{F}=-\frac{\gamma Mm}{r^2}\boldsymbol{r}_0$$

其中 γ 为万有引力常数；$\boldsymbol{r}_0$ 为点的矢径 $\boldsymbol{r}$ 的单位矢量。用 μ 表记 $M\gamma$。现在求 $\boldsymbol{F}$ 的力函数。因力的元功仅在径向位移上异于零，故有

$$\mathrm{d}W_F=F_r\mathrm{d}r=-\frac{\mu m}{r^2}\mathrm{d}r$$

而力函数为 U

$$\mathrm{d}U=-\frac{\mu m}{r^2}\mathrm{d}r$$

$$U=\frac{\mu m}{r}+C$$

设 $r\to\infty$ 时，$U\to 0$，则 $C=0$。于是

$$U=\frac{\mu m}{r}$$

而势能为

$$V=-U=-\frac{\mu m}{r}$$

下面计算广义动量，有

$$p_r=\frac{\partial T}{\partial \dot{r}}=m\dot{r}$$

$$p_\varphi=\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}=mr^2\dot{\varphi}$$

$$p_\psi=\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}}=mr^2\dot{\psi}\cos^2\varphi$$

解出广义速度，有

$$\dot{r}=\frac{p_r}{m},\dot{\varphi}=\frac{p_\varphi}{mr^2},\dot{\psi}=\frac{p_\psi}{mr^2\cos^2\varphi}$$

Hamilton 函数为

$$H=\frac{1}{2m}\left(p_r^2+\frac{1}{r^2}p_\varphi^2+\frac{1}{r^2\cos^2\varphi}p_\psi^2\right)-\frac{\mu m}{r}$$

质点的正则方程为

$$\dot{r}=\frac{\partial H}{\partial p_r},\dot{\varphi}=\frac{\partial H}{\partial p_\varphi},\dot{\psi}=\frac{\partial H}{\partial p_\psi}$$

$$\dot{p}_r=-\frac{\partial H}{\partial r},\dot{p}_\varphi=\frac{\partial H}{\partial \varphi},\dot{p}_\psi=-\frac{\partial H}{\partial \psi}$$

代入 H 后得

$$\dot{r}=\frac{1}{m}p_r,\dot{p}_r=\frac{1}{mr^3}p_\varphi^2+\frac{1}{mr^3\cos^2\varphi}p_\psi^2-\frac{\mu m}{r^2}$$

$$\dot{\varphi}=\frac{1}{mr^2}p_\varphi,\dot{p}_\varphi=-\frac{\sin\varphi}{mr^3\cos^3\varphi}p_\psi^2$$

$$\dot{\psi}=\frac{1}{mr^2\cos^2\varphi}p_\psi,\dot{p}_\psi=0$$

§12.2 正则方程的经典积分与降阶法

正则方程的经典积分为能量积分和循环积分，利用这两类积分可降阶正则方程。

12.2.1 正则方程的能量积分和循环积分

如果 Hamilton 函数 H 不显含时间 t，则 H 是正则方程的积分。实际上

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}=\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial H}{\partial q_s}\dot{q}_s+\frac{\partial H}{\partial p_s}\dot{p}_s\right)+\frac{\partial H}{\partial t} \tag{12.2.1}$$

将 Hamilton 方程(12.1.20)代入上式,得到

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial H}{\partial t} \tag{12.2.2}$$

因此,当 H 不显含 t 时,有

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}=0$$

积分得

$$H=h=\text{const.} \tag{12.2.3}$$

Hamilton 函数 H 代表能量,它表示为

$$\begin{aligned}H&=\sum_{s=1}^{n}p_s\dot{q}_s-T+V=\sum_{s=1}^{n}\dot{q}_s\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}-T+V\\&=2T_2+T_1-(T_2+T_1+T_0)+V\\&=T_2-T_0+V\end{aligned} \tag{12.2.4}$$

其中 T_2 为动能中广义速度的二次形;T_1 为广义速度的一次形;T_0 为不含广义速度的项。式(12.2.4)代表广义能量。特别地,当 $T_0=0$ 时,式(12.2.4)就是总机械能

$$H=T+V \tag{12.2.5}$$

如果坐标 $q_i(i=1,2,\cdots,l,l\leqslant n)$不出现于 Hamilton 函数 H 中,即

$$\frac{\partial H}{\partial q_i}=0\qquad(i=1,2,\cdots,l) \tag{12.2.6}$$

则称 $q_i(i=1,2,\cdots,l)$为循环坐标。此时,由正则方程(12.1.20)第二组得到

$$\dot{p}_i=0$$

积分得

$$p_i=\beta_i=\text{const.}\qquad(i=1,2,\cdots,l) \tag{12.2.7}$$

这就是循环积分,它代表广义动量守恒。此时,后面$(n-l)$个方程成为

$$\dot{q}_r=\frac{\partial H}{\partial p_r},\dot{p}_r=-\frac{\partial H}{\partial q_r}\qquad(r=l+1,\cdots,n) \tag{12.2.8}$$

前面 l 个方程为

$$\dot{q}_i=\frac{\partial H}{\partial p_i}\qquad(i=1,2,\cdots,l) \tag{12.2.9}$$

积分得

$$q_i=\int\frac{\partial H}{\partial p_i}\mathrm{d}t \tag{12.2.10}$$

如能由方程(12.2.8)求得 q_r,p_r,将其代入式(12.2.10),便可求得 q_i,而 p_i 由式(12.2.7)给出。

12.2.2 利用能量积分的 Whittaker 降阶法

考虑 n 个自由度的系统，其 Hamilton 函数 H 不显含时间 t，则系统存在能量积分，记作

$$H+h=0 \tag{12.2.11}$$

其中 h 为一常数。设由方程(12.2.11)可解出变量 p_1，写成

$$K(p_2,p_3,\cdots,p_n,q_1,q_2,\cdots,q_n,h)+p_1=0 \tag{12.2.12}$$

将式(12.2.12)代入式(12.2.11)，则式(12.2.11)成为恒等式，对其求偏导数，得

$$\frac{\partial H}{\partial p_r}+\frac{\partial H}{\partial p_1}\left(-\frac{\partial K}{\partial p_r}\right)=0$$

$$\frac{\partial H}{\partial q_r}+\frac{\partial H}{\partial p_1}\left(-\frac{\partial K}{\partial q_r}\right)=0 \qquad (r=2,3,\cdots,n)$$

代入 Hamilton 方程，有

$$\dot{q}_r+\dot{q}_1\left(-\frac{\partial K}{\partial p_r}\right)=0$$

$$-\dot{p}_r+\dot{q}_1\left(-\frac{\partial K}{\partial q_r}\right)=0$$

因此有

$$\frac{\mathrm{d}q_r}{\mathrm{d}q_1}=\frac{\partial K}{\partial p_r},\frac{\mathrm{d}p_r}{\mathrm{d}q_1}=-\frac{\partial K}{\partial q_r} \qquad (r=2,3,\cdots,n) \tag{12.2.13}$$

这就是 Whittaker 方程[2]。Whittaker 方程(12.2.13)保持方程的正则形式，并且少了两个方程。

12.2.3 应用举例

例 二自由度系统的 Hamilton 函数为

$$H=\frac{1}{2}p_2^2+\frac{1}{2q_2^2}p_1^2-\frac{\mu}{2q_2^2} \qquad (\mu=\text{const.})$$

试用 Whittaker 方法将其降阶。

解：能量积分表示为

$$H=-h$$

由此解出

$$K=-p_1=-(\mu-q_2^2p_2^2-2hq_2^2)^{\frac{1}{2}}$$

Whittaker 方程(12.2.13)给出为

$$\frac{\mathrm{d}q_2}{\mathrm{d}q_1}=\frac{\partial K}{\partial p_2},\frac{\mathrm{d}p_2}{\mathrm{d}q_1}=-\frac{\partial K}{\partial q_2}$$

因 K 不含 q_1，故有循环积分 $p_1=\text{const.}$，即 $K=\text{const.}$，表示为 $K=-k$，由此解出

$$p_2=\left(\frac{\mu-k^2}{q_2^2}-2h\right)^{\frac{1}{2}}\equiv -l$$

系统归为一个方程

$$\frac{\mathrm{d}q_1}{\mathrm{d}q_2}=\frac{\partial l}{\partial k}=\frac{k}{q_2^2}\left(\frac{\mu-k^2}{q_2^2}-2h\right)^{-\frac{1}{2}}$$

积分得

$$q_2=(k^2-\mu)^{\frac{1}{2}}(2h)^{-\frac{1}{2}}\sec\left\{\left(1-\frac{\mu}{k^2}\right)^{\frac{1}{2}}(q_1+\varepsilon)\right\}$$

这里假设 $\mu<k^2$。

§12.3 正则方程的逆变型和协变型

将正则方程(12.1.20)表示为逆变型和协变型,以便于讨论其代数结构和 Hamilton 力学逆问题。

12.3.1 正则方程的逆变型

令

$$a^\mu=\begin{cases}q_\mu(\mu=1,2,\cdots,n)\\ p_{\mu-n}(\mu=n+1,n+2,\cdots,2n)\end{cases}\tag{12.3.1}$$

$$(\omega^{\mu\nu})=\begin{Bmatrix}0_{n\times n} & 1_{n\times n}\\ -1_{n\times n} & 0_{n\times n}\end{Bmatrix}\tag{12.3.2}$$

则正则方程(12.1.20)可表示为

$$\dot{a}^\mu-\sum_{\nu=1}^{2n}\omega^{\mu\nu}\frac{\partial H}{\partial a^\nu}=0\qquad(\mu=1,2,\cdots,2n)\tag{12.3.3}$$

这就是正则方程的**逆变型**。

逆变张量 $\omega^{\mu\nu}$ 称为基本 Lie 张量(或称基本协辛张量),因为它表征 Lie 代数积的基本实现,根据某函数 $A(a)$ 的时间导数结构构成常规 Poisson 括号[8]

$$\begin{aligned}\dot{A}(\boldsymbol{a})&=\sum_{\mu=1}^{2n}\frac{\partial A}{\partial a^\mu}\dot{a}^\mu=\sum_{\mu=1}^{2n}\sum_{\nu=1}^{2n}\frac{\partial A}{\partial a^\mu}\omega^{\mu\nu}\frac{\partial H}{\partial a^\nu}\\&=\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial A}{\partial q_s}\frac{\partial H}{\partial p_s}-\frac{\partial A}{\partial p_s}\frac{\partial H}{\partial q_s}\right)\overset{\text{def}}{=\!=}[A,H]\end{aligned}\tag{12.3.4}$$

12.3.2 正则方程的协变型

正则方程的**协变型**表示为

$$\sum_{\nu=1}^{2n}\omega_{\mu\nu}\dot{a}^\nu-\frac{\partial H(t,\boldsymbol{a})}{\partial a^\mu}=0\qquad(\mu=1,2,\cdots,2n)\tag{12.3.5}$$

其中

$$(\omega_{\mu\nu})=\begin{pmatrix}0_{n\times n} & -1_{n\times n}\\ 1_{n\times n} & 0_{n\times n}\end{pmatrix}\tag{12.3.6}$$

如果方程表示为

$$\sum_{\nu=1}^{2n} \omega_{\mu\nu}\dot{a}^{\nu} - \sigma_{\mu}(t,a) = 0 \qquad (\mu=1,2,\cdots,2n) \tag{12.3.7}$$

方程(12.3.7)为自伴随的充分必要条件为[8]

$$\frac{\partial \sigma_{\mu}}{\partial a^{\nu}} - \frac{\partial \sigma_{\nu}}{\partial a^{\mu}} = 0 \qquad (\mu=1,2,\cdots,2n) \tag{12.3.8}$$

因此，Hamilton 方程(12.3.5)总是自伴随的。

对满足条件(12.3.8)的方程组(12.3.7)，可由函数 σ_{μ} 来构造 Hamilton 函数，有[8]

$$H(t,\boldsymbol{a}) = \sum_{\mu=1}^{2n} a^{\mu} \int_0^1 \sigma_{\mu}(t,\tau\boldsymbol{a})\mathrm{d}\tau \tag{12.3.9}$$

如果条件(12.3.8)不满足，但将方程两端乘以因子函数 $h_{\mu\nu}(t,a)$ 后可使条件满足，那么仍可 Hamilton 化。将一阶方程组化成 Hamilton 方程的问题，称为 Hamilton 力学逆问题。同时，对方程组也可应用 §11.4 中的方法，先化成 Lagrange方程，然后再化成 Hamilton 方程。

12.3.3 应用举例

例 1 两个一阶方程为

$$\dot{x} = y(a+bx), \dot{y} = cx + \frac{1}{2}by^2$$

其中 a,b,c 为常数，试将其化成 Hamilton 方程。

解：令

$$a^1 = x, a^2 = y$$

则方程写成

$$\dot{a}^1 = a^2(a+ba^1), \dot{a}^2 = ca^1 + \frac{1}{2}b(a^2)^2$$

两端乘以

$$(\omega_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

得

$$-\dot{a}^2 = -ca^1 - \frac{1}{2}b(a^2)^2$$

$$\dot{a}^1 = -aa^2 - ba^1a^2$$

它是自伴随的。按式(12.3.9)计算 Hamilton 函数，得

$$H = a^1 \int_0^1 \left[-ca^1\tau - \frac{1}{2}b(a^2)^2\tau^2\right]\mathrm{d}\tau + a^2 \int_0^1 (-aa^2\tau - ba^1a^2\tau^2)\mathrm{d}\tau$$

$$=-\frac{1}{2}\{c(a^1)^2+ba^1(a^2)^2+a(a^2)^2\}$$

例 2 已知二阶方程为

$$\ddot{q}=2\dot{q}^2\cot q+\sin q\cos q$$

试将其 Hamilton 化[9]。

解:方程是非自伴随的,需将其变换为自伴随的。为此,将方程两端乘以待定乘子 $A(q)$,有

$$A(q)\ddot{q}-2A(q)\dot{q}^2\cot q-A(q)\sin q\cos q=0$$

自伴随条件(11.4.16)给出

$$-4A\dot{q}\cot q=\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}q}\dot{q}$$

由此得

$$A=\sin^{-4}q$$

于是有

$$\ddot{q}\sin^{-4}q-2\dot{q}^2\sin^{-5}q\cos q-\sin^{-3}q\cos q=0 \tag{a}$$

令

$$a^1=q, a^2=\dot{q}\sin^{-4}q$$

则有

$$\dot{a}^1=a^2\cos^4 a^1, \dot{a}^2=-2(a^2)^2\sin^3 a^1\cos a^1+\sin^{-3}a^1\cos a^1$$

重新排列为

$$-\dot{a}^2=2(a^2)^2\sin^3 a^1\cos a^1-\sin^{-3}a^1\cos a^1$$

$$\dot{a}^1=a^2\sin^4 a^1$$

按式(12.3.9)计算 Hamilton 函数,得

$$H=a^1\int_0^1[2(a^2\tau)^2\sin^3(a^1\tau)\cos(a^1\tau)-\sin^{-3}(a^1\tau)\cos(a^1\tau)]\mathrm{d}\tau+a^2\int_0^1(a^2\tau)\sin^4(a^1\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$=\frac{1}{2}(a^2)^2\sin^4 a^1+\frac{1}{2}\sin^{-2}a^1$$

对自伴随方程(a),亦可用 § 11.4 中的方法先求 Lagrange 函数。式(11.4.27)~(11.4.29)给出

$$K=\dot{q}\int_0^1\sin^{-4}q(\dot{q}\tau')\mathrm{d}\tau'=\frac{1}{2}\dot{q}^2\sin^{-4}q$$

$$D=0$$

$$C=\int_0^1 [-q\sin^{-3}(\tau q)\cos(\tau q)]\mathrm{d}\tau=-\frac{1}{2}\sin^{-2}q$$

Lagrange 函数为

$$L=\frac{1}{2}\dot{q}^2\sin^{-4}q-\frac{1}{2}\sin^{-2}q$$

进而可求 Hamilton 函数，有

$$p=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}=\dot{q}\sin^{-4}q$$

$$H=p\dot{q}-L=\frac{1}{2}p^2\sin^4 q+\frac{1}{2}\sin^{-2}q$$

本章讨论了 Hamilton 方程，包括 Legendre 变换与正则方程、正则方程的经典积分与降阶法、正则方程的逆变型和协变型，特别给出了导出正则方程的各种方法。以 Lagrange 方程为代表的力学称为 Lagrange 力学，Lagrange 力学是分析力学发展的第一阶段。以 Hamilton 方程为代表的力学称为 **Hamilton 力学**，Hamilton 力学是分析力学发展的第二阶段。

思考题

12.1 有多种方法可导出 Hamilton 正则方程，哪种最简单最合理？

12.2 正则方程与 Lagrange 相比较，有哪些优势？

12.3 将正则方程写成逆变型和协变型，各有什么好处？

12.4 对怎样一类微分方程可以化成 Hamilton 方程？

习题

12.1 已知 Lagrange 函数为

$$L=a\dot{q}_1^2+(c^2+b^2\cos^2 q_1)\dot{q}_2^2 \qquad (a,b,c\text{ 为常数})$$

试求 Hamilton 函数 H。

答：$H=\dfrac{p_1^2}{4a}+\dfrac{p_2^2}{4(c^2+b^2\cos^2 q_1)}$

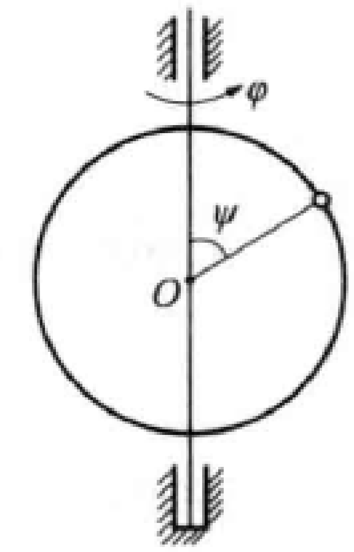
12.2 已知 Hamilton 函数

$$H=p_1p_2+q_1q_2$$

试求 Lagrange 函数 L。

答：$L=\dot{q}_1\dot{q}_2-q_1q_2$

12.3 质量为 m 的小重环沿质量为 M 半径为 R 的光滑金属丝圆周滑动，圆周绕其铅垂直径转动，如图所示。试求 Hamilton 函数 H。



题 12.3 图

答：$H=\dfrac{p_\varphi^2}{R^2(M+2m\sin^2\psi)}+\dfrac{p_\psi^2}{2mR^2}+mgR\cos\varphi$

12.4 系统的 Lagrange 函数为

$$L=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\theta)-aF(\theta)\dot{\varphi}$$

其中 a 为常数，$F(\theta)$ 为连续可微的任意函数，试建立系统的正则方程。

$$\text{答：}\dot{r}=\frac{p_r}{m},\dot{p}_r=\frac{1}{mr^3}\left\{p_\theta^2+\frac{[p_\varphi+aF(\theta)]^2}{\sin^2\theta}\right\}$$

$$\dot{\theta}=\frac{p_\theta}{mr^2},\dot{p}_\theta=\frac{p_\varphi+aF(\theta)}{mr^2\sin^3\theta}\left\{[p_\varphi+aF(\theta)]\cos\theta-a\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\theta}\sin\theta\right\}$$

$$\dot{\varphi}=\frac{p_\varphi+aF(\theta)}{mr^2\sin^2\theta},\dot{p}_\varphi=0$$

12.5 在 Lagrange 函数为

$$L=\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{sk}\dot{q}_s\dot{q}_k-\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}c_{sk}q_sq_k$$
$$(a_{sk}=a_{ks}=\text{const.},c_{sk}=c_{ks}=\text{const.})$$

的保守系统中，如果满足

$$\sum_{k=1}^{n}a_{sk}c_{km}=\sum_{k=1}^{n}c_{sk}a_{km}\qquad(s,m=1,2,\cdots,n)$$

试证，广义坐标和广义动量满足同一方程。

12.6 已知微分方程

$$\ddot{x}_1+\dot{x}_1\tan t+4x_1\cos^2 t=0$$
$$\ddot{x}_2-\dot{x}_2\cos t+4x_2\sin^2 t=0$$

试求 Lagrange 函数 L 和 Hamilton 函数 H[9]。

答：$L=\dfrac{1}{2}\dot{x}_1^2\cos^{-1}t+\dfrac{1}{2}\dot{x}_2^2\sin^{-1}t-2x_1^2\cos t-2x_2^2\sin t$

$H=\dfrac{1}{2}p_1^2\cos t+\dfrac{1}{2}p_2^2\sin t+2q_1^2\cos t+2q_2^2\sin t\qquad(q_1=x_1,q_2=x_2)$

12.7 已知微分方程

$$\dot{x}=y,\dot{y}=x^{-1}\dot{x}^2$$

试求 Lagrange 函数 L 和 Hamilton 函数 H。

答：$L=\dfrac{1}{2}x^{-2}\dot{x}^2,H=\dfrac{1}{2}p^2x^2$

参考文献

[1]Лурье АИ. Аналитическая Механика[M]. Москва:ГИФМЛ,1961.
[2] Whittaker ET. A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Badies[M]. 9th ed. NewYork:The Macmillan Co,1944.
[3]Appell P. Traité de Mécanique Rotionnelle. Tome Ⅱ[M]. Sixième Édition, Paris:Gauthier-Villars,1953.
[4]Lagrange JL. Mécanique Analytique[M]. Vol Ⅰ,Quatrième Édition. Paris: Jacques Gabay,2006.
[5]H·H·蒲赫哥尔茨．理论力学基本教程[M]. 下册．钱尚武,钱敏,译．北京:高等教育出版社,1957.
[6]吴大猷．古典动力学[M]. 北京:科学出版社,2010.
[7]Л. Д. 朗道,E. M. 栗弗席兹．力学[M]. 第五版．李俊峰,鞠国兴,译．北京:高等教育出版社,2007.
[8] Santilli RM. Foundations of Theoretical Mechanics Ⅰ[M]. New York: Springer-Verlag,1978.
[9]梅凤翔,吴惠彬．微分方程的分析力学方法[M]. 北京:科学出版社,2012.

13 Hamilton 方程的积分

本章讨论 Hamilton 方程的积分方法，包括 Poisson 方法、Jacobi 方法、正则变换，以及积分不变量等。

§13.1 Poisson 方法

Poisson 方法是积分 Hamilton 方程的一种重要方法。本节介绍 Poisson 方法，包括对第一积分的 Poisson 条件、Poisson 括号及其应用、经典 Poisson 方法及其推广等。

13.1.1 对第一积分的 Poisson 条件

研究正则方程

$$\dot{q}_s=\frac{\partial H}{\partial p_s},\dot{p}_s=-\frac{\partial H}{\partial q_s}\qquad (s=1,2,\cdots,n)\tag{13.1.1}$$

它有如下第一积分

$$f(q_s,p_s,t)=C\tag{13.1.2}$$

现在来求 f 应满足的条件。为此，求式(13.1.2)对时间 t 的导数，有

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial q_s}\dot{q}_s+\frac{\partial f}{\partial p_s}\dot{p}_s\right)=0$$

代入方程(13.1.1)，得

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial q_s}\frac{\partial H}{\partial p_s}-\frac{\partial f}{\partial p_s}\frac{\partial H}{\partial q_s}\right)=0\tag{13.1.3}$$

关系(13.1.3)称为对第一积分的 **Poisson 条件**。显然，它是充分必要条件。

13.1.2 Poisson 括号及其性质

将两个给定函数 φ 和 ψ 的下述表达式

$$(\varphi,\psi)=\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_s}\frac{\partial \psi}{\partial p_s}-\frac{\partial \varphi}{\partial p_s}\frac{\partial \psi}{\partial q_s}\right)\tag{13.1.4}$$

称为 **Poisson 括号**。这样,对第一积分的 Poisson 条件(13.1.3)可表示为

$$\frac{\partial f}{\partial t}+(f,H)=0 \tag{13.1.5}$$

Poisson 括号有如下性质:

(1) $(\varphi,\varphi)=0$

(2) $(\psi,\varphi)=-(\varphi,\psi)$

(3) $(c\varphi,\psi)=c(\varphi,\psi)$

(4) $(\varphi_1+\varphi_2,\psi)=(\varphi_1,\psi)+(\varphi_2,\psi)$

(5) $(\varphi_1\varphi_2,\psi)=\varphi_1(\varphi_2,\psi)+\varphi_2(\varphi_1,\psi)$

(6) $\frac{\partial}{\partial t}(\varphi,\psi)=(\frac{\partial \varphi}{\partial t},\psi)+(\varphi,\frac{\partial \psi}{\partial t})$

这些性质都可用(φ,ψ)的定义直接推证。

复合 Poisson 括号,定义为

$$(f,(\varphi,\psi))=\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial q_s}\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial p_s}-\frac{\partial f}{\partial p_s}\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial q_s}\right) \tag{13.1.6}$$

三个复合 Poisson 括号,其中每一个由三个函数 f,φ,ψ 用循环交换函数的方法来得到,则它们的和恒等于零

$$(f,(\varphi,\psi))+(\varphi,(\psi,f))+(\psi,(f,\varphi))\equiv 0 \tag{13.1.7}$$

这一等式称为 **Jacobi 恒等式**。

如果两上函数 $f_1(t,\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})$和 $f_2(t,\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})$所构成的 Poisson 括号恒等于零

$$(f_1,f_2)\equiv 0 \tag{13.1.8}$$

则称 f_1,f_2 为相互内旋的,或对合的。

13.1.3 经典 Poisson 积分方法及其推广

将 Hamilton 方程(13.1.1)表示为逆变形式

$$\dot{a}^{\mu}-\sum_{\nu=1}^{2n}\omega^{\mu\nu}\frac{\partial H}{\partial a^{\nu}}=0 \tag{13.1.9}$$

其中

$$a^{\mu}=\begin{cases} q_{\mu} & (\mu=1,2,\cdots,n) \\ p_{\mu-n} & (\mu=n+1,n+2,\cdots,2n) \end{cases}$$

$$(\omega^{\mu\nu})=\begin{pmatrix} 0_{n\times n} & 1_{n\times n} \\ -1_{n\times n} & 0_{n\times n} \end{pmatrix}$$

Hamilton 方程(13.1.9)的 Poisson 积分方法归纳如下:

(1) $I(a^{\mu},t)=C$ 是方程(13.1.9)积分的充分必要条件为

$$\frac{\partial I}{\partial t}+(I,H)=0 \tag{13.1.10}$$

这就是式(13.1.5),称为对第一积分的 Poisson 条件。

(2)如果 H 不显含 t,则 H 是第一积分。

(3)如果有两个不处于相互内旋的积分 $I_1(a^\mu,t)$ 和 $I_2(a^\mu,t)$,则它们的 Poisson 括号(I_1,I_2)也是积分,它称为 **Poisson 定理**。

(4)如果有包含时间 t 的积分 $I(a^\mu,t)$,而 H 不显含 t,则$\partial I/\partial t,\partial^2 I/\partial t^2,\cdots$都是积分。

(5)如果有包含 a^ρ 的积分 $I(a^\mu,t)$,而 H 不显含 a^ρ,则$\partial I/\partial a^\rho,\partial^2 I/\partial a^{\rho 2},\cdots$都是积分。

利用式(13.1.10)可判断某函数是否为积分,同时,式(13.1.10)是一个偏微分方程,解此方程就可找到积分。

上述第 3 条,即 Poisson 定理,看起来可由已知两个积分生成一串新积分,然而,可惜的是,它还不能解决力学的著名经典问题——刚体定点运动问题、天体力学中的三体问题,以及其他问题。因为在这些问题中,所有已知积分都是相互内旋的。

上述第 4、第 5 条,可用于由已知积分在一定条件下生成新的积分。

对非保守系统的 Hamilton 方程

$$\dot{q}_s=\frac{\partial H}{\partial p_s},\dot{p}_s=-\frac{\partial H}{\partial q_s}+\widetilde{Q}_s(t,\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})\qquad(s=1,2,\cdots,n)\quad(13.1.11)$$

可将其表示为逆变代数形式

$$\dot{a}^\mu-\sum_{\nu=1}^{2n}S^{\mu\nu}\frac{\partial H}{\partial a^\nu}=0\qquad(\mu,\nu=1,2,\cdots,2n)\qquad(13.1.12)$$

其中

$$S^{\mu\nu}=\omega^{\mu\nu}+T^{\mu\nu}$$

$$(\omega^{\mu\nu})=\begin{pmatrix}0_{n\times n} & 1_{n\times n}\\ -1_{n\times n} & 0_{n\times n}\end{pmatrix}$$

$$(T^{\mu\nu})=\begin{pmatrix}0_{n\times n} & 0_{n\times n}\\ 0_{n\times n} & (-\Omega_{kk})_{n\times n}\end{pmatrix}$$

$$(\Omega_{sk})=\begin{pmatrix}\Omega_{11} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \Omega_{22} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \Omega_{nn}\end{pmatrix}$$

$$\widetilde{Q}_s=-\sum_{k=1}^{n}\Omega_{sk}\frac{\partial H}{\partial p_k}$$

$$a^\mu=\begin{cases}q_\mu & (\mu=1,2,\cdots,n)\\ p_{\mu-n} & (\mu=n+1,n+2,\cdots,2n)\end{cases}$$

定义积

$$A \cdot H = \sum_{\mu=1}^{2n} \sum_{\nu=1}^{2n} \frac{\partial A}{\partial a^\mu} S^{\mu\nu} \frac{\partial H}{\partial a^\nu} \tag{13.1.13}$$

则方程(13.1.12)具有 Lie 容许代数结构。

经典 Poisson 方法可作如下推广：

(1) $I(a^\mu, t) = C$ 是系统(13.1.12)第一积分的充分必要条件为

$$\frac{\partial I}{\partial t} + I \cdot H = 0 \tag{13.1.14}$$

它称为**广义 Poisson 条件**。

(2) Hamilton 函数 H 是系统(13.1.12)第一积分的充分必要条件为

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \sum_{s=1}^{n} Q_s \dot{q}_s = 0 \tag{13.1.15}$$

(3)如果系统(13.1.12)包含时间 t 的第一积分 $I(a^\mu, t) = C$，但 $S^{\mu\nu}$ 和 H 都不显含 t，则$\partial I/\partial t$，$\partial^2 I/\partial t^2$，…都是系统的第一积分。

(4)如果系统(13.1.12)包含 a^ρ 的第一积分，但 $S^{\mu\nu}$ 和 H 都不显含 a^ρ，则$\partial I/\partial a^\rho$，$\partial^2 I/\partial a^{\rho 2}$，…都是系统的第一积分。

13.1.4 应用举例

例 1 已知 Hamilton 函数为

$$H = p_1 p_2 + q_1 q_2$$

试求第一积分。

解：关于第一积分的 Poisson 条件(13.1.10)给出

$$\frac{\partial I}{\partial t} + \frac{\partial I}{\partial q_1} p_2 + \frac{\partial I}{\partial q_2} p_1 + \frac{\partial I}{\partial p_1}(-q_2) + \frac{\partial I}{\partial p_2}(-q_1) = 0$$

其特征方程为

$$\frac{\mathrm{d}t}{1} = \frac{\mathrm{d}q_1}{p_2} = \frac{\mathrm{d}q_2}{p_1} = \frac{\mathrm{d}p_1}{-q_2} = \frac{\mathrm{d}p_2}{-q_1}$$

由此容易求得两个积分

$$I_1 = p_1^2 + q_2^2 = C_1^2, \quad I_2 = p_2^2 + q_1^2 = C_2^2$$

作 Poisson 括号，有

$$(I_1, I_2) = 4(p_2 q_2 - p_1 q_1) \neq 0$$

由 Poisson 定理知

$$I_3 = (I_1, I_2) = 4(p_2 q_2 - p_1 q_1) = C_3$$

也是积分。注意到，因 H 不显含 t，故有积分

$$I_4 = H = C_4$$

但是，4 个积分不是彼此独立的，因为有

$$\left(\frac{I_3}{4}\right)^2 + I_4^2 = I_1 I_2$$

例 2 试用 Poisson 方法研究微分方程

$$\ddot{q}_1+q_2=0,\ddot{q}_2+q_1=0$$

的积分。

解:令

$$p_1=\dot{q}_1,p_2=\dot{q}_2$$

则方程可 Hamilton 化为

$$H=\frac{1}{2}(p_1^2+p_2^2)+q_1q_2$$

Poisson 条件(13.1.10)给出

$$\frac{\partial I}{\partial t}+\frac{\partial I}{\partial q_1}p_1+\frac{\partial I}{\partial q_2}p_2-\frac{\partial I}{\partial p_1}q_2-\frac{\partial I}{\partial p_2}q_1=0$$

由此可找到以下两个积分

$$I_1=(p_1+p_2)\ \cos t+(q_1+q_2)\ \sin t=C_1$$

$$I_2=(p_1-p_2)\ \mathrm{sh}\ t-(q_1-q_2)\ \mathrm{ch}\ t=C_2$$

因 Hamilton 函数 H 不显含 t,故由 I_1,I_2 可分别生成如下两个积分

$$I_3=\frac{\partial I_1}{\partial t}=-(p_1+p_2)\sin t+(q_1+q_2)\cos t=C_3$$

$$I_4=\frac{\partial I_2}{\partial t}=(p_1-p_2)\mathrm{ch}\ t-(q_1-q_2)\mathrm{sh}\ t=C_4$$

由 4 个积分中消去 p_1,p_2,得到方程的解

$$q_1=\frac{1}{2}(C_1\sin t+C_2\cos t+C_3\mathrm{ch}\ t+C_4\mathrm{sh}\ t)$$

$$q_2=\frac{1}{2}(C_1\sin t+C_2\cos t-C_3\mathrm{ch}\ t-C_4\mathrm{sh}\ t)$$

例 3 用 Poisson 方法积分 **Hojman-Urrutia 方程**

$$\ddot{x}+\dot{y}=0,\ddot{y}+y=0$$

解:令

$$q_1=x,q_2=y$$

方程可部分 Hamilton 化为

$$H=\frac{1}{2}(p_1^2+p_2^2)+\frac{1}{2}q_2^2,p_1=\dot{q}_1,p_2=\dot{q}_2,\widetilde{Q}_1=-p_2,\widetilde{Q}_2=0$$

对第一积分的广义 Poisson 条件(13.1.14)给出

$$\frac{\partial I}{\partial t}+\frac{\partial I}{\partial q_1}p_1+\frac{\partial I}{\partial q_2}p_2+\frac{\partial I}{\partial p_1}(-p_2)+\frac{\partial I}{\partial p_2}(-q_2)=0$$

由此可找到如下两个积分

$$I_1 = q_2 \sin t + p_2 \cos t = C_1$$

$$I_2 = q_1 - p_2 - (q_2 + p_1) t = C_2$$

利用广义 Poisson 方法的第三条，由 I_1 和 I_2 分别生成积分

$$I_3 = \frac{\partial I_1}{\partial t} = q_2 \cos t - p_2 \sin t = C_3$$

$$I_4 = \frac{\partial I_2}{\partial t} = -q_2 - p_1 = C_4$$

§ 13.2 Jacobi 方法

由 Hamilton 函数可构造 **Hamilton-Jacobi 方程**。本节介绍积分 Hamilton-Jacobi方程的 Jacobi 方法，包括预备知识、Jacobi 定理、Liouville 定理等。

13.2.1 预备知识

研究依赖于力学系统广义坐标 $q_s(s=1,2,\cdots,n)$ 及时间 t 的某函数 S，在其表达式中包含$(n+1)$个任意常数 $a_\alpha(\alpha=1,2,\cdots,n+1)$，常数的数目等于计入时间的所有变量的数目

$$S = S(q_s, t; a_\alpha) \tag{13.2.1}$$

写出函数 S 对变量 q_s 和 t 的偏导数，记作

$$\begin{aligned} &\frac{\partial S}{\partial t} = P_0(q_s, t; a_\alpha) \\ &\frac{\partial S}{\partial q_k} = P_k(q_s, t; a_\alpha) \qquad (k=1,2,\cdots,n) \end{aligned} \tag{13.2.2}$$

由$(n+2)$个方程(13.2.2)消去全部$(n+1)$个任意常数 a_α，结果有两种可能性：或者出现 $S, \frac{\partial S}{\partial t}, \frac{\partial S}{\partial q_s}, q_s, t$ 中的一个关系

$$f\left(t, q_s; \frac{\partial S}{\partial t}, \frac{\partial S}{\partial q_s}\right) = 0 \tag{13.2.3}$$

或者出现几个关系。在第一种情形中，消去任意常数的结果，即关系(13.2.3)称为相对函数 S 的一阶偏微分方程，S 为 t, q_s 的函数；而式(13.2.1)表示的函数 S 称为一阶偏微分方程(13.2.3)的完全积分。在第二种情形中，由于消去全部常数而出现了函数 S 及其偏导数之间的几个关系，可以认为，不存在这样一阶微分方程使已给函数 S 成为**完全积分**。

作为例子，研究偏微分方程

$$\left(\frac{\partial S}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial q_2}\right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial q_3}\right)^2 = 0 \tag{13.2.4}$$

它的完全积分为

$$S=a_1q_1+a_2q_2+\sqrt{a_1^2+a_2^2}q_3+a_3$$

一般的偏微分方程

$$f\left(\frac{\partial S}{\partial q_s}\right)=0 \qquad (s=1,2,\cdots,n) \tag{13.2.5}$$

的完全积分有形式

$$S=\sum_{r=1}^{n-1}a_rq_r+cq_n+a_{n+1}$$

其中常数 C 由关系

$$f(a_r,c)=0$$

来确定。

偏微分方程

$$\sum_{s=1}^{n}q_s\frac{\partial S}{\partial q_s}+f\left(\frac{\partial S}{\partial q_s}\right)-S=0 \tag{13.2.6}$$

称为 Clairaut(Clairaut AC, 1713—1765)方程,它的完全积分有形式

$$S=\sum_{s=1}^{n}a_sq_s+f(a_s)$$

形如式(13.2.4),(13.2.5)的偏微分方程中没有函数 S,完全积分中的一个任意常数以相加的形式出现。在 Clairaut 方程(13.2.6)中有函数 S,而在完全积分中没有任何一个相加常数。

在分析动力学中形如

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\varphi(t,q_s,\frac{\partial S}{\partial q_s})=0$$

的偏微分方程有重要价值,它的完全积分有形式

$$S=S(t,q_s,a_s)+a_{n+1}$$

13.2.2 Hamilton-Jacobi 方程和 Jacobi 定理

设力学系统的 Hamilton 函数为 $H=H(t,q_s,p_s)$,构造偏微分方程

$$\frac{\partial S}{\partial t}+H\left(t,q_s,\frac{\partial S}{\partial q_s}\right)=0 \tag{13.2.7}$$

这个方程称为 Hamilton-Jacobi 方程。

积分 Hamilton-Jacobi 方程(13.2.7)的 **Jacobi 定理**表述为:

如果方程(13.2.7)的完全积分为确定函数 $S(t,q_s,\alpha_s)$ 的形式,那么正则方程

$$\dot{q}_s=\frac{\partial H}{\partial p_s},\dot{p}_s=-\frac{\partial H}{\partial q_s} \qquad (s=1,2,\cdots,n) \tag{13.2.8}$$

的全部 $2n$ 个第一积分有下列形式

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_s}=\beta_s \qquad (s=1,2,\cdots,n) \tag{13.2.9}$$

$$\frac{\partial S}{\partial q_s}=p_s \qquad (s=1,2,\cdots,n) \tag{13.2.10}$$

其中 β_s 为新的任意常数。

Arnold 指出:"Jacobi 定理将常微分方程组的求解化为求偏微分方程的完全积分。这样由简'化'繁却提供了解决具体问题的有效方法,这是令人惊奇的。然而这却是求精确解的最有力的方法,而 Jacobi 解出的许多问题用别的方法是解不出来的。"[1]

如果 Hamilton-Jacobi 方程不显含时间 t,那么函数

$$S=-ht+W(q_s,a_r,h) \qquad (s=1,2,\cdots,n;r=1,2,\cdots,n-1) \tag{13.2.11}$$

满足方程(13.2.7)。

如果 Hamilton-Jacobi 方程不显含 q_1,那么函数

$$S=a_1q_1+\varphi(q_2,q_3,\cdots,q_n,t) \tag{13.2.12}$$

满足方程(13.2.7)。

利用 Jacobi 定理解力学问题时,步骤如下:根据 Hamilton 函数 H 列写 Hamilton-Jacobi 方程(13.2.7);求此偏微分方程的完全积分 S,一般用分离变量方法;列写 $2n$ 个代数方程(13.2.9),(13.2.10),解此方程可求得

$$\begin{aligned} q_s&=q_s(t,\alpha_k,\beta_k) \\ p_s&=p_s(t,\alpha_k,\beta_k) \end{aligned} \qquad (s,k=1,2,\cdots,n) \tag{13.2.13}$$

13.2.3 Liouville 情形

Liouville 指出很广一类情形,运动方程的解可表示为求积分的形式。系统的动能和势能分别写成

$$T=\frac{1}{2}\{u_1(q_1)+u_2(q_2)+\cdots+u_n(q_n)\}\{v_1(q_1)\dot{q}_1^2+v_2(q_2)\dot{q}_2^2+\cdots+v_n(q_n)\dot{q}_n^2\} \tag{13.2.14}$$

$$V=\frac{w_1(q_1)+w_2(q_2)+\cdots+w_n(q_n)}{u_1(q_1)+u_2(q_2)+\cdots+u_n(q_n)}$$

求出广义动量

$$p_s=\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}=\sum_{k=1}^{n}u_k(q_k)\cdot v_s\dot{q}_s$$

则 Hamilton 函数为

$$H=\frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n}u_k(q_k)}\left\{\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n}\frac{p_s^2}{v_s}+\sum_{s=1}^{n}w_s(q_s)\right\}$$

而 Hamilton-Jacobi 方程为

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n}u_k(q_k)}\left\{\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n}\frac{1}{v_s}\left(\frac{\partial S}{\partial q_s}\right)^2+\sum_{s=1}^{n}w_s(q_s)\right\}=0 \tag{13.2.15}$$

它的完全积分有形式

$$S=-ht+\sum_{s=1}^{n}V_s(q_s) \tag{13.2.16}$$

代入方程(13.2.15),得到

$$\left\{\frac{1}{v_1}\left(\frac{\mathrm{d}V_1}{\mathrm{d}q_1}\right)^2-2hu_1+2w_1\right\}+\left\{\frac{1}{v_2}\left(\frac{\mathrm{d}V_2}{\mathrm{d}q_2}\right)^2-2hu_2+2w_2\right\}+\cdots+\left\{\frac{1}{v_n}\left(\frac{\mathrm{d}V_n}{\mathrm{d}q_n}\right)^2-2hu_n+2w_n\right\}=0$$

第一个括号仅仅依赖于 q_1,第二个括号仅仅依赖于 q_2,等等。因此,每个括号都应为常数,即有

$$\frac{1}{v_s}\left(\frac{\mathrm{d}V_s}{\mathrm{d}q_s}\right)^2-2hu_s+2w_s=2a_s \qquad (s=1,2,\cdots,n) \tag{13.2.17}$$

其中 a_s 是常数,它们的和应为零,有

$$a_n=-(a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}) \tag{13.2.18}$$

积分式(13.2.17),得

$$V_s=\int\sqrt{v_s}\sqrt{2hu_s-2w_s+2a_s}\,\mathrm{d}q_s$$

方程的解表示为

$$\frac{\partial\left(\sum\limits_{s=1}^{n}V_s\right)}{\partial a_\mu}=b_\mu \qquad (\mu=1,2,\cdots,n-1)$$

$$\frac{\partial\left(\sum\limits_{s=1}^{n}V_s\right)}{\partial h}=t-t_0$$

由此得到

$$\int\sqrt{v_\mu}\frac{\mathrm{d}q_\mu}{\sqrt{2hu_\mu-2W_\mu+2a_\mu}}-\int\sqrt{v_n}\frac{\mathrm{d}q_n}{\sqrt{2hu_n-2w_n+2a_n}}=b_\mu \tag{13.2.19}$$

$$\sum_{s=1}^{n}\int\sqrt{v_s}\frac{u_s\mathrm{d}q_s}{\sqrt{2hu_s-2w_s+2a_s}}=t-t_0$$

因此,问题的解归为求积分。

13.2.4 应用举例

例 1 试用 Jacobi 定理解 Kepler-Newton 问题。

解:在 § 12.1 中,例 3 已给出 Hamilton 函数

$$H=\frac{1}{2m}\left(p_r^2+\frac{1}{r^2}p_\varphi^2+\frac{1}{r^2\cos^2\varphi}p_\psi^2\right)-\frac{\mu m}{r}$$

Hamilton-Jacobi 方程(13.2.7)给出

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial\varphi}\right)^2+\frac{1}{r^2\cos^2\varphi}\left(\frac{\partial S}{\partial\psi}\right)^2\right]-\frac{\mu m}{r}=0$$

它的完全积分可写成形式

$$S=-ht+W(r,\varphi,\psi,a_1,a_2,h)$$

代入方程,得到

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial W}{\partial\varphi}\right)^2+\frac{1}{r^2\cos^2\varphi}\left(\frac{\partial W}{\partial\psi}\right)^2\right]-\frac{\mu m}{r}=h$$

用分离变量法求完全积分,令

$$W=R+\Phi+\Omega$$

其中 R 仅为 r 的函数;Φ 仅为 φ 的函数;Ω 仅为 ψ 的函数。则有

$$\frac{1}{2m}\left[R'^2+\frac{1}{r^2}\Phi'^2+\frac{1}{r^2\cos^2\varphi}\Omega'^2\right]=\frac{\mu m}{r}+h$$

分开含 r 的项,有

$$\Phi'^2+\frac{1}{\cos^2\varphi}\Omega'^2=2mr^2\left(\frac{\mu m}{r}+h\right)-r^2R'^2$$

左端不依赖于 r,而右端依赖于 r,为使它满足,两端应等于同一常值,记作 k^2,因此有

$$R'^2=2m\left(\frac{\mu m}{r}+h\right)-\frac{k^2}{r^2}$$

$$\Omega'^2=(k^2-\Phi'^2)\cos^2\varphi$$

前一式积分得

$$R=\int\sqrt{2m\left(\frac{\mu m}{r}+h\right)-\frac{k^2}{r^2}}\,\mathrm{d}r+C_1$$

后一式给出

$$\Omega'^2=l^2,\Phi'^2=k^2-\frac{l^2}{\cos^2\varphi}$$

由此积分得

$$\Omega=l\psi+C_2,\Phi=\int\sqrt{k^2-\frac{l^2}{\cos^2\varphi}}\,\mathrm{d}\varphi+C_3$$

积分常数 C_1,C_2,C_3 可去掉,有

$$W=\int\sqrt{2m\left(\frac{\mu m}{r}+h\right)-\frac{k^2}{r^2}}\mathrm{d}r+\int\sqrt{k^2-\frac{l^2}{\cos^2\varphi}}\mathrm{d}\varphi+l\psi$$

而完全积分为

$$S=-ht+\int\sqrt{2m\left(\frac{\mu m}{r}+h\right)-\frac{k^2}{r^2}}\mathrm{d}r+\int\sqrt{k^2-\frac{l^2}{\cos^2\varphi}}\mathrm{d}\varphi+l\psi$$

令 S 对常数 h,k,l 的偏导数分别等于另一些常数 t_0,b,ψ_0，即

$$\frac{\partial S}{\partial h}=t_0,\frac{\partial S}{\partial k}=b,\frac{\partial S}{\partial l}=\psi_0$$

由此得到第一组积分

$$\int\frac{m\mathrm{d}r}{\sqrt{2m\left(\frac{\mu m}{r}+h\right)-\frac{k^2}{r^2}}}=t+t_0$$

$$\int\frac{k\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{k^2-\frac{l^2}{\cos^2\varphi}}}-\int\frac{k\mathrm{d}r}{r^2\sqrt{2m\left(\frac{\mu m}{r}+h\right)-\frac{k^2}{r^2}}}=b$$

$$\psi-\int\frac{l\mathrm{d}\varphi}{\cos^2\varphi\sqrt{k^2-\frac{l^2}{\cos^2\varphi}}}=\psi_0$$

Jacobi 定理给出的第二组积分为

$$p_r=\frac{\partial S}{\partial r},p_\varphi=\frac{\partial S}{\partial\varphi},p_\psi=\frac{\partial S}{\partial\psi}$$

例 2 平面上运动的质量为 m 的质点与两固定中心 A 和 B 相互作用。A 和 B 之间距离为 $2C$。相互作用势等于

$$V=-\left(\frac{\gamma_1}{r_1}+\frac{\gamma_2}{r_2}\right)$$

其中 $r_1=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$，$r_2=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$是引力中心到质点的距离，而 γ_1,γ_2 为常数。试用 Jacobi 定理求解。

解：首先，求 Lagrange 函数 L。取椭圆坐标 ξ,η，与直角坐标 x,y 有关系

$$x=c\operatorname{ch}\xi\cos\eta,y=c\operatorname{sh}\xi\sin\eta$$

于是有

$$r_1=\sqrt{(x-c)^2+y^2}=c(\operatorname{ch}\xi-\cos\eta)$$

$$r_2=\sqrt{(x+c)^2+y^2}=c(\operatorname{ch}\xi+\cos\eta)$$

质点的势能为

$$V=-\frac{\gamma_1}{c(\operatorname{ch}\xi-\cos\eta)}-\frac{\gamma_2}{c(\operatorname{ch}\xi+\cos\eta)}$$

质点的动能为

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)=\frac{1}{2}mc^2(\dot{\xi}^2+\dot{\eta}^2)(\operatorname{ch}^2\xi-\cos^2\eta)$$

Lagrange 函数为

$$L=T-V=\frac{1}{2}mc^2(\dot{\xi}^2+\dot{\eta}^2)(\operatorname{ch}^2\xi-\cos^2\eta)+\frac{\gamma_1}{c(\operatorname{ch}\xi-\cos\eta)}+\frac{\gamma_2}{c(\operatorname{ch}\xi+\cos\eta)}$$

其次，构造 Hamilton 函数。广义动量为

$$p_\xi=\frac{\partial L}{\partial\dot{\xi}}=mc^2\dot{\xi}(\operatorname{ch}^2\xi-\cos^2\eta)$$

$$p_\eta=\frac{\partial L}{\partial\dot{\eta}}=mc^2\dot{\eta}(\operatorname{ch}^2\xi-\cos^2\eta)$$

反解出广义速度，有

$$\dot{\xi}=\frac{p_\xi}{mc^2(\operatorname{ch}^2\xi-\cos^2\eta)},\ \dot{\eta}=\frac{p_\eta}{mc^2(\operatorname{ch}^2\xi-\cos^2\eta)}$$

Hamilton 函数为

$$H=T+V=\frac{p_\xi^2+p_\eta^2}{2mc^2(\operatorname{ch}^2\xi-\cos^2\eta)}-\frac{\gamma_1}{c(\operatorname{ch}\xi-\cos\eta)}-\frac{\gamma_2}{c(\operatorname{ch}\xi+\cos\eta)}$$

最后，列写 Hamilton-Jacobi 方程，并求其完整积分。Hamilton-Jacobi 方程(13.2.7)给出

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{1}{2mc^2(\operatorname{ch}^2\xi-\cos^2\eta)}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial\xi}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial\eta}\right)^2\right]-\frac{\gamma_1}{c(\operatorname{ch}\xi-\cos\eta)}-\frac{\gamma_2}{c(\operatorname{ch}\xi+\cos\eta)}=0$$

令其完全积分有形式

$$S=-ht+W_1(\xi)+W_2(\eta)$$

代入方程，得到

$$-h+\frac{1}{2mc^2(\operatorname{ch}^2\xi-\cos^2\eta)}\left[\left(\frac{\partial W_1}{\partial\xi}\right)^2+\left(\frac{\partial W_2}{\partial\eta}\right)^2\right]-\frac{\gamma_1}{c(\operatorname{ch}\xi-\cos\eta)}-\frac{\gamma_2}{c(\operatorname{ch}\xi+\cos\eta)}=0$$

分离变量，有

$$-\left(\frac{\partial W_1}{\partial\xi}\right)^2+2mc^2h\operatorname{ch}^2\xi+2mc(\gamma_1+\gamma_2)\operatorname{ch}\xi=$$

$$\left(\frac{\partial W_2}{\partial \eta}\right)^2+2mc^2h\cos^2\eta-2mc(\gamma_1-\gamma_2)\cos\eta\equiv\alpha$$

由此解出

$$\frac{\partial W_1}{\partial \xi}=\sqrt{2mc^2h\mathrm{ch}^2\xi+2mc(\gamma_1+\gamma_2)\mathrm{ch}\,\xi-\alpha}$$

$$\frac{\partial W_2}{\partial \eta}=\sqrt{\alpha-2mc^2h\cos^2\eta+2mc(\gamma_1-\gamma_2)\cos\eta}$$

积分并代入 S,得到

$$S=-ht+\int\sqrt{2mc^2h\mathrm{ch}^2\xi+2mc(\gamma_1+\gamma_2)\mathrm{ch}\,\xi-\alpha}\,\mathrm{d}\xi+\int\sqrt{\alpha-2mc^2h\cos^2\eta+2mc(\gamma_1-\gamma_2)\cos\eta}\,\mathrm{d}\eta$$

例 3 已知 Hamilton 函数为

$$H=\frac{p_1^2q_1^2+p_2^2q_2^2}{2p_1^2q_1^2+3p_2^2q_2^2}\sin t$$

试用 Jacobi 定理求运动规律。

解: Hamilton-Jacobi 方程(13.2.7)给出

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{\left(\frac{\partial S}{\partial q_1}\right)^2q_1^2+\left(\frac{\partial S}{\partial q_2}\right)^2q_2^2}{2\left(\frac{\partial S}{\partial q_1}\right)^2q_1^2+3\left(\frac{\partial S}{\partial q_2}\right)^2q_2^2}\sin t=0$$

设 $\sin t\neq0$,上式可表示为

$$\frac{1}{\sin t}\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{\left(\frac{\partial S}{\partial q_1}\right)^2q_1^2+\left(\frac{\partial S}{\partial q_2}\right)^2q_2^2}{2\left(\frac{\partial S}{\partial q_1}\right)^2q_1^2+3\left(\frac{\partial S}{\partial q_2}\right)^2q_2^2}=0$$

令

$$S=W(t)+W_1(q_1)+W_2(q_2)$$

代入方程,得

$$-\frac{1}{\sin t}\frac{\partial W}{\partial t}=h$$

$$\frac{\left(\frac{\partial W_1}{\partial q_1}\right)^2q_1^2+\left(\frac{\partial W_2}{\partial q_2}\right)^2q_2^2}{2\left(\frac{\partial W_1}{\partial q_1}\right)^2q_1^2+3\left(\frac{\partial W_2}{\partial q_2}\right)^2q_2^2}=h$$

于是有

$$W=h\cos t$$

分离变量，得

$$\left(\frac{\partial W_1}{\partial q_1}\right)^2 q_1^2(1-2h)=\left(\frac{\partial W_2}{\partial q_2}\right)^2 q_2^2(3h-1)\equiv\alpha_1$$

因此有

$$\frac{\partial W_1}{\partial q_1}=\sqrt{\frac{\alpha_1}{1-2h}}\frac{1}{q_1},\frac{\partial W_2}{\partial q_2}=\sqrt{\frac{\alpha_1}{3h-1}}\frac{1}{q_2}$$

积分得

$$W_1=\sqrt{\frac{\alpha_1}{1-2h}}\ln q_1,W_2=\sqrt{\frac{\alpha_1}{3h-1}}\ln q_2$$

于是，完全积分为

$$S=h\cos t+\sqrt{\frac{\alpha_1}{1-2h}}\ln q_1+\sqrt{\frac{\alpha_1}{3h-1}}\ln q_2$$

调整常数，令

$$\alpha_1^*=\frac{\alpha_1}{1-2h},\ \alpha_2^*=\frac{\alpha_1}{3h-1}$$

则

$$h=\frac{\alpha_1^*+\alpha_2^*}{2\alpha_1^*+3\alpha_2^*}$$

而

$$S=\frac{\alpha_1^*+\alpha_2^*}{2\alpha_1^*+3\alpha_2^*}\cos t+\sqrt{\alpha_1^*}\ln q_1+\sqrt{\alpha_2^*}\ln q_2$$

由此得到运动规律

$$\beta_1=\frac{\partial S}{\partial\alpha_1^*}=\frac{\alpha_2^*}{(2\alpha_1^*+3\alpha_1^*)^2}\cos t+\frac{1}{2\sqrt{\alpha_1^*}}\ln q_1$$

$$\beta_2=\frac{\partial S}{\partial\alpha_2^*}=-\frac{\alpha_1^*}{(2\alpha_1^*+3\alpha_2^*)^2}\cos t+\frac{1}{2\sqrt{\alpha_2^*}}\ln q_2$$

即

$$q_1=\exp\left[2\sqrt{\alpha_1^*}\left(\beta_1-\frac{\alpha_2^*}{(2\alpha_1^*+3\alpha_2^*)^2}\cos t\right)\right]$$

$$q_2=\exp\left[2\sqrt{\alpha_2^*}\left(\beta_2+\frac{\alpha_1^*}{(2\alpha_1^*+3\alpha_2^*)^2}\cos t\right)\right]$$

例 4 两个微分方程为

$$\ddot{q}_1+2q_1^{-1}\dot{q}_1^2-q_1^{-4}\dot{q}_2^2\sin q_1\sin q_2\cos^{-2}q_1-q_1^{-4}q_2^2\sin q_1=0$$

$$\ddot{q}_2+\frac{1}{2}\dot{q}_2^2\cot q_2+\dot{q}_1\dot{q}_2\sin q_1\cos^{-1}q_1+2q_2\sin^{-1}q_2\cos^2 q_1=0$$

试用 Jacobi 定理求解。

解:首先,求 Lagrange 函数 L。方程是非自伴随的。将第一式两端乘以 q_1^4,第二式两端乘以 $\sin q_2 \cos^{-1} q_1$,则有

$$q_1^4 \ddot{q}_1 + 2q_1^3 \dot{q}_1^2 - \dot{q}_2^2 \sin q_1 \sin q_2 \cos^{-2} q_1 - q_2^2 \sin q_1 = 0$$

$$\ddot{q}_2 \sin q_2 \cos^{-1} q_1 + \frac{1}{2} \dot{q}_2^2 \cos q_2 \cos^{-1} q_1 + \dot{q}_1 \dot{q}_2 \sin q_1 \sin q_2 \cos^{-2} q_1 + 2q_2 \cos q_1 = 0$$

它是自伴随的。按式(11.4.27)～(11.4.29)构造 Lagrange 函数,有

$$K = \frac{1}{2} q_1^4 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} \dot{q}_2^2 \sin q_2 \cos^{-1} q_1$$

$$Z_{ks} = 0 \quad (k, s = 1, 2), D_k = 0 \quad (k = 1, 2)$$

$$W_1 = q_2^2 \sin q_1, W_2 = -2q_2 \cos q_1$$

$$C = -q_2^2 \cos q_1$$

$$L = \frac{1}{2} q_1^4 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} \dot{q}_2^2 \sin q_2 \cos^{-1} q_1 - q_2^2 \cos q_1$$

其次,构造 Hamilton 函数。广义动量为

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = q_1^4 \dot{q}_1, p_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = \dot{q}_2 \sin q_2 \cos^{-1} q_1$$

Hamilton 函数为

$$H = p_1 \dot{q}_1 + p_2 \dot{q}_2 - L = \frac{1}{2} p_1^2 q_1^{-4} + \left(\frac{1}{2} p_2^2 \sin^{-1} q_2 + q_2^2 \right) \cos q_1$$

最后,列写 Hamilton-Jacobi 方程,并求其完全积分。Hamilton-Jacobi 方程为

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial S}{\partial q_1} \right)^2 q_1^{-4} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial S}{\partial q_2} \right)^2 \sin^{-1} q_2 + q_2^2 \right\} \cos q_1 = 0$$

令完全积分为

$$S = -ht + S_1(q_1) + S_2(q_2)$$

则有

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial S_2}{\partial q_2} \right)^2 \sin^{-1} q_2 + q_2^2 = \alpha_2$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial S_1}{\partial q_1} \right)^2 q_1^{-4} + \alpha_2 \cos q_1 = \alpha_1$$

$$h = \alpha_1$$

积分得

$$S_2 = \int \sqrt{2(\alpha_2 - q_2^2)\sin q_2}\,\mathrm{d}q_2$$

$$S_1 = \int \sqrt{2}q_1^2\sqrt{\alpha_1 - \alpha_2\cos q_1}\,\mathrm{d}q_1$$

于是有[2]

$$S = -\alpha_1 t + \int \sqrt{2}q_1^2\sqrt{\alpha_1 - \alpha_2\cos q_1}\,\mathrm{d}q_1 + \int \sqrt{2(\alpha_2 - q_2^2)\sin q_2}\,\mathrm{d}q_2$$

问题的解表示为

$$p_1 = \sqrt{2}q_1^2\sqrt{\alpha_1 - \alpha_2\cos q_1},\ p_2 = \sqrt{2(\alpha_2 - q_2^2)\cos q_2}$$

$$-t + \frac{\sqrt{2}}{2}\int \frac{q_1^2\,\mathrm{d}q_1}{\sqrt{\alpha_1 - \alpha_2\cos q_1}} = -\beta_1$$

$$-\int \frac{q_1^2\cos q_1\,\mathrm{d}q_1}{\sqrt{\alpha_1 - \alpha_2\cos q_1}} + \int \frac{\sin q^2\,\mathrm{d}q_2}{\sqrt{(\alpha_2 - q_2^2)\sin q_2}} = -\beta_2$$

§13.3 正则变换

变换，是分析力学研究问题的重要手段。对于分析动力学问题中直接得到的 Hamilton 正则方程来说，往往很难求解。因此，利用变换的方法，使它变成一个较易求解的微分方程组，是一个十分重要的研究课题。**正则变换**便是达到这一目的重要工具。

13.3.1 正则变换及其群性

1）正则变换

对于正则方程

$$\dot{q}_s = \frac{\partial H}{\partial p_s},\ \dot{p}_s = -\frac{\partial H}{\partial p_s} \qquad (s=1,2,\cdots,n) \tag{13.3.1}$$

研究由变量 q_k, p_k 向新变量 Q_s, P_s 的变换

$$Q_s = Q_s(q_k, p_k, t),\ P_s = P_s(q_k, p_k, t) \qquad (s,k=1,2,\cdots,n) \tag{13.3.2}$$

并且函数行列式满足

$$\Delta = \frac{\partial(Q_s, P_s)}{\partial(q_k, p_k)} \neq 0$$

于是，变换(13.3.2)是可逆的，旧变量可用新变量 Q_k, P_k 表示出

$$q_s = q_s(Q_k, P_k, t),\ p_s = p_s(Q_k, P_k, t) \qquad (s,k=1,2,\cdots,n) \tag{13.3.3}$$

在变换(13.3.2)下，正则方程(13.3.1)将过渡到一组新的方程，但一般说来，这

组新方程没有正则方程的形式。在积分动力学方程时,有特别意义的是这样一类变换:在此变换下,正则方程的形式保持不变。这时,在变换(13.3.2)下,方程(13.3.1)变为正则方程组

$$\dot{Q}_s=\frac{\partial H^*}{\partial P_s},\dot{P}_s=-\frac{\partial H^*}{\partial Q_s}\qquad(s=1,2,\cdots,n)\tag{13.3.4}$$

其中 $H^*=H^*(Q_s,P_s,t)$有 Hamilton 函数的作用。

所谓正则变换,是指在 $2n$ 维相空间中,如果通过变量变换,将任何正则方程(13.3.1)仍然变成正则方程组(13.3.4)(一般来说具有另一个 Hamilton 函数 H^*)的变换。

正则变换的判别条件如下:

变换(13.3.2),如果满足 Pfaff 方程

$$\sum_{s=1}^{n}P_s\mathrm{d}Q_s-k\sum_{s=1}^{n}p_s\mathrm{d}q_s=(H^*-kH)\mathrm{d}t-\mathrm{d}U\tag{13.3.5}$$

则一定是正则变换。这里 k 是不为零的任意常数。

证明如下。

将式(13.3.5)表示为

$$k\sum_{s=1}^{n}p_s\mathrm{d}q_s-\sum_{s=1}^{n}P_s\mathrm{d}Q_s+(H^*-kH)\mathrm{d}t=\mathrm{d}U$$

设 q_s,p_s 有任意等时变分 $\delta q_s,\delta p_s(s=1,2,\cdots,n)$,则上式成为

$$k\sum_{s=1}^{n}p_s\delta q_s-\sum_{s=1}^{n}P_s\delta Q_s=\delta U\tag{13.3.6}$$

式(13.3.5)还可写成

$$k\sum_{s=1}^{n}p_s\dot{q}_s-\sum_{s=1}^{n}P_s\dot{Q}_s+H^*-kH=\dot{U}\tag{13.3.7}$$

将式(13.3.6)对 t 求导数,将式(13.3.7)取变分,并将所得两式相减,考虑到 d,δ 运算的可交换性,得

$$k\sum_{s=1}^{n}(\dot{q}_s\delta p_s-\dot{p}_s\delta q_s)-\sum_{s=1}^{n}(\dot{Q}_s\delta P_s-\dot{P}_s\delta Q_s)+\delta H^*-k\delta H=0\tag{13.3.8}$$

利用正则方程(13.3.1),式(13.3.8)成为

$$\sum_{s=1}^{n}\dot{Q}_s\delta P_s-\sum_{s=1}^{n}\dot{P}_s\delta Q_s=\delta H^*$$

由此得

$$\dot{Q}_s=\frac{\partial H^*}{\partial P_s},\dot{P}_s=-\frac{\partial H^*}{\partial Q_s}\qquad(s=1,2,\cdots,n)$$

这就是所要证明的。

实际上,Pfaff 方程(13.3.5)也是正则变换的必要条件,证明见文献[3]。

在式(13.3.5)中,k 称为正则方程的“价”,而 U 称为正则变换的母函数或生成函数。如果 $k=1$,则变换称为单价正则变换,简称正则变换,判别条件为

$$\sum_{s=1}^{n} p_s \mathrm{d}q_s - \sum_{s=1}^{n} P_s \mathrm{d}Q_s + (H^* - H)\mathrm{d}t = \mathrm{d}U \tag{13.3.9}$$

2)正则变换的群性

设变换 T_1 将(q,p)变换到(Q,P),变换 T_2 将(Q,P)变换到(Q',P'),则由(q,p)到(Q',P')的变换记作 T_2T_1,称为两个变换的积。

若存在变换,使

$$T_1^{-1}T_1(q,p)=(q,p)$$

则称 T_1^{-1} 为变换 T_1 的逆变换。变换 $T_0(q,p)=(q,p)$称为恒等变换。

满足下述条件的变换的总合,称为变换群。

(1)如果变换 T_1,T_2 属于总合,那么积 T_2T_1 也属于已给的总合;

(2)满足结合律 $T_3(T_2T_1)=(T_3T_2)T_1$;

(3)存在恒等变换 T_0,以使 $T_0T_1=T_1T_0=T_1$;

(4)对任意变换 T_1,存在逆变换 T_1^{-1},以使 $T_1T_1^{-1}=T_1^{-1}T_1=T_0$。

显然,全体正则变换构成一个群。

13.3.2 母函数

为解正则变换问题,必须在一般形式下对函数 U 和 H^* 解方程(13.3.5),因而问题是不确定的。可以认为其中一个函数是任意的。将母函数 U 取为这样的函数比较方便。借助它可以找到未知的变换。

现有$(4n+1)$个变量 $q_s,p_s,Q_s,P_s(s=1,2,\cdots,n)$和 t,它们用 $2n$ 个变换联系着,所以其中只有$(2n+1)$个变量是独立的。选择怎样的 $2n+1$ 个变量作为独立变量,通常可以有多种方案。但是,对于一个具体的正则变换来说,这种选择绝不是任意的[4]。独立变量的选择,是要根据变换的情况来判定的。下面反过来做:在预先假定某 $2n+1$ 个变量可以作为变换的独立变量的前提下,来寻找这一类变换的明显表达式。

如取 U 作为 q_s,p_s,Q_s,P_s 和 t 的函数,则有

$$\mathrm{d}U = \sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial U}{\partial q_s}\mathrm{d}q_s + \frac{\partial U}{\partial p_s}\mathrm{d}p_s + \frac{\partial U}{\partial Q_s}\mathrm{d}Q_s + \frac{\partial U}{\partial P_s}\mathrm{d}P_s\right) + \frac{\partial U}{\partial t}\mathrm{d}t$$

于是式(13.3.9)可写成

$$\sum_{s=1}^{n}\left\{\left(p_s-\frac{\partial U}{\partial q_s}\right)\mathrm{d}q_s-\left(P_s+\frac{\partial U}{\partial Q_s}\right)\mathrm{d}Q_s-\frac{\partial U}{\partial p_s}\mathrm{d}p_s-\frac{\partial U}{\partial P_s}\mathrm{d}P_s\right\}+\left(H^*-H-\frac{\partial U}{\partial t}\right)\mathrm{d}t=0 \tag{13.3.10}$$

下面研究四种基本形式的正则变换[5,6]。

1)第一类母函数

记作 U_1，有形式

$$U_1=U_1(q_s,Q_s,t) \tag{13.3.11}$$

即选 $q_s,Q_s(s=1,2,\cdots,n),t$ 作为 $2n+1$ 个独立变量。这种变换显然是存在的，由补充关系

$$\frac{\partial(Q_1,Q_2,\cdots,Q_n)}{\partial(p_1,p_2,\cdots,p_n)}\neq 0 \tag{13.3.12}$$

所规定。它保证了量 t,q_s,Q_s 的独立性，这些量便可取作独立变量。这样的变换就是所谓自由正则变换。因为只要式(13.3.12)成立，就可由式(13.3.2)的前 n 个方程将广义动量 $p_s(s=1,2,\cdots,n)$ 用 $2n+1$ 个量 $t,q_s,Q_s(s=1,2,\cdots,n)$ 来表示。因此，依赖于变量(t,q_s,p_s)的任何函数都可以写成变量 t,q_s,Q_s 的函数形式。

将式(13.3.11)代入式(13.3.10)，得到

$$\sum_{s=1}^{n}\left\{\left(p_s-\frac{\partial U_1}{\partial q_s}\right)\mathrm{d}q_s-\left(P_s+\frac{\partial U_1}{\partial Q_s}\right)\mathrm{d}Q_s\right\}+\left[H^*-\left(H+\frac{\partial U_1}{\partial t}\right)\right]\mathrm{d}t=0$$

考虑到 $\mathrm{d}q_s,\mathrm{d}Q_s,\mathrm{d}t$ 的独立性，得到

$$p_s=\frac{\partial U_1}{\partial q_s},P_s=-\frac{\partial U_1}{\partial Q_s},H^*=H+\frac{\partial U_1}{\partial t}\qquad(s=1,2,\cdots,n) \tag{13.3.13}$$

这样，由式(13.3.13)第一式可求得

$$p_s=p_s(q_k,Q_k,t)\qquad(s,k=1,2,\cdots,n) \tag{13.3.14}$$

由式(13.3.13)第二式可求得

$$P_s=P_s(q_k,Q_k,t) \tag{13.3.15}$$

由此可解出

$$q_s=q_s(Q_k,P_k,t) \tag{13.3.16}$$

将式(13.3.16)代入式(13.3.14)，就得到

$$p_s=p_s(Q_k,P_k,t) \tag{13.3.17}$$

再由式(13.3.16)和(13.3.17)可解得

$$Q_s=Q_s(q_k,p_k,t),P_s=P_s(q_k,p_k,t) \tag{13.3.18}$$

于是，已知母函数(13.3.11)，可求得正则变换(13.3.18)以及由式(13.3.13)最后一式求出新的 Hamilton 函数 H^*。

为保证母函数生成的变换的可逆性，还应要求 U_1 满足

$$\det\left(\frac{\partial^2 U_1}{\partial q_s\partial Q_k}\neq 0\right) \tag{13.3.19}$$

2)第二类母函数

记作 F_2，有形式

$$U_2=F_2(q_s,P_s,t)-\sum_{s=1}^{n}Q_sP_s \tag{13.3.20}$$

于是有

$$\frac{\partial U_2}{\partial q_s}=\frac{\partial F_2}{\partial q_s},\frac{\partial U_2}{\partial p_s}=0,\frac{\partial U_2}{\partial Q_s}=-P_s,\frac{\partial U_2}{\partial P_s}=\frac{\partial F_2}{\partial P_s}-Q_s \tag{13.3.21}$$

将式(13.3.21)代入式(13.3.10),得到

$$\sum_{s=1}^{n}\left\{\left(p_s-\frac{\partial F_2}{\partial q_s}\right)\mathrm{d}q_s+\left(Q_s-\frac{\partial F_2}{\partial P_s}\right)\mathrm{d}P_s\right\}+\left(H^*-H-\frac{\partial F_2}{\partial t}\right)\mathrm{d}t=0$$

由此有

$$P_s=\frac{\partial F_2}{\partial q_s},Q_s=\frac{\partial F_2}{\partial P_s},H^*=H+\frac{\partial F_2}{\partial t} \tag{13.3.22}$$

其中前两式给出

$$p_s=p_s(q_k,P_k,t) \tag{13.3.23}$$

$$Q_s=Q_s(q_k,P_k,t) \tag{13.3.24}$$

由式(13.3.24)解得

$$q_s=q_s(Q_k,P_k,t) \tag{13.3.25}$$

将其代入式(13.3.23),可解得

$$p_s=p_s(Q_k,P_k,t) \tag{13.3.26}$$

因此,存在变换(13.3.25),(13.3.26)。而式(13.3.22)最后一式给出新的 Hamilton 函数 H^*。

为保证变换的可逆性,要求满足条件

$$\det\left(\frac{\partial^2 F_2}{\partial q_k \partial P_s}\right)\neq 0 \tag{13.3.27}$$

3)第三类母函数

记作 F_3,有形式

$$U_3=F_3(p_s,Q_s,t)+\sum_{s=1}^{n}p_s q_s \tag{13.3.28}$$

用类似方法,得到

$$P_s=-\frac{\partial F_3}{\partial Q_s},q_s=-\frac{\partial F_3}{\partial p_s},H^*=H+\frac{\partial F_3}{\partial t} \tag{13.3.29}$$

为保证变换的可逆性,要求满足

$$\det\left(\frac{\partial^2 F_3}{\partial p_k \partial Q_s}\right)\neq 0 \tag{13.3.30}$$

4)第四类母函数

记作 F_4,有形式

$$U_4=F_4(p_s,P_s,t)+\sum_{s=1}^{n}p_s q_s-\sum_{s=1}^{n}P_s Q_s \tag{13.3.31}$$

用类似方法,得到

$$q_s=-\frac{\partial F_4}{\partial p_s},Q_s=\frac{\partial F_4}{\partial P_s},H^*=H+\frac{\partial F_4}{\partial t} \tag{13.3.32}$$

为保证变换的可逆性,要求满足

$$\det\left(\frac{\partial^2 F_4}{\partial p_k \partial P_s}\right) \neq 0 \tag{13.3.33}$$

以上是用四类母函数表达的四类正则变换公式。当然,这四类正则变换不是正则变换的全部。但是,这四类正则变换也是足够广泛的了。

如在上述母函数 U_1, F_2, F_3, F_4 中不显含时间 t,那么显然有 $H^* = H$,此时式(13.3.9)可写成

$$\sum_{s=1}^{n} p_s \mathrm{d}q_s - \sum_{s=1}^{n} P_s \mathrm{d}Q_s = \mathrm{d}U \tag{13.3.34}$$

这种变换称为接触变换。

13.3.3 Mathieu 变换和点变换

1)Mathieu 变换

对于正则变换

$$\sum_{s=1}^{n} p_s \mathrm{d}q_s - \sum_{s=1}^{n} P_s \mathrm{d}Q_s + (H^* - H)\mathrm{d}t = \mathrm{d}U$$

若 $H^* = H, U = 0$,则成为一特殊的正则变换,此时有

$$\sum_{s=1}^{n} P_s \mathrm{d}Q_s = \sum_{s=1}^{n} p_s \mathrm{d}q_s \tag{13.3.35}$$

这种变换首先由 Mathieu EL(1835—1890)于 1874 年所研究。这种正则变换也构成一个群,并且是一般正则变换群的子群。

2)点变换

若 Q 单独由 q 决定,P 由 p 决定,那么这种变换称为增广点变换,其变换式为

$$Q_s = Q_s(q_k), P_s = P_s(p_k) \qquad (s, k = 1, 2, \cdots, n) \tag{13.3.36}$$

如果 $Q_s(q)$ 和 $P_s(p)$ 是线性函数,那么这种变换称为增广线性点变换,其表达式为

$$Q_s = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{sk} q_k, P_s = \sum_{k=1}^{n} \beta_{sk} p_k \qquad (s = 1, 2, \cdots, n) \tag{13.3.37}$$

其中 α_{sk}, β_{sk} 都是常数。

容易证明,增广线性点变换(13.3.37)的系数只要满足

$$\sum_{s=1}^{n} \alpha_{sr} \beta_{sk} = \delta_{rk} \qquad (r, k = 1, 2, \cdots, n) \tag{13.3.38}$$

则其必为正则变换。

假设引入一组广义坐标 Q_s ($s = 1, 2, \cdots, n$),它与原广义坐标 $q_k (k = 1, 2, \cdots, n)$ 由可逆位形变换关系来联系

$$Q_s = f_s(q_k, t) \qquad (s, k = 1, 2, \cdots, n) \tag{13.3.39}$$

满足条件

$$\frac{\partial(f_1,f_2,\cdots,f_n)}{\partial(q_1,q_2,\cdots,q_n)}\neq 0$$

这种变换称为点变换，其母函数为

$$F_2=\sum_{s=1}^{n}f_s(q_k,t)P_s \tag{13.3.40}$$

其变换式为

$$p_s=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f_k}{\partial q_s}P_k, Q_s=f_s(q_k,t), H^*=H+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial f_s}{\partial t}P_s \tag{13.3.41}$$

13.3.4 无限小正则变换

考虑第二类母函数

$$F_2=\sum_{s=1}^{n}q_sP_s \tag{13.3.42}$$

利用式(13.3.22)，得到

$$p_s=\frac{\partial F_2}{\partial q_s}=P_s, Q_s=\frac{\partial F_2}{\partial P_s}=q_s, H^*=H+\frac{\partial F_2}{\partial t}=H \tag{13.3.43}$$

显然，这就是相空间的恒等变换。

现假设新的相坐标(Q_s,P_s)与旧的相坐标(q_s,p_s)之差为无限小的正则变换，可写成

$$Q_s=q_s+\delta q_s, P_s=p_s+\delta p_s \qquad (s=1,2,\cdots,n) \tag{13.3.44}$$

显然，无限小正则变换与恒等变换之差为无限小。考虑到式(13.3.42)，则无限小正则变换的母函数可写成

$$F_2=\sum_{s=1}^{n}q_sp_s+\varepsilon G(q_k,P_k,t) \tag{13.3.45}$$

其中 ε 为无限小参数，于是有

$$p_s=\frac{\partial F_2}{\partial q_s}=P_s+\varepsilon\frac{\partial G}{\partial q_s}, Q_s=\frac{\partial F_2}{\partial P_s}=q_s+\varepsilon\frac{\partial G}{\partial P_s}$$

或

$$\delta p_s=P_s-p_s=-\varepsilon\frac{\partial G}{\partial q_s}, \delta q_s=Q_s-q_s=\varepsilon\frac{\partial G}{\partial P_s}$$

因 P_s 与 p_s 之差为无限小，$G(\boldsymbol{Q},\boldsymbol{P},t)$中的 $\boldsymbol{P}$ 可近似地以 $\boldsymbol{p}$ 代替，而将 G 看成是$(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},t)$的函数，这样，上式可改写为

$$\delta p_s=-\varepsilon\frac{\partial G}{\partial q_s}, \delta q_s=\varepsilon\frac{\partial G}{\partial p_s} \qquad (s=1,2,\cdots,n) \tag{13.3.46}$$

因此，G 成为无限小正则变换的母函数。

在特殊情况下，可选 Hamilton 函数 $H(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},t)$作为母函数 $G(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},t)$，$\mathrm{d}t$ 作为 ε，于是有

$$\delta p_s = -\mathrm{d}t\,\frac{\partial H}{\partial q_s} = \dot{p}_s\mathrm{d}t = \mathrm{d}p_s,\ \delta p_s = \mathrm{d}t\,\frac{\partial H}{\partial q_s} = \dot{q}_s\mathrm{d}t = \mathrm{d}q_s \qquad (13.3.47)$$

这表明,力学系统由时刻 t 的相点(q_s, p_s),到时刻 $t+\mathrm{d}t$ 的相点(Q_s, P_s)之间的状态变换,就是 Hamilton 函数 $H(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},t)$作为母函数,无限小时间 $\mathrm{d}t$ 作为无限小参数的无限小正则变换。把由 Hamilton 方程决定的这种相空间的相流称为无限小动力学变换。因此,由 Hamilton 方程决定的无限小动力学变换是无限小正则变换。动力学系统从 t_0 至 t 有限时间内的运动,可以看成是由许多相继的无限小时间 $\mathrm{d}t$ 的正则变换表达出来的。这许多持续的无限小正则变换,合成一个单独的有限时间 $t-t_0$ 的正则变换。因此,动力学系统自 t_0 时的相点$(\boldsymbol{q}_0, \boldsymbol{p}_0)$经运动变化到 t 时的相点$(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})$,可用时间的连续函数的正则变换表示出来。Hamilton 函数 $H(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},t)$就是变换的母函数。

13.3.5 应用举例

例 1 试证变换

$$Q = \ln\left(\frac{1}{q}\sin p\right),\ P = q\cot p$$

是正则的,并求出与该变换相关的四类母函数。

解:做计算,有

$$\begin{aligned} p\mathrm{d}q - P\mathrm{d}Q &= (p + \cot p)\mathrm{d}q - q\cot^2 p\,\mathrm{d}p \\ &= \mathrm{d}(qp + q\cot p) \end{aligned}$$

因此,变换是正则的,母函数为

$$U = qp + q\cot p$$

在第一类变换下,母函数应选为 q, Q 的函数。由变换式解出 p,有

$$p = \arccos\sqrt{1 - q^2\exp(2Q)}$$

代入 U,得

$$U_1 = q\arccos\sqrt{1 - q^2\exp(2Q)} + \sqrt{\exp(-2Q) - q^2}$$

作为验证,由式(13.3.13),得

$$p = \frac{\partial U_1}{\partial q} = \arccos\sqrt{1 - q^2\exp(2Q)},\ P = -\frac{\partial U_1}{\partial Q} = \sqrt{\exp(-2Q) - q^2}$$

对第二类变换,母函数应选为 q, P 的函数。由变换式解出 p, Q,有

$$p = \arctan\frac{q}{P},\ Q = -\ln\sqrt{q^2 + P^2}$$

利用 U，得

$$F_2=U_2+QP=qp+q\cot p+QP$$
$$=q\arctan\frac{q}{P}+P(1-\ln\sqrt{q^2+P^2})$$

作为验证，由式(13.3.22)知

$$p=\frac{\partial F_2}{\partial q}=\arctan\frac{q}{P},Q=\frac{\partial F_2}{\partial P}=-\ln\sqrt{q^2+P^2}$$

对第三类变换，母函数应选为 p,Q 的函数。由变换式解出 q，有

$$q=\exp(-Q)\sin p$$

由式(13.3.28)知

$$F_3=U_3-qp=qp+q\cot p-qp=\exp(-Q)\cos p$$

用式(13.3.29)来验证

$$P=-\frac{\partial F_3}{\partial Q}=-\exp(-Q)\cos p,q=-\frac{\partial F_3}{\partial p}=\exp(-Q)\sin p$$

对第四类母函数，应取为 p,P 的函数。由变换式解出 q,Q，有

$$q=P\tan p,Q=\ln\frac{\cos p}{P}$$

由式(13.3.31)得

$$F_4=U_4-pq+PQ=P+P\ln\frac{\cos p}{P}$$

用式(13.3.32)验证，有

$$q=-\frac{\partial F_4}{\partial p}=P\tan p,Q=\frac{\partial F_4}{\partial P}=\ln\frac{\cos p}{P}$$

在所有情况下，母函数都不显含 t，因此

$$H^*=H$$

例 2 用正则变换求解平面谐振子的运动。

解：所谓平面谐振子是指一质量为 m 的质点在势能

$$V=\frac{1}{2}m(\omega_1^2x^2+\omega_2^2y^2)$$

的影响下，在平面 Oxy 上的运动。此时 Hamilton 函数为

$$H=T+V=\frac{1}{2m}(p_x^2+p_y^2)+\frac{1}{2}m(\omega_1^2x^2+\omega_2^2y^2)$$

如规定母函数为

$$U_1=\frac{1}{2}m(\omega_1x^2\cot Q_1+\omega_2y^2\cot Q_2)$$

它属于第一类母函数，由式(13.3.13)得

$$p_x=\frac{\partial U_1}{\partial x}=m\omega_1 x\cot Q_1, p_y=\frac{\partial U_1}{\partial y}=m\omega_2 y\cot Q_2$$

$$P_1=-\frac{\partial U_1}{\partial Q_1}=\frac{1}{2}m\omega_1 x^2\csc^2 Q_1, P_2=-\frac{\partial U_1}{\partial Q_2}=\frac{1}{2}m\omega_2 y^2\csc^2 Q_2$$

将所得 p_x, p_y 代入式(13.3.13)最后一式，得

$$H^*=\frac{1}{2}m(\omega_1^2 x^2\csc^2 Q_1+\omega_2^2 y^2\csc^2 Q_2)=\omega_1 P_1+\omega_2 P_2$$

于是新的正则变量表示的谐振子的运动方程为

$$\dot{P}_1=-\frac{\partial H^*}{\partial Q_1}=0, \dot{P}_2=-\frac{\partial H^*}{\partial Q_2}=0$$

$$\dot{Q}_1=\frac{\partial H^*}{\partial P_1}=\omega_1, \dot{Q}_2=\frac{\partial H^*}{\partial P_2}=\omega_2$$

积分得

$$P_1=C_1, P_2=C_2, Q_1=\omega_1 t+\varepsilon_1, Q_2=\omega_2 t+\varepsilon_2$$

其中 $C_1, C_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2$ 为积分常数，由初始条件确定。而谐振子在 Oxy 平面上的运动方程，回到原来坐标，为

$$x=\sqrt{\frac{2C_1}{m\omega_1}}\sin(\omega_1 t+\varepsilon_1), y=\sqrt{\frac{2C_2}{m\omega_2}}\sin(\omega_2 t+\varepsilon_2)$$

此例表明，在正则变换下，新方程较原方程要简单得多。

§13.4 积分不变量

Poincaré H(1854—1912)为研究天体的运动，特别是三体问题中渐近的和双渐近运动的稳定性，广泛应用了积分不变量。积分不变量在统计物理、量子力学及微分方程定性理论中获得了应用。

13.4.1 Poincaré 一阶线性相对积分不变量

在 $2n$ 维相空间$(q_1, q_2, \cdots, q_n, p_1, p_2, \cdots, p_n)$，对由 Hamilton 方程

$$\dot{q}_s=\frac{\partial H}{\partial p_s}, \dot{p}_s=-\frac{\partial H}{\partial q_s} \qquad (s=1,2,\cdots,n) \tag{13.4.1}$$

决定的完整保守系统的运动来说，存在如下的线性相对积分不变量

$$I_1=\oint\sum_{s=1}^{n} p_s\delta q_s$$

上述结论不难证明。实际上，令

$$\Phi(t,\alpha)=\int_{t_1}^{t_2} L\mathrm{d}t$$

有

$$\begin{aligned}\delta\Phi &=\frac{\partial}{\partial\alpha}\Phi(t,\alpha)\mathrm{d}\alpha=\delta\int_{t_1}^{t_2} L\ \mathrm{d}t=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_s}\delta q_s\Big|_{t_1}^{t_2}\\ &=\sum_{s=1}^{n} p_s\delta q_s\Big|_{t=t_2}-\sum_{s=1}^{n} p_s\delta q_s\Big|_{t=t_1}\end{aligned}\tag{13.4.2}$$

相点的初始位置的封闭轮廓 C_0，依赖于参数 α。以 C_0 上每个点为起始点建立相点的轨道，正好得到某个管形轨道。每个时刻 t 值相应于管形轨道的某个截面（相点的某个封闭轮廓）。为使系统初始状态的轮廓是封闭的，参数 α 应是另一参数的周期函数，即初值 α_1 与终值 α_2 应重合：$\alpha_1=\alpha_2$，这时有

$$\oint\delta\Phi(t,\alpha)=\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\delta\Phi(t,\alpha)=0$$

因此式(13.4.2)给出

$$\oint_{\mathrm{II}}\sum_{s=1}^{n}p_s\delta q_s-\oint_{\mathrm{I}}\sum_{s=1}^{n}p_s\delta q_s=0$$

这里Ⅰ和Ⅱ分别代表相应于时刻 t_1 和 t_2 的管形轨道截面的封闭轮廓。因此，对任意时刻都有

$$I_1=\oint\sum_{s=1}^{n}p_s\delta q_s=\text{const.}\tag{13.4.3}$$

这个积分不变量称为 Poincaré 一阶线性相对积分不变量，或称 Poincaré 线性积分不变量。

与上述结论相反的结论也存在。

如果微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}q_s}{\mathrm{d}t}=Q_s(t,q_k,p_k),\frac{\mathrm{d}p_s}{\mathrm{d}t}=P_s(t,q_k,p_k)\qquad(s,k=1,2,\cdots,n)\tag{13.4.4}$$

具有 Poincaré 线性相对积分不变量 I_1，那么它一定有 Hamilton 方程的形式[7]。

13.4.2 高阶积分不变量

现变换式(13.4.3)，因为

$$\delta\sum_{s=1}^{n}p_sq_s=\sum_{s=1}^{n}(q_s\delta p_s+p_s\delta q_s)$$

但

$$\oint\delta\sum_{s=1}^{n}p_sq_s=0$$

于是

$$\oint \sum_{s=1}^{n} q_s \delta p_s = -I_1$$

故 I_1 可写成

$$I_1 = \frac{1}{2} \oint \sum_{s=1}^{n} (p_s \delta q_s - q_s \delta p_s) \tag{13.4.5}$$

应用 Stokes 定理,有

$$\oint_C F_x(x,y)\mathrm{d}x + F_y(x,y)\mathrm{d}y = \iint_\sigma \left(\frac{\partial F_x}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial x}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

这里 σ 是由封闭轮廓 C 限制的任意曲面。于是,式(13.4.5)变为

$$I_1 = \frac{1}{2} \iint_\sigma 2 \sum_{s=1}^{n} \delta p_s \delta q_s = \iint_\sigma \sum_{s=1}^{n} \delta p_s \delta q_s \tag{13.4.6}$$

最后的积分记作 I_2,并称为二阶线性绝对积分不变量,或二阶积分不变量。

Cartan E(1869—1951)借助于他建立的外形式方程证明了存在更高阶的,直至 $2n$ 阶的积分不变量,有形式

$$I_{2k-1} = \underbrace{\iint\cdots\int}_{2k-1} \sum_{i_1 i_2 \cdots i_k} p_{i_1} \delta q_{i_1} \delta p_{i_2} \delta q_{i_2} \cdots \delta p_{i_k} \delta q_{i_k} \qquad (k=2,3,\cdots,n) \tag{13.4.7}$$

$$I_{2k} = \underbrace{\iint\cdots\int}_{2k} \sum_{i_1 i_2 \cdots i_k} \delta p_{i_1} \delta q_{i_1} \delta p_{i_2} \delta q_{i_2} \cdots \delta p_{i_k} \delta q_{i_k} \qquad (k=2,3,\cdots,n) \tag{13.4.8}$$

奇数阶不变量是相对的,偶数阶不变量是绝对的。此外,如果沿计算 I_{2m-1} 的轮廓是对 I_{2m} 的积分区域的边界,则有

$$I_{2m} = I_{2m-1} \qquad (m=1,2,\cdots,n) \tag{13.4.9}$$

这类积分不变量也称为万有积分不变量,或通用积分不变量。因为它们不依赖于 Hamilton 函数 H,因此,对任何 Hamilton 系统都对。

设

$$I = \iint\cdots\int M(x,t)\delta x_1 \delta x_2 \cdots \delta x_m \tag{13.4.10}$$

按照状态方程

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = X_i(x_j, t) \qquad (i,j=1,2,\cdots,m) \tag{13.4.11}$$

在 $m+1$ 维空间中变化,现在来看要使 I 是积分不变量,则 M 必须满足什么条件。设方程(13.4.11)的通解为

$$x_i = x_i(t, \alpha_j) \qquad (i,j=1,2,\cdots,m) \tag{13.4.12}$$

其中 $\alpha_j (j=1,2,\cdots,m)$ 为积分常数。对每一个运动来说,α_j 不变,与时间无关。

这样，可将 I 用 Jacobi 积分表示为

$$I=\iint\cdots\int M\frac{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_m)}{\partial(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)}\mathrm{d}\alpha_1\mathrm{d}\alpha_2\cdots\mathrm{d}\alpha_m$$

上式 α 的积分限不是时间 t 的函数，积分的区域是任意设定的。因此，有积分不变量的充分必要条件是

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[M\frac{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_m)}{\partial(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)}\right]=0 \tag{13.4.13}$$

令

$$J=\frac{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_m)}{\partial(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x_1}{\partial\alpha_1} & \dfrac{\partial x_2}{\partial\alpha_1} & \cdots & \dfrac{\partial x_m}{\partial\alpha_1}\\ \dfrac{\partial x_1}{\partial\alpha_2} & \dfrac{\partial x_2}{\partial\alpha_2} & \cdots & \dfrac{\partial x_m}{\partial\alpha_2}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \dfrac{\partial x_1}{\partial\alpha_m} & \dfrac{\partial x_2}{\partial\alpha_m} & \cdots & \dfrac{\partial x_m}{\partial\alpha_m}\end{vmatrix}$$

因为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial x_i}{\partial\alpha_j}\right)=\frac{\partial\dot{x}_i}{\partial\alpha_j}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial X_i}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial\alpha_j}$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}t}=\begin{vmatrix}\displaystyle\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial X_1}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial\alpha_1} & \dfrac{\partial x_2}{\partial\alpha_1} & \cdots & \dfrac{\partial x_m}{\partial\alpha_1}\\ \displaystyle\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial X_1}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial\alpha_2} & \dfrac{\partial x_2}{\partial\alpha_2} & \cdots & \dfrac{\partial x_m}{\partial\alpha_2}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \displaystyle\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial X_1}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial\alpha_m} & \dfrac{\partial x_2}{\partial\alpha_m} & \cdots & \dfrac{\partial x_m}{\partial\alpha_m}\end{vmatrix}+$$

$$\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x_1}{\partial\alpha_1} & \displaystyle\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial X_2}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial\alpha_1} & \cdots & \dfrac{\partial x_m}{\partial\alpha_1}\\ \dfrac{\partial x_1}{\partial\alpha_2} & \displaystyle\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial X_2}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial\alpha_2} & \cdots & \dfrac{\partial x_m}{\partial\alpha_2}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \dfrac{\partial x_1}{\partial\alpha_m} & \displaystyle\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial X_2}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial\alpha_m} & \cdots & \dfrac{\partial x_m}{\partial\alpha_m}\end{vmatrix}+\cdots+$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial x_2}{\partial x_1} & \cdots & \sum_{k=1}^{m} & \frac{\partial X_m}{\partial x_k} & \frac{\partial x_k}{\partial \alpha_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \alpha_2} & \frac{\partial x_2}{\partial \alpha_2} & \cdots & \sum_{k=1}^{m} & \frac{\partial X_m}{\partial x_k} & \frac{\partial x_k}{\partial \alpha_2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial x_1}{\partial \alpha_m} & \frac{\partial x_2}{\partial \alpha_m} & \cdots & \sum_{k=1}^{m} & \frac{\partial X_m}{\partial x_k} & \frac{\partial x_k}{\partial \alpha_m} \end{vmatrix}$$

$$=\left(\frac{\partial X_1}{\partial x_1}\right)J+\left(\frac{\partial X_2}{\partial x_2}\right)J+\cdots+\left(\frac{\partial X_m}{\partial x_m}\right)J$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial X_i}{\partial x_i}\right)J \tag{13.4.14}$$

由式(13.4.13),有

$$J\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}+M\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}t}=0 \tag{13.4.15}$$

将式(13.4.15)代入式(13.4.14),得

$$J\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}+M\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial X_i}{\partial x_i}\right)J=0$$

或

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x_i}(MX_i)+\frac{\partial M}{\partial t}=0 \tag{13.4.16}$$

于是有如下结论:

常微分方程组(13.4.11)具有 m 阶绝对积分不变量(13.4.10)的充分必要条件是,函数 M 满足式(13.4.16)。

方程(13.4.16)中的 M 就是 Jacobi 乘子[8]。

对于 Hamilton 系统的相积分

$$I=\underbrace{\iint\cdots\int}_{2n}\delta p_1\delta q_1\delta p_2\delta q_2\cdots\delta p_n\delta q_n \tag{13.4.17}$$

与式(13.4.10)比较可知,$m=2n$,$M=1$,而式(13.4.11)成为

$$X_i=\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}=\dot{q}_i=\frac{\partial H}{\partial p_i}\qquad(i=1,2,\cdots,n)$$

$$X_i=\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}=\dot{p}_{i-n}=-\frac{\partial H}{\partial q_{i-n}}\qquad(i=n+1,n+2,\cdots,2n)$$

将这些代入式(13.4.16),有

$$\sum_{i=1}^{2n}\frac{\partial X_i}{\partial x_i}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{\partial H}{\partial p_i}\right)+\sum_{i=n+1}^{2n}\frac{\partial}{\partial p_{i-n}}\left(-\frac{\partial H}{\partial q_{i-n}}\right)=0$$

因此有 **Liouville 定理:**

Hamilton 正则方程所决定的相空间的状态变化保持相体积不变,即

$$I=\underbrace{\iint\cdots\int}_{2n}\delta p_1\delta q_1\,\delta p_2\delta q_2\cdots\delta p_n\delta q_n$$

是绝对积分不变量。

13.4.3 正则变换与积分不变量

正则变换与积分不变量的关系有如下 Poincaré 定理：

二阶绝对积分不变量 $I_2=\iint\limits_D\sum\limits_{i=1}^{n}\delta p_i\delta q_i$ 在坐标的正则变换下是不变的，即

$$\iint\limits_D\sum_{i=1}^{n}\delta p_i\delta q_i=\iint\limits_D\sum_{k=1}^{n}\delta P_k\delta Q_k \tag{13.4.18}$$

证明如下。

因积分区域 D 是相空间中的任意二维曲面，为表征相点在曲面上的位置，选两个参数 u 和 v，以使

$$q_i=q_i(u,v),\,p_i=p_i(u,v)$$

于是有

$$\delta p_i\delta q_i=\frac{\partial(p_i,q_i)}{\partial(u,v)}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

同样有

$$\delta P_k\delta Q_k=\frac{\partial(P_k,Q_k)}{\partial(u,v)}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

因此，式(13.4.18)成为

$$\iint\limits_D\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial(p_i,q_i)}{\partial(u,v)}\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\iint\limits_D\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial(P_k,Q_k)}{\partial(u,v)}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

因为积分域 D 是任意的，u，v 是彼此独立的，因此上式仅当 Jacobi 行列式之和相等才是可能的，即

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial(p_i,q_i)}{\partial(u,v)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial(P_k,Q_k)}{\partial(u,v)} \tag{13.4.19}$$

下面证明式(13.4.19)成立。为此，研究由母函数 $U_1(\boldsymbol{q},\boldsymbol{Q},t)$ 确定的正则变换，有

$$p_i=\frac{\partial U_1}{\partial q_i},\,P_i=-\frac{\partial U_1}{\partial Q_i}$$

这时

$$\frac{\partial p_i}{\partial u}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 U_1}{\partial q_i\partial q_k}\frac{\partial q_k}{\partial u}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 U_1}{\partial q_i\partial Q_k}\frac{\partial Q_k}{\partial u}$$

$$\frac{\partial p_i}{\partial v}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 U_1}{\partial q_i\partial q_k}\frac{\partial q_k}{\partial v}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 U_1}{\partial q_i\partial Q_k}\frac{\partial Q_k}{\partial v}$$

于是有

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial(p_i,q_i)}{\partial(u,v)}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\partial^2 U_1}{\partial q_i\partial q_k}\frac{\partial(q_k,q_i)}{\partial(u,v)}+\frac{\partial^2 U_1}{\partial q_i\partial Q_k}\frac{\partial(Q_k,q_k)}{\partial(u,v)}\right]$$

等式右端第一个和等于零,因为它不依赖指标 i 及 k 的顺序,而同时位于其中的行列式,当交换这些指标位置时,符号改变。因此有

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial(p_i,q_i)}{\partial(u,v)}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 U_1}{\partial q_i\partial Q_k}\frac{\partial(Q_k,q_i)}{\partial(u,v)}$$

类似地,有

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial(P_k,Q_k)}{\partial(u,v)}=-\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 U_1}{\partial Q_k\partial q_i}\frac{\partial(q_i,Q_k)}{\partial(u,v)}$$

这就证明了式(13.4.19)成立。定理得证。

考虑到式(13.4.6),定理表明,一阶 Poincaré 积分不变量 I_1 在正则变换下也是不变的。

13.4.4 关于积分不变量的唯一性定理

1947 年李华宗(1911—1949)证明了无论是相对的还是绝对的任意阶通用积分不变量的唯一性。他指出,任何其他通用积分不变量仅和上列积分之一相差一个常因子[9]。尤其重要的是关于一阶积分不变量的**李华宗定理**。

如果

$$I'_1=\oint\sum_{i=1}^{n}[A_i(t,q_k,p_k)\delta q_i+B_i(t,q_k,p_k)\delta p_i]$$

是通用相对积分不变量,则

$$I'_1=CI_1$$

这里 C 是常数,I_1 是 Poincaré 线性积分不变量。

证明见文献[3,7]。

13.4.5 Poincaré-Cartan 积分不变量

Hamilton 作用量的非等时变分为

$$\begin{aligned}\Delta\int_{t_1(\alpha)}^{t_2(\alpha)}L\mathrm{d}t&=\int_{t_1}^{t_2}\delta L\mathrm{d}t+L\,\Delta t\Big|_{t_1}^{t_2}\\&=\sum_{i=1}^{n}\Big(p_i\delta q_i\Big|_{t=t_2}-p_i\delta q_i\Big|_{t=t_1}\Big)+L\Big|_{t=t_2}\Delta t_2-L\Big|_{t=t_1}\Delta t_1\end{aligned}$$

利用非等时变分与等时变分间的关系,有

$$\Delta q_i\Big|_{t=t_k}=\delta q_i\Big|_{t=t_k}+\dot q_i(t_k)\Delta t_k\qquad(k=1,2)$$

以及 Hamilton 函数 $H=\sum_{i=1}^{n}p_i\dot q_i-L$,可将作用量非等时变分表示为

$$\begin{aligned}\Delta\int_{t_1}^{t_2}L\mathrm{d}t=&\Big[\sum_{i=1}^{n}p_i\Delta q_i\Big|_{t=t_2}-H\Big|_{t=t_2}\Delta t_2\Big]-\\&\Big[\sum_{i=1}^{n}p_i\Delta q_i\Big|_{t=t_1}-H\Big|_{t=t_1}\Delta t_1\Big]\end{aligned}$$

研究在初值 α_1 与终值 α_2 相重合条件下相轨道对参数 α 的依赖性，选 Hamilton 作用量非等时变分由 α_1 到 α_2 的区间的积分，得到

$$\oint_{\mathrm{II}}\left(\sum_{i=1}^{n} p_i\Delta q_i - H\Delta t\right) - \oint_{\mathrm{I}}\left(\sum_{i=1}^{n} p_i\Delta q_i - H\Delta t\right) = 0$$

或者

$$\oint\left(\sum_{i=1}^{n} p_i\Delta q_i - H\Delta t\right) = \text{const.} \tag{13.4.20}$$

这就是 **Poincaré-Cartan 积分不变量。**

这就证明了 Hamilton 方程存在 Poincaré-Cartan 积分不变量。

在计算 Poincaré-Cartan 积分不变量时，研究扩充的相空间中的管形轨道。该空间除广义坐标 q_i 和广义动量 p_i 外，还有时间 t 作为坐标，而沿其积分的环绕管形轨道的轮廓不一定是同时状态的轮廓。

上述命题的逆命题也对，于是有下述结论。

相空间的状态方程

$$\frac{\mathrm{d}q_i}{\mathrm{d}t} = Q_i(t, q_j, p_j), \frac{\mathrm{d}q_i}{\mathrm{d}t} = P_i(t, q_j, p_j) \qquad (i, j = 1, 2, \cdots, n)$$

是 Hamilton 方程的充分必要条件是，存在 Poincaré-Cartan 积分不变量

$$I = \oint\left(\sum_{i=1}^{n} p_i\Delta q_i - H\Delta t\right)$$

13.4.6 应用举例

例 1 谐振子的运动用方程

$$\ddot{q} + \omega^2 q = 0$$

来描述。试计算积分不变量 I_1 和 I_2。

解: 方程的解为

$$q = C_1\sin\omega t + C_2\cos\omega t$$

其中 C_1 和 C_2 依赖于运动的初始条件。取

$$C_1 = \rho\cos\alpha, C_2 = b\rho\sin\alpha$$

在计算 I_1 时，$\rho = \rho_0$，而计算 I_2 时，ρ 由 0 到 ρ_0 变化，$b = \text{const.}$，α 由 0 到 2π 变化。

动能为

$$T = \frac{1}{2}a\dot{q}^2$$

因此

$$p = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = a\dot{q} = a\omega(C_1\cos\omega t - C_2\sin\omega t)$$

计算积分不变量

$$I_1 = \oint p\delta q = \int_0^{2\pi} p\frac{\partial q}{\partial \alpha}\mathrm{d}\alpha$$

$$= a\omega\rho_0^2\int_0^{2\pi}(\cos\alpha\cos\omega t - b\sin\alpha\sin\omega t)(b\cos\alpha\cos\omega t - \sin\alpha\sin\omega t)\mathrm{d}\alpha$$

$$= ab\omega\rho_0^2\pi$$

而

$$I_2 = \int_0^{\rho_0}\int_0^{2\pi}\frac{\partial(p,q)}{\partial(\rho,\alpha)}\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\alpha$$

$$= \int_0^{\rho_0}\int_0^{2\pi} b\rho a\omega\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\alpha = ab\omega\rho_0^2\pi$$

例 2 研究例 1 的谐振子的积分不变量在坐标的正则变换下的性质。

解:取母函数

$$U_1 = \frac{1}{2}a\omega q^2\cot Q$$

此时有

$$P = -\frac{\partial U_1}{\partial Q} = \frac{1}{2}a\omega q^2\frac{1}{\sin^2 Q}, p = \frac{\partial U_1}{\partial q} = a\omega q\cot Q$$

由此得

$$q = \sqrt{\frac{2P}{a\omega}}\sin Q, P = \sqrt{2a\omega P}\cos Q$$

列写 Hamilton 函数

$$H = T + V = \frac{1}{2}a\dot{q}^2 + \frac{1}{2}cq^2 = \frac{1}{2a}p^2 + \frac{1}{2}cq^2$$

其中 $c = a\omega^2$ 是恢复力的系数。写出变换后的 Hamilton 函数

$$H^* = H + \frac{\partial U_1}{\partial t} = \omega P\cos^2 Q + \omega P\sin^2 Q = \omega P$$

这时 Hamilton 正则方程为

$$\dot{Q} = \frac{\partial H^*}{\partial P} = \omega, \dot{P} = -\frac{\partial H^*}{\partial Q} = 0$$

由此得

$$P = \text{const.}, Q = \omega t + \gamma$$

且

$$P = \frac{E}{\omega}$$

其中 E 为振子的总能量。常数 E 及 γ 与常数 C_1 及 C_2 用以下关系相联系

$$E=\frac{1}{2}a\omega^2(C_1^2+C_2^2),\gamma=\arctan\frac{C_1}{C_2}$$

因此，用例 1 中的 $C_1=\rho\cos\alpha, C_2=b\rho\sin\alpha$ 表示为

$$E=\frac{1}{2}a\omega^2\rho^2(\cos^2\alpha+b^2\sin^2\alpha),\gamma=\arctan(b\tan\alpha)$$

计算积分不变量，有

$$\begin{aligned}I_1&=\oint P\delta Q=\int_0^{2\pi}\frac{E}{\omega}\frac{\partial Q}{\partial\gamma}\frac{\partial\gamma}{\partial\alpha}\mathrm{d}\alpha\\&=\int_0^{2\pi}\frac{a\omega\rho_0^2(\cos^2\alpha+b^2\sin^2\alpha)b}{2(1+b^2\tan^2\alpha)}\mathrm{d}\alpha\\&=\frac{1}{2}ab\omega\rho_0^2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\alpha=ab\omega\rho_0^2\pi\end{aligned}$$

类似地，有

$$I_2=\iint\delta P\delta Q=\int_0^{\rho_0}\int_0^{2\pi}\frac{\partial(P,Q)}{\partial(\rho,\alpha)}\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\alpha=ab\omega\rho_0^2\pi$$

例 3 单自由度系统的微分方程为

$$\ddot{q}+2n\dot{q}+k^2q=0$$

其中 $k>n>0$，试计算积分不变量。

解：方程的解为

$$q=(C_1\sin\omega t+C_2\cos\omega t)\exp(-nt)\qquad(\omega=\sqrt{k^2-n^2})$$

引入积分常数 C_1 及 C_2 对参数 ρ 及 α 的依赖关系

$$C_1=\rho_0\cos\alpha,C_2=b\rho_0\sin\alpha$$

动能为

$$T=\frac{1}{2}a\dot{q}^2$$

广义动量为

$$p=\frac{\partial T}{\partial\dot{q}}=a\dot{q}=a\exp(-nt)[C_1(\omega\cos\omega t-n\sin\omega t)-$$

$$C_2(\omega\sin\omega t+n\cos\omega t)]$$

计算 $\oint p\delta q$，有

$$\oint p\delta q=\pi ab\omega\rho_0^2\exp(-nt)$$

它不是一个常数。当 $t\to\infty$ 时，$\oint p\delta q\to 0$。

本章讨论了 Hamilton 方程的若干经典积分方法，包括 Poisson 方法、Jacobi方法、正则变换、积分不变量等。在第 16～22 章将研究各类约束力学系统的某些近代积分方法。

思考题

13.1 Poisson 方法能应用于完整非保守系统吗?

13.2 Jacobi 方法能应用于完整非保守系统吗?

13.3 为什么说正则变换是分析动力学研究的重要手段?

13.4 积分不变量有什么应用?

习题

13.1 已知 $\varphi=q\cos\omega t+\frac{p}{\omega}\sin\omega t$，$\psi=p\cos\omega t-q\omega\sin\omega t$ 是 Hamilton 系统的两个积分，试计算 Poisson 括号(φ,ψ)，并说明它是否是新的积分。

13.2 已知 $\varphi=\varphi\left[\sum_{s=1}^{n}(p_s^2+q_s^3)\right]$，$\psi=\psi\left[\sum_{s=1}^{n}(p_s^2+q_s^3)\right]$，试计算 Poisson 括号。

13.3 试证，对 Hamilton 函数为

$$H=H[\varphi_1(q_1,p_1),\varphi_2(q_2,p_2),\cdots,\varphi_n(q_n,p_n),t]$$

的方程组来说，函数 $\varphi_s(q_s,p_s)(s=1,2,\cdots,n)$是第一积分。

13.4 已知 Hamilton 函数为

$$H=\frac{1}{2}(p_1^2+q_1^2\cos q_1)q_2^2+\frac{1}{2}p_2^2\cos q_2$$

试建立 Hamilton-Jacobi 方程，并求其完全积分。

答：

$$S=-\alpha_2 t+\int\sqrt{\alpha_1^2-q_1^2\cos q_1}\,\mathrm{d}q_1+\int\sqrt{\frac{2\alpha_2-\alpha_1 q_2^2}{\cos q_2}}\,\mathrm{d}q_2$$

13.5 某系统 Hamilton 函数为

$$H=\frac{p^2}{2m}\exp\left(-\frac{q}{a}\right)\qquad(a,m\text{ 为常数})$$

试建立 Hamilton-Jacobi 方程，并求其完全积分以及问题的解。

答：$S=-ht+2a\sqrt{2mh}\exp\left(\frac{q}{2a}\right)$

$$p=\sqrt{2mh}\exp\left(\frac{q}{2a}\right),q=2a\ln\frac{\sqrt{h}(t+\beta)}{\sqrt{2ma}}$$

13.6 试证变换

$$Q=P\exp q, P=q+\exp(-q)+\ln p$$

是正则变换，并求变换的母函数。

答：$U=P[(1-q-\ln p)\exp q-1]$

13.7 如利用下列关系把变量 q,p 变换为 Q,P：$q=\varphi_1(Q,P)$，$p=\varphi_2(Q,P)$，则当

$$\frac{\partial(q,p)}{\partial(Q,P)}=1$$

时，这种变换是一正则变换。

13.8 变换

$$Q_1=-p_1, P_1=q_1, Q_r=q_r, P_r=p_r \qquad (r=2,3,\cdots,n)$$

不属于四类基本变换，但是一个正则变换。

13.9 试证变换

$$q=(2Q)^{\frac{1}{2}}k^{-\frac{1}{2}}\cos P, p=(2Q)^{\frac{1}{2}}k^{\frac{1}{2}}\sin P$$

为一正则变换，并将正则方程

$$\dot{q}=\frac{\partial H}{\partial p}, \dot{p}=-\frac{\partial H}{\partial q}$$

过渡到

$$\dot{Q}=\frac{\partial H^*}{\partial P}, \dot{P}=-\frac{\partial H^*}{\partial Q}$$

式中 $H=\frac{1}{2}(p^2+k^2q^2), H^*=kQ$

13.10 如果方程为

$$\ddot{q}-2n\dot{q}+k^2q=0 \qquad (k>n>0)$$

试计算 $\oint p\delta q$。

参考文献

[1]Arnold VI. Mathematical Methods of Classical Mechaniics[M]. New York: Springer-Verlag, 1978.

[2]刘正福，沙永海．分析力学解题指导及习题集[M]．北京：高等教育出版社，1992.

[3]Гатмахер ФР. Лекции по Аналитической Механике[M]. Москва: ФИЗМАТГИЗ, 1960.

[4]陈滨．分析动力学[M]．北京：北京大学出版社，1987.

[5]汪家訸．分析力学[M]．北京：高等教育出版社，1983.

[6]梅凤翔，刘桂林．分析力学基础[M]．西安：西安交通大学出版社，1987.

[7]梅凤翔,刘端,罗勇．高等分析力学[M]．北京:北京理工大学出版社,1991.

[8]Appell P. Traité de Mécanique Rationnelle[M]. TⅡ, Sixième Édition. Paris:Gauthier-Villars,1953.

[9] Hwa-Ching Lee. Invariants of Hamilton system and applications to the theory of canonical transformations [J]. Proc Roy Soc Edinbourg Ser AV. LⅩⅡ,1947:237-247.

[10]Добронравов ВВ. Основы Аналитической Механики[M]. Москва: Высшая Школа,1976.

14 非完整系统

1894 年德国物理学家 Hertz H(1857—1894)首次提出将约束和系统分成完整的和非完整的两大类。非完整系统与完整系统的差别在于，完整系统的运动可用第二类 Lagrange 方程来描述，而非完整系统需用更复杂的微分方程来表征。非完整力学的奠基性工作，有 Чаплыгин CA(1869—1942)，Volterra V(1860—1940)，Appell P(1855—1930)，Воронец ПВ(1871—1923)，Hamel G(1877—1954)等的工作。

§14.1 基本概念

分析力学的基本概念有约束及其分类、广义坐标和广义速度、准坐标和准速度、虚位移与自由度、理想约束等，这些已在第 1 章至第 4 章介绍过。对非完整系统来说，约束对虚位移的限制，以及微分运算与变分运算的交换关系等问题尤显重要。

14.1.1 约束对虚位移的限制

不可积分的微分约束称为**非完整约束**。至少有一个非完整约束的系统称为**非完整系统**。一般说来，非完整约束是靠接触、靠摩擦来实现的，例如，冰刀不允许横滑[1]、尖缘小轮和带横纹的小轮[1]、两个轴相联结的轮子[2]、滚球[2]、滚盘[2]、三圆柱系统[1]、四轮小车[3]、三轮桌台[4]，等等。这些都是物理实现明显的、线性非完整约束。为得到线性非完整约束加在虚位移上的条件，通常采用 Hölder 原则：将约束方程写成微分形式，用 δ 代替 d，并令 $\delta t=0$。

1911 年 Appell[5]和 Delassus[6]开始研究非线性非完整约束。Appell 给出一个例子，这个例子已成为经典，并还在研究[7-9]。对 Appell 例 $a^2(\dot{x}^2+\dot{y}^2)-\dot{z}^2=0$，如采用 Hölder 原则，则虚位移满足

$$a^2[(\delta x)^2+(\delta y)^2]-(\delta z)^2=0$$

在利用 d'Alembert-Lagrange 原理推导运动微分方程时,这样的虚位移方程是不行的。于是,对非线性非完整约束,怎样给出约束对虚位移的限制条件就出现了困难。1933 年 Четаев НГ(1902—1959)提出一个条件,称为 Четаев 条件。对一般的非线性非完整约束

$$f_\beta(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})=0 \qquad (\beta=1,2\cdots,g) \tag{14.1.1}$$

虚位移 $\delta\boldsymbol{q}$ 满足

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\delta q_s=0 \tag{14.1.2}$$

假设约束(14.1.1)是理想的,再加上条件(14.1.2),便可利用 d'Alembert-Lagrange原理来导出非线性非完整系统的运动微分方程了。

Румянцев ВВ(1921—2007)在 20 世纪 70 年代末曾在法国南特高等机械工程学校(École Nationalle Superièure de Mécanique)作学术报告,其中讲到 Четаев 条件。1981 年春天,本书作者在该校进修时也讲到 Четаев 条件。该校校长,也是作者的指导教师 Pironneau Y(1923—1983)教授,认为这个条件是人为强加的。他认为对非线性非完整约束问题有无穷多个解。他与作者讨论过三次。一次,他举一个例子:一单位质量质点在平面 Oxy 上运动,受速度大小为常数的非完整约束

$$\dot{x}^2+\dot{y}^2=c^2$$

则点的虚位移是 $\delta z=0$,δx,δy 任意,Четаев 条件不对。作者的意见是 Четаев 条件也对。例如,在主动力为零下的运动,按 Четаев 条件,微分方程为

$$\ddot{x}=2\lambda\dot{x}, \qquad \ddot{y}=2\lambda\dot{y}$$

其中 λ 为约束乘子,则有

$$0=\dot{x}\ddot{x}+\dot{y}\ddot{y}=2\lambda(\dot{x}^2+\dot{y}^2)$$

于是 $\lambda=0$。方程成为

$$\ddot{x}=0, \qquad \ddot{y}=0$$

这与 δx,δy 任意是一样的。

条件(14.1.2)也称为 Appell-Четаев 定义,或 Gauss-Appell-Четаев 假定[10]。

14.1.2 微分运算 d 与变分运算 δ 的交换关系

非完整力学中的**交换关系**,或称"过渡方程",即微分运算 d 和变分运算 δ 的交换性问题,是非完整力学的基本问题之一[11,12]。研究这一问题的重要性,不仅在于利用交换关系可以推导系统的运动微分方程,还在于交换关系与 Hamilton 原理能否应用于非完整系统,以及 Hamilton-Jacobi 经典积分方法能否应用于非完整系统等问题密切相关。

历史上,对交换关系的形式有两种观点:一种认为 d,δ 总可以交换,不论约

束完整与否，代表人物是 Hölder OL(1859—1937)；另一种观点则认为 d，δ 的交换性仅对完整系统才成立，代表人物是 Суслов ГК(1857—1935)，Levi-Civita T(1873－1941)。1961 年 Лурье 指出，dδ＝δd 是采用变分法则的结果，可以采用其他法则使等式不成立[3]。1966 年 Новосёлов 指出，交换关系的 Hölder 形式和 Суслов 形式都可应用于非完整系统 Hamilton 原理的研究[13]。

下面在 **Четаев 条件**下导出非完整系统的交换关系。设力学系统的位形由 n 个广义坐标 $q_s(s=1,2,\cdots,n)$ 来确定，它的运动受有 g 个双面理想 Четаев 型非完整约束

$$\dot{q}_{\varepsilon+\beta}=\varphi_\beta(q_s,\dot{q}_\sigma,t) \qquad (\beta=1,2,\cdots,g;\sigma=1,2,\cdots,\varepsilon;\varepsilon=n-g) \tag{14.1.3}$$

按 Четаев 条件，虚位移满足

$$\delta q_{\varepsilon+\beta}=\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial\dot{q}_\sigma}\delta q_\sigma \tag{14.1.4}$$

将式(14.1.4)对 t 求导数，对式(14.1.3)取变分，并将所得结果相减，得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta q_{\varepsilon+\beta})-\delta\dot{q}_{\varepsilon+\beta}=\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial\dot{q}_\sigma}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta q_\sigma)-\delta\dot{q}_\sigma\right]+\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}T_\sigma^{\varepsilon+\beta}\delta q_\sigma \tag{14.1.5}$$

其中

$$T_\sigma^{\varepsilon+\beta}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial\dot{q}_\sigma}-\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial q_\sigma}-\sum_{\gamma=1}^{g}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial q_{\varepsilon+\gamma}}\frac{\partial\varphi_\gamma}{\partial\dot{q}_\sigma} \tag{14.1.6}$$

考虑到对独立的 δq_σ，有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta q_\sigma-\delta\dot{q}_\sigma=0 \qquad (\sigma=1,2,\cdots,\varepsilon) \tag{14.1.7}$$

则式(14.1.5)成为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta q_{\varepsilon+\beta})-\delta\dot{q}_{\varepsilon+\beta}=\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}T_\sigma^{\varepsilon+\beta}\delta q_\sigma \qquad (\beta=1,2,\cdots,g) \tag{14.1.8}$$

称式(14.1.7)，式(14.1.8)为 Суслов 观点下的交换关系。这表明，对与独立广义速度 $\dot{q}_\sigma$ 相应的坐标 q_σ，d 与 δ 运算可以交换；而对与不独立的广义速度 $\dot{q}_{\varepsilon+\beta}$ 相应的坐标 $q_{\varepsilon+\beta}$，d 与 δ 运算不能交换，而由式(14.1.8)决定。

特别地，对于线性非完整约束

$$\dot{q}_{\varepsilon+\beta}=\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}B_{\varepsilon+\beta,\sigma}\dot{q}_\sigma+B_{\varepsilon+\beta} \qquad (\beta=1,2,\cdots,g) \tag{14.1.9}$$

式(14.1.8)给出

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta q_{\varepsilon+\beta})-\delta\dot{q}_{\varepsilon+\beta}=\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}t_\sigma^{\varepsilon+\beta}\delta q_\sigma \qquad (\beta=1,2,\cdots,g) \tag{14.1.10}$$

其中

$$t_\sigma^{\varepsilon+\beta}=\sum_{\nu=1}^{\varepsilon}\Big[\Big(\frac{\partial B_{\varepsilon+\beta,\sigma}}{\partial q_\nu}\frac{\partial B_{\varepsilon+\beta,\nu}}{\partial q_\sigma}\Big)+\sum_{\gamma=1}^{g}\Big(\frac{\partial B_{\varepsilon+\beta,\sigma}}{\partial q_{\varepsilon+\gamma}}B_{\varepsilon+\gamma,\nu}-\frac{\partial B_{\varepsilon+\beta,\nu}}{\partial q_{\varepsilon+\gamma}}B_{\varepsilon+\gamma,\sigma}\Big)\Big]\dot{q}_\nu+\sum_{\gamma=1}^{g}\Big(\frac{\partial B_{\varepsilon+\beta,\sigma}}{\partial q_{\varepsilon+\gamma}}B_{\varepsilon+\gamma}-\frac{\partial B_{\varepsilon+\beta}}{\partial q_{\varepsilon+\gamma}}B_{\varepsilon+\gamma,\sigma}\Big)+\frac{\partial B_{\varepsilon+\beta,\sigma}}{\partial t}-\frac{\partial B_{\varepsilon+\beta}}{\partial q_\sigma} \tag{14.1.11}$$

进而,如果 $B_{\varepsilon+\beta}=0$,且 $B_{\varepsilon+\beta,\sigma}$中不含 $q_{\varepsilon+\gamma}$和 t,则有

$$t_\sigma^{\varepsilon+\beta}=\sum_{\nu=1}^{\varepsilon}\Big(\frac{\partial B_{\varepsilon+\beta,\sigma}}{\partial q_\nu}-\frac{\partial B_{\varepsilon+\beta,\nu}}{\partial q_\sigma}\Big)\dot{q}_\nu \tag{14.1.12}$$

14.1.3 d,δ 交换关系,满足约束的可能轨道与 Четаев 条件三者的协调性

设系统所受非完整约束为式(14.1.1),虚位移方程为式(14.1.2)。要求 d,δ 对所有坐标可交换

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta q_s)-\delta\dot{q}_s=0 \qquad (s=1,2,\cdots,n) \tag{14.1.13}$$

满足约束的可能轨道为

$$\delta f_\beta=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial f_\beta}{\partial q_s}\delta q_s+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\delta\dot{q}_s \qquad (\beta=1,2,\cdots,g) \tag{14.1.14}$$

对非完整系统来说,式(14.1.2),(14.1.13)和(14.1.14)无法同时满足[14]。例如,一质点在平面 Oxy 上运动,所受非完整约束为

$$f=\dot{y}-t\dot{x}=0$$

式(14.1.2)给出

$$\delta y-t\delta x=0$$

式(14.1.13)给出

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta x)=\delta\dot{x},\qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta y)=\delta\dot{y}$$

式(14.1.14)给出

$$\delta f=\delta\dot{y}-t\delta\dot{x}=0$$

如果以上三式同时满足,则会导致

$$\delta x=\delta y=0$$

对非完整系统三个条件(14.1.2),(14.1.13)和(14.1.14)不能同时满足的关键在于,约束方程的变分不能成为虚位移方程。

这样,研究可选三条路线:

1)承认条件(14.1.2)和条件(14.1.13),放弃条件(14.1.14)。

2)承认条件(14.1.2)和条件(14.1.14),放弃条件(14.1.13)。

3)承认条件(14.1.13)和条件(14.1.14),放弃条件(14.1.2)。

第一条路线可称为 Hölder 的,第二条路线可称为 Суслов 的,第三条路线

可称为 Vacco 的。前两条路线是力学的,第三条路线是数学的。专著[15]曾提出疑问:Vacco 模型是允许的,还是不正确的?现在看来,这个模型是允许的。

§14.2 运动微分方程

本节介绍非完整系统的各类运动微分方程,包括 d'Alembert-Lagrange 原理的各种表达、带乘子的方程、Чаплыгин 方程、Boltzmann-Hamel 方程、Appell 方程等。

14.2.1 d'Alembert-Lagrange 原理的各种表达

d'Alembert-Lagrange 原理指出,对具有双面理想约束的质点系,在任意瞬时,作用于其上的主动力和假想的惯性力在系统虚位移所做的无功之和等于零,即

$$\sum_{i=1}^{N}(\boldsymbol{F}_i - m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i)\cdot\delta\boldsymbol{r}_i = 0 \tag{14.2.1}$$

在广义坐标下可表示为 Euler-Lagrange 形式(7.3.8),即

$$\sum_{s=1}^{n}\left(Q_s - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} + \frac{\partial T}{\partial q_s}\right)\delta q_s = 0 \tag{14.2.2}$$

Nielsen 形式(7.3.12),即

$$\sum_{s=1}^{n}\left(Q_s - \frac{\partial \dot{T}}{\partial \dot{q}_s} + 2\frac{\partial T}{\partial q_s}\right)\delta q_s = 0 \tag{14.2.3}$$

以及 Appell 形式(7.3.16),即

$$\sum_{s=1}^{n}\left(Q_s - \frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_s}\right)\delta q_s = 0 \tag{14.2.4}$$

14.2.2 带乘子的方程

设系统所受非完整约束为式(14.1.1),虚位移方程为式(14.1.2)。利用式(14.1.2)及 Lagrange 乘子法,由原理(14.2.2)、(14.2.3)和(14.2.4)分别得到非完整系统带乘子的方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial T}{\partial q_s} = Q_s + \sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s} \qquad (s=1,2,\cdots,n) \tag{14.2.5}$$

$$\frac{\partial \dot{T}}{\partial \dot{q}_s} - 2\frac{\partial T}{\partial q_s} = Q_s + \sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s} \qquad (s=1,2,\cdots,n) \tag{14.2.6}$$

和

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_s} = Q_s + \sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s} \qquad (s=1,2,\cdots,n) \tag{14.2.7}$$

带乘子的方程个数多于自由度数,但是可以求出约束力,因为带乘子 λ_β 的

项就代表广义约束力。

14.2.3 Чаплыгин 方程

假设系统位形由 n 个广义坐标 $q_s(s=1,2,\cdots,n)$ 来确定，所受约束为 g 个双面理想 Четаев 型的

$$\dot{q}_{\varepsilon+\beta}=\varphi_{\beta}(q_s,\dot{q}_\sigma,t) \qquad \begin{pmatrix}\beta=1,2,\cdots,g; & \varepsilon=n-g \\ \sigma=1,2,\cdots,\varepsilon; & s=1,2,\cdots,n\end{pmatrix} \tag{14.2.8}$$

令

$$\widetilde{T}(q_s,\dot{q}_\sigma,t)=T(q_s,\dot{q}_\sigma,\varphi_\beta(q_s,\dot{q}_\sigma,t),t) \tag{14.2.9}$$

为嵌入约束(14.2.8)后的动能表达式，做计算，有

$$\frac{\partial\widetilde{T}}{\partial\dot{q}_\sigma}=\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_\sigma}+\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_{\varepsilon+\beta}}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial\dot{q}_\sigma}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\widetilde{T}}{\partial\dot{q}_\sigma}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_s}+\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_{\varepsilon+\beta}}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial\dot{q}_\sigma}+\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_{\varepsilon+\beta}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial\dot{q}_\sigma}$$

$$\frac{\partial\widetilde{T}}{\partial q_\sigma}=\frac{\partial T}{\partial q_\sigma}+\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_{\varepsilon+\beta}}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial q_\sigma}$$

$$\begin{aligned}\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\widetilde{T}}{\partial\dot{q}_\sigma}-\frac{\partial\widetilde{T}}{\partial q_\sigma}\right)\delta q_\sigma &= \sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_\sigma}-\frac{\partial T}{\partial q_\sigma}\right)\delta q_\sigma \\ &+\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_{\varepsilon+\beta}}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial\dot{q}_\sigma}-\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial q_\sigma}\right)\delta q_\sigma+\sum_{\beta=1}^{g}\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_{\varepsilon+\beta}}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial\dot{q}_\sigma}\delta q_\sigma\end{aligned}$$

注意到约束(14.2.8)对虚位移的 Четаев 条件

$$\delta q_{\varepsilon+\beta}=\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial\dot{q}_\sigma}\delta q_\sigma \tag{14.2.10}$$

则上式表示为

$$\begin{aligned}&\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\widetilde{T}}{\partial\dot{q}_\sigma}-\frac{\partial\widetilde{T}}{\partial q_\sigma}-\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_{\varepsilon+\beta}}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial\dot{q}_\sigma}-\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial q_\sigma}\right)-\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial T}{\partial q_{\varepsilon+\beta}}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial\dot{q}_\sigma}\right\}\delta q_\sigma \\ &=\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_s}-\frac{\partial T}{\partial q_s}\right)\delta q_s\end{aligned}$$

进而可表示为

$$\begin{aligned}&\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\widetilde{T}}{\partial\dot{q}_\sigma}-\frac{\partial\widetilde{T}}{\partial q_\sigma}-\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_{\varepsilon+\beta}}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial\dot{q}_\sigma}-\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial q_\sigma}\right)-\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial T}{\partial q_{\varepsilon+\beta}}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial\dot{q}_\sigma}-\widetilde{Q}_\sigma\right\}\delta q_\sigma \\ &=\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_s}-\frac{\partial T}{\partial q_s}-Q_s\right)\delta q_s\end{aligned} \tag{14.2.11}$$

其中

$$\widetilde{Q}_\sigma = Q_\sigma + \sum_{\beta=1}^{g} Q_{\varepsilon+\beta} \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial \dot{q}_\sigma} \tag{14.2.12}$$

将原理(14.2.2)代入式(14.2.11)，并注意到 $\delta q_\sigma(\sigma=1,2,\cdots,\varepsilon)$ 彼此独立，得到如下方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \widetilde{T}}{\partial \dot{q}_\sigma} - \frac{\partial \widetilde{T}}{\partial q_\sigma} - \sum_{\beta=1}^{g} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial \dot{q}_\sigma} - \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial q_\sigma}\right) - \sum_{\beta=1}^{g} \frac{\partial T}{\partial q_{\varepsilon+\beta}}\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial \dot{q}_\sigma} = \widetilde{Q}_\sigma$$

$$(\sigma=1,2,\cdots,\varepsilon) \tag{14.2.13}$$

方程(14.2.13)称为广义 Чаплыгин 方程，由牛青萍于 1964 年得到[16]。方程(14.2.13)也表示为[13]

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \widetilde{T}}{\partial \dot{q}_\sigma} - \frac{\partial \widetilde{T}}{\partial q_\sigma} - \sum_{\beta=1}^{g} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial \dot{q}_\sigma} - \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial q_\sigma} - \sum_{\gamma=1}^{g}\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial q_{\varepsilon+\gamma}}\frac{\partial \varphi_\gamma}{\partial \dot{q}_\sigma}\right) -$$

$$\sum_{\beta=1}^{g} \frac{\partial \widetilde{T}}{\partial q_{\varepsilon+\beta}}\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial \dot{q}_\sigma} = \widetilde{Q}_\sigma(\sigma = 1,2,\cdots,g) \tag{14.2.14}$$

如果非完整约束是线性的，表示为

$$\dot{q}_{\varepsilon+\beta} = \sum_{\sigma=1}^{\varepsilon} B_{\varepsilon+\beta,\sigma}\dot{q}_\sigma + B_{\varepsilon+\beta} \tag{14.2.15}$$

容易计算得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial \dot{q}_\sigma} - \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial q_\sigma} - \sum_{\gamma=1}^{g}\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial q_{\varepsilon+\gamma}}\frac{\partial \varphi_\gamma}{\partial \dot{q}_\sigma} = \sum_{\nu=1}^{\varepsilon} A_{\sigma\nu}^{\varepsilon+\beta}\dot{q}_\nu + A_\sigma^{\varepsilon+\beta} \tag{14.2.16}$$

其中

$$A_{\sigma\nu}^{\varepsilon+\beta} = \frac{\partial B_{\varepsilon+\beta,\sigma}}{\partial q_\nu} - \frac{\partial B_{\varepsilon+\beta,\nu}}{\partial q_\sigma} + \sum_{\gamma=1}^{g}\left(\frac{\partial B_{\varepsilon+\beta,\sigma}}{\partial q_{\varepsilon+\gamma}}B_{\varepsilon+\gamma,\nu} - \frac{\partial B_{\varepsilon+\beta,\nu}}{\partial q_{\varepsilon+\gamma}}B_{\varepsilon+\gamma,\sigma}\right)$$

$$A_\sigma^{\varepsilon+\beta} = \frac{\partial B_{\varepsilon+\beta,\sigma}}{\partial t} - \frac{\partial B_{\varepsilon+\beta}}{\partial q_\sigma} \tag{14.2.17}$$

将式(14.2.16)代入方程(14.2.14)，得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \widetilde{T}}{\partial \dot{q}_\sigma} - \frac{\partial \widetilde{T}}{\partial q_\sigma} - \sum_{\beta=1}^{g} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}\left(\sum_{\nu=1}^{\varepsilon} A_{\sigma\nu}^{\varepsilon+\beta}\dot{q}_\nu + A_\sigma^{\varepsilon+\beta}\right) - \sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial \widetilde{T}}{\partial q_{\varepsilon+\beta}}B_{\varepsilon+\beta,\sigma} = \widetilde{Q}_\sigma$$

$$(\sigma = 1,2,\cdots,\varepsilon) \tag{14.2.18}$$

方程(14.2.18)称为 **Воронец 方程**，于 1901 年得到，它适合一般的线性非完整约束系统。

进而，如果非完整约束是线性、齐次、定常的，且 $B_{\varepsilon+\beta,\sigma}$ 中不含坐标 $q_{\varepsilon+\gamma}$，动能 T 不含 $q_{\varepsilon+\beta}$，广义力有势，且势能 V 不含 $q_{\varepsilon+\beta}$，则 Воронец 方程(14.2.18)给出原来的 **Чаплыгин 方程**[18]

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \widetilde{T}}{\partial \dot{q}_\sigma} - \frac{\partial \widetilde{T}}{\partial q_\sigma} - \sum_{\beta=1}^{g} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}\sum_{\nu=1}^{\varepsilon}\left(\frac{\partial B_{\varepsilon+\beta,\sigma}}{\partial q_\nu} - \frac{\partial B_{\varepsilon+\beta,\nu}}{\partial q_\sigma}\right)\dot{q}_\nu$$

$$= -\frac{\partial V}{\partial q_\sigma} \qquad (\sigma=1,2,\cdots,\varepsilon) \tag{14.2.19}$$

Чаплыгин 型方程(14.2.13),(14.2.14),(14.2.18),(14.2.19)的个数等于系统自由度数目 $\varepsilon=n-g$。广义 Чаплыгин 方程(14.2.13),(14.2.14)以及 Воронец 方程(14.2.18)仍需与约束方程联合求解。Чаплыгин 方程(14.2.19)可独立于约束方程进行研究,虽然限制较多,但相当多的非完整系统可用 Чаплыгин 方程来描述。

14.2.4 Boltzmann-Hamel 方程

首先,将 d'Alembert-Lagrange 原理(14.2.2)在准坐标下表达。取彼此函数独立的准速度

$$\omega_s=\omega_s(q_k,\dot{q}_k,t) \qquad (s,k=1,2,\cdots,n) \tag{14.2.20}$$

设由此可解出广义速度

$$\dot{q}_s=\dot{q}_s(q_k,\omega_k,t) \tag{14.2.21}$$

令 T^* 为用准速度表示的动能,即

$$T^*(q_s,\omega_s,t)=T(q_k,\dot{q}_k(q_s,\omega_s,t),t) \tag{14.2.22}$$

于是有

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial T^*}{\partial \omega_s}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \omega_s}\\
&\frac{\partial T^*}{\partial \pi_s}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial T^*}{\partial q_k}\frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \omega_s}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial q_k}\frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \omega_s}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \pi_s}\\
&\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T^*}{\partial \omega_s}-\frac{\partial T^*}{\partial \pi_s}\right)\delta\pi_s=\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}-\frac{\partial T}{\partial q_k}\right)\frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \omega_s}\delta\pi_s+\\
&\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \omega_s}-\frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \pi_s}\right)\delta\pi_s
\end{aligned} \tag{14.2.23}$$

下面变换式(14.2.23)右端第二项。将式(14.2.21)代入式(14.2.20),得到恒等式

$$\omega_s=\omega_s(q_k,\dot{q}_k(q_r,\omega_r,t),t)$$

将两端对 ω_r 求偏导数,得

$$0=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial \omega_r}{\partial \dot{q}_k}\frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \omega_r} \qquad (r\neq s), \qquad 1=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial \omega_s}{\partial \dot{q}_k}\frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \omega_s}$$

于是有

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial \omega_s}{\partial \dot{q}_k}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \omega_r}=-\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \omega_r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \omega_s}{\partial \dot{q}_k} \tag{14.2.24}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial \omega_s}{\partial \dot{q}_k}\frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \pi_r}=-\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \omega_r}\frac{\partial \omega_s}{\partial q_k} \tag{14.2.25}$$

将式(14.2.24),(14.2.25)代入式(14.2.23),并注意到

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial T^*}{\partial \omega_s} \frac{\partial \omega_s}{\partial \dot{q}_k} \tag{14.2.26}$$

$$\delta q_k = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \omega_s} \delta \pi_s \tag{14.2.27}$$

得到

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^{n} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial T^*}{\partial \omega_s} - \frac{\partial T^*}{\partial \pi_s} \right) \delta \pi_s = \sum_{s=1}^{n} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial T}{\partial q_s} \right) \delta q_s - \\ \sum_{s=1}^{n} \sum_{r=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial T^*}{\partial \omega_k} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial \omega_k}{\partial \dot{q}_r} - \frac{\partial \omega_k}{\partial q_r} \right) \frac{\partial \dot{q}_r}{\partial \omega_s} \delta \pi_s \end{aligned} \tag{14.2.28}$$

于是，d'Alembert-Lagrange 原理在准坐标下表示为

$$\sum_{s=1}^{n} \left\{ -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial T^*}{\partial \omega_s} + \frac{\partial T^*}{\partial \pi_s} - \sum_{k=1}^{n} \sum_{r=1}^{n} \frac{\partial T^*}{\partial \omega_k} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial \omega_k}{\partial \dot{q}_r} - \frac{\partial \omega_k}{\partial q_r} \right) \frac{\partial \dot{q}_r}{\partial \omega_s} + P_s^* \right\} \delta \pi_s = 0 \tag{14.2.29}$$

其中

$$P_s^* = \sum_{k=1}^{n} Q_k \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \omega_s} \tag{14.2.30}$$

其次，由原理(14.2.29)导出非完整系统的 Boltzmann-Hamel 方程。设系统受有 g 个双面理想 Четаев 型非完整约束

$$f_\beta(q_s, \dot{q}_s, t) = 0 \qquad (\beta = 1, 2, \cdots, g) \tag{14.2.31}$$

选后面 g 个准速度为

$$\omega_{\varepsilon+\beta} = f_\beta(q_s, \dot{q}_s, t) \qquad (\beta = 1, 2, \cdots, g) \tag{14.2.32}$$

则有

$$\omega_{\varepsilon+\beta} = 0, \delta \pi_{\varepsilon+\beta} = 0 \tag{14.2.33}$$

将其代入原理(14.2.29)，由 $\delta\pi_\sigma$ 的独立性得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial T^*}{\partial \omega_\sigma} - \frac{\partial T^*}{\partial \pi_\sigma} + \sum_{k=1}^{n} \sum_{r=1}^{n} \frac{\partial T^*}{\partial \omega_k} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial \omega_k}{\partial \dot{q}_r} - \frac{\partial \omega_k}{\partial q_r} \right) \frac{\partial \dot{q}_r}{\partial \omega_\sigma} = P_\sigma^*$$

$$(\sigma = 1, 2, \cdots, \varepsilon) \tag{14.2.34}$$

这就是一般一阶非完整系统的 **Boltzmann-Hamel 方程**[19]。值得注意的是，条件 $\omega_{\varepsilon+\beta} = 0, (\beta = 1, 2, \cdots, g)$ 仅在计算 $\partial T^* / \partial \omega_k$ 之后才可应用。

对线性约束情形，有

$$\omega_s = \sum_{k=1}^{n} a_{sk} \dot{q}_k + a_s, \qquad \dot{q}_r = \sum_{k=1}^{n} b_{rk} \omega_k + b_r \tag{14.2.35}$$

于是

$$\sum_{r=1}^{n} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial \omega_k}{\partial \dot{q}_r} - \frac{\partial \omega_k}{\partial q_r} \right) \frac{\partial \dot{q}_r}{\partial \omega_\sigma} = \sum_{s=1}^{n} \gamma_{s\sigma}^k \omega_s + \varepsilon_\sigma^k = \sum_{\nu=1}^{\varepsilon} \gamma_{\nu\sigma}^k \omega_\nu + \varepsilon_\sigma^k$$

其中

$$\gamma_{s\sigma}^{k}=\sum_{m=1}^{n}\sum_{r=1}^{n}\left(\frac{\partial a_{kr}}{\partial q_m}-\frac{\partial a_{km}}{\partial q_r}\right)b_{ms}b_{r\sigma} \tag{14.2.36}$$

$$\varepsilon_{\sigma}^{k}=\sum_{m=1}^{n}\sum_{r=1}^{n}\left(\frac{\partial a_{kr}}{\partial q_m}-\frac{\partial a_{km}}{\partial q_r}\right)b_{r\sigma}b_m+\sum_{r=1}^{n}\left(\frac{\partial a_{kr}}{\partial t}-\frac{\partial a_k}{\partial q_r}\right)b_{r\sigma}$$

而 $\gamma_{s\sigma}^{k}$ 称为 Boltzmann 三标记号，此时方程(14.2.34)成为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T^*}{\partial\omega_\sigma}-\frac{\partial T^*}{\partial\pi_\sigma}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial T^*}{\partial\omega_k}\sum_{\nu=1}^{\varepsilon}\gamma_{\nu\sigma}^{k}\omega_\nu+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial T^*}{\partial\omega_k}\varepsilon_\sigma^k=P_\sigma^*$$
$$(\sigma=1,2,\cdots,\varepsilon) \tag{14.2.37}$$

Boltzmann-Hamel 方程是准坐标下的方程，写起来较长，它的优点在于不仅可用于双面约束系统，还可用于单面约束系统。

14.2.5 Appell 方程

设非完整约束为

$$\dot{q}_{\varepsilon+\beta}=\varphi_\beta(q_s,\dot{q}_\sigma,t)\qquad\begin{pmatrix}\beta=1,2,\cdots,g;\ \sigma=1,2,\cdots,\varepsilon;\\ \varepsilon=n-g;\qquad s=1,2,\cdots,n\end{pmatrix} \tag{14.2.38}$$

加在虚位移上的条件为

$$\delta q_{\varepsilon+\beta}=\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial\dot{q}_\sigma}\delta q_\sigma \tag{14.2.39}$$

将式(14.2.39)代入原理(14.2.4)，由 δq_σ 的独立性得到 Maggi 型方程

$$Q_\sigma+\sum_{\beta=1}^{g}Q_{\varepsilon+\beta}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial\dot{q}_\sigma}-\frac{\partial S}{\partial\ddot{q}_\sigma}-\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial S}{\partial\ddot{q}_{\varepsilon+\beta}}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial\dot{q}_\sigma}=0\qquad(\sigma=1,2,\cdots,\varepsilon) \tag{14.2.40}$$

令 $\widetilde{S}$ 为 S 中消失与不独立广义速度相应的广义加速度 $\ddot{q}_{\varepsilon+\beta}$所得表达式，即

$$\widetilde{S}(q_s,\dot{q}_s,\ddot{q}_\sigma,t)=S(q_s,\dot{q}_s,\ddot{q}_\sigma,\dot{\varphi}_\beta(q_s,\dot{q}_s,\ddot{q}_\sigma,t),t) \tag{14.2.41}$$

则有

$$\frac{\partial\widetilde{S}}{\partial\ddot{q}_\sigma}=\frac{\partial S}{\partial\ddot{q}_\sigma}+\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial S}{\partial\ddot{q}_{\varepsilon+\beta}}\frac{\partial\dot{\varphi}_\beta}{\partial\ddot{q}_\sigma}=\frac{\partial S}{\partial\ddot{q}_\sigma}+\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial S}{\partial\ddot{q}_{\varepsilon+\beta}}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial\dot{q}_\sigma}$$

将其代入方程(14.2.40)，得到广义坐标表示的 **Appell 方程**[20]

$$\frac{\partial\widetilde{S}}{\partial\ddot{q}_\sigma}=\widetilde{Q}_\sigma\qquad(\sigma=1,2,\cdots,\varepsilon) \tag{14.2.42}$$

其中

$$\widetilde{Q}_\sigma=Q_\sigma+\sum_{\beta=1}^{g}Q_{\varepsilon+\beta}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial\dot{q}_\sigma} \tag{14.2.43}$$

选准速度为

$$\omega_\sigma=\omega_\sigma(q_s,\dot{q}_s,t),\qquad\omega_{\varepsilon+\beta}=f_\beta(q_s,\dot{q}_s,t) \tag{14.2.44}$$

设由此可解得广义速度

$$\dot{q}_s = \dot{q}_s(q_k, \omega_\sigma, t) \tag{14.2.45}$$

虚位移方程为

$$\delta q_s = \sum_{\sigma=1}^{\varepsilon} \frac{\partial \dot{q}_s}{\partial \omega_\sigma} \delta \pi_\sigma \tag{14.2.46}$$

将其代入原理(14.2.4)，由 $\delta\pi_\sigma$ 的独立性，得到

$$\sum_{s=1}^{n} Q_s \frac{\partial \dot{q}_s}{\partial \omega_\sigma} - \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_s} \frac{\partial \dot{q}_s}{\partial \omega_\sigma} = 0 \qquad (\sigma = 1, 2, \cdots, \varepsilon) \tag{14.2.47}$$

令

$$S^*(q_s, \omega_\sigma, \dot{\omega}_\sigma, t) = S(q_s, \dot{q}_s(q_k, \omega_\sigma, t), \ddot{q}_s(q_k, \omega_\sigma, \dot{\omega}_\sigma, t), t) \tag{14.2.48}$$

则有

$$\frac{\partial S^*}{\partial \dot{\omega}_\sigma} = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_s} \frac{\partial \dot{q}_s}{\partial \omega_\sigma} = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_s} \frac{\partial \dot{q}_s}{\partial \omega_\sigma}$$

将其代入式(14.2.47)，得到准速度表示的 Appell 方程

$$\frac{\partial S^*}{\partial \dot{\omega}_\sigma} = P_\sigma^* \qquad (\sigma = 1, 2, \cdots, \varepsilon) \tag{14.2.49}$$

其中

$$P_\sigma^* = \sum_{s=1}^{n} Q_s \frac{\partial \dot{q}_s}{\partial \omega_\sigma} \tag{14.2.50}$$

Appell 方程具有单一形式，只要能列写加速度能量函数 S，就能马上列出运动微分方程。应用它的主要困难在于构造函数 S。

14.2.6 关于 Lindelöf 方程

1895 年，芬兰著名数学家 Lindelöf E(1870—1946)在研究有回转面刚体沿水平面纯滚动问题时，写出两个非完整约束方程并将其代入动能中，认为这样就完全考虑了非完整性，而因此可建立第二类 Lagrange 方程[21]。

Lindelöf 方程可表示为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}_\sigma} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q_\sigma} = 0 \tag{14.2.51}$$

其中 $\tilde{L}$ 为嵌入非完整约束后的 Lagrange 函数。但是，方程(14.2.51)，对非完整系统，一般说是不对的。因此，方程(14.2.51)也称为 Lindelöf 错误。类似的错误也发生在 Schouten(1888)，Crescini(1889)，Appell(1896)，Klein(1902)等的工作中。

Lindelöf 的解使 Appell 非常高兴，并把它作为第二类 Lagrange 方程的应用例子写进他的《理性力学》(1896 年，第一版)中。后来，他发现不对了，证明直接应用 Lagrange 方程于最小数目参数的不可能性，并于 1899 年导出了他的适

用于完整系统和非完整系统的运动方程的普遍公式，即 Appell 方程。1897 年，Чаплыгин 纠正了 Lindelöf 的结果，导出了非完整系统的正确方程(14.2.19)。

Lindelöf 错误是一个科学错误。科学错误往往在科学发展过程中起重要的推动作用。

例 1 Appell-Hamel 例。

质量为 m 的质点在重力作用下运动，所受非完整约束为

$$\dot{z}=\frac{b}{a}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{\frac{1}{2}}$$

其中 a,b 为常数，试组建问题的运动微分方程。

解：首先，用 Чаплыгин 方程列写运动微分方程。质点的动能为

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)$$

嵌入约束后为

$$\widetilde{T}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)(\dot{x}^2+\dot{y}^2)$$

做计算，有

$$\frac{\partial\widetilde{T}}{\partial\dot{x}}=m\dot{x}\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right),\qquad \frac{\partial\widetilde{T}}{\partial\dot{y}}=m\dot{y}\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)$$

$$\frac{\partial\dot{z}}{\partial\dot{x}}=\frac{b}{a}\dot{x}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{-\frac{1}{2}},\qquad \frac{\partial\dot{z}}{\partial\dot{y}}=\frac{b}{a}\dot{y}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{-\frac{1}{2}}$$

注意到势能为

$$V=mgz$$

代入广义 Чаплыгин 方程(14.2.13)，得到

$$m\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)\ddot{x}-m\frac{b}{a}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{b}{a}\dot{x}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{-\frac{1}{2}}\right]=-mg\frac{b}{a}\dot{x}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$m\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)\ddot{y}-m\frac{b}{a}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{b}{a}\dot{y}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{-\frac{1}{2}}\right]=-mg\frac{b}{a}\dot{y}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{-\frac{1}{2}}$$

整理得

$$\ddot{x}+\frac{b^2}{a^2}\dot{x}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{-1}(\dot{x}\ddot{x}+\dot{y}\ddot{y})=-\frac{gb}{a}\dot{x}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\ddot{y}+\frac{b^2}{a^2}\dot{y}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{-1}(\dot{x}\ddot{x}+\dot{y}\ddot{y})=-\frac{gb}{a}\dot{y}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{-\frac{1}{2}}$$

其次，利用 Appell 方程。加速度能为

$$S=\frac{1}{2}m(\ddot{x}^2+\ddot{y}^2+\ddot{z}^2)$$

于是有

$$\widetilde{S}=\frac{1}{2}m\left(\ddot{x}^2+\ddot{y}^2+\frac{b^2(\dot{x}\ddot{x}+\dot{y}\ddot{y})^2}{a^2(\dot{x}^2+\dot{y}^2)}\right)$$

$$\frac{\partial\widetilde{S}}{\partial\ddot{x}}=m\left(\ddot{x}+\frac{b^2\dot{x}(\dot{x}\ddot{x}+\dot{y}\ddot{y})}{a^2(\dot{x}^2+\dot{y}^2)}\right)$$

$$\frac{\partial\widetilde{S}}{\partial\ddot{y}}=m\left(\ddot{y}+\frac{b^2\dot{y}(\dot{x}\ddot{x}+\dot{y}\ddot{y})}{a^2(\dot{x}^2+\dot{y}^2)}\right)$$

$$\widetilde{Q}_x=Q_x+Q_z\frac{\partial\dot{z}}{\partial\dot{x}}=-\frac{mgb\dot{x}}{a\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}$$

$$\widetilde{Q}_y=Q_x+Q_z\frac{\partial\dot{z}}{\partial\dot{y}}=-\frac{mgb\dot{y}}{a\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}$$

Appell 方程(14.2.42)给出

$$\frac{\partial\widetilde{S}}{\partial\ddot{x}}=\widetilde{Q}_x,\qquad\frac{\partial\widetilde{S}}{\partial\ddot{y}}=\widetilde{Q}_y$$

代入，与前面结果一样。

例 2 匀质圆球在水平面上的纯滚动。

解：取球心坐标(x,y)及三个 Euler 角 ψ,θ,φ 为广义坐标。表示球与平面接触点的速度为零的非完整约束为

$$\dot{x}+a(\dot{\varphi}\cos\psi\sin\theta-\dot{\theta}\sin\psi)=0$$

$$\dot{y}+a(\dot{\varphi}\sin\psi\sin\theta-\dot{\theta}\cos\psi)=0$$

取准速度为

$$\omega_1=\dot{\theta}\cos\psi+\dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi$$

$$\omega_2=\dot{\theta}\sin\psi-\dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi$$

$$\omega_3=\dot{\psi}+\dot{\varphi}\cos\theta$$

$$\omega_4=\dot{x}+a(\dot{\varphi}\cos\psi\sin\theta-\dot{\theta}\sin\psi)$$

$$\omega_5=\dot{y}+a(\dot{\varphi}\sin\psi\sin\theta+\dot{\theta}\cos\psi)$$

其中 $\omega_1,\omega_2,\omega_3$ 为圆球角速度在与固定坐标系相平行的坐标系上的投影，而 ω_4,ω_5 按约束方程选取。圆球的动能为

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)+\frac{1}{2}\frac{2}{5}ma^2(\dot{\psi}^2+\dot{\theta}^2+\dot{\varphi}^2+2\dot{\varphi}\dot{\psi}\cos\theta)$$

用准速度表示为

$$T^{*}=\frac{1}{2}m\left\{\frac{7}{5}a^{2}(\omega_1^2+\omega_2^2)+\frac{2}{5}a^{2}\omega_3^2+2a\omega_2\omega_4-2a\omega_1\omega_5+\omega_4^2+\omega_5^2\right\}$$

计算 Boltzmann 三标记号，得

$$\gamma_{23}^{1}=-\gamma_{32}^{1}=1,\qquad \gamma_{31}^{2}=-\gamma_{13}^{2}=1,\qquad \gamma_{12}^{3}=-\gamma_{21}^{3}=1$$

$$\gamma_{13}^{4}=-\gamma_{31}^{4}=a,\qquad \gamma_{23}^{5}=-\gamma_{32}^{5}=a$$

计算广义动量，并在求出$\frac{\partial T^{*}}{\partial\omega_r}$之后再利用非完整约束 $\omega_4=\omega_5=0$，得

$$\left(\frac{\partial T^{*}}{\partial\omega_1}\right)\Bigg|_{\omega_4=\omega_5=0}=\frac{7}{5}ma^{2}\omega_1,\qquad \left(\frac{\partial T^{*}}{\partial\omega_2}\right)\Bigg|_{\omega_4=\omega_5=0}=\frac{7}{5}ma^{2}\omega_2$$

$$\left(\frac{\partial T^{*}}{\partial\omega_3}\right)\Bigg|_{\omega_4=\omega_5=0}=\frac{2}{5}ma^{2}\omega_3,\qquad \left(\frac{\partial T^{*}}{\partial\omega_4}\right)\Bigg|_{\omega_4=\omega_5=0}=ma\omega_2$$

$$\left(\frac{\partial T^{*}}{\partial\omega_5}\right)\Bigg|_{\omega_4=\omega_5=0}=-ma\omega_1$$

最后，计算广义力。主动力的元功

$$\begin{aligned}\delta W&=\boldsymbol{V}\cdot\delta\boldsymbol{r}+\boldsymbol{m}^{0}\cdot\boldsymbol{\theta}\\&=\widetilde{V}_1\delta x+\widetilde{V}_2\delta y+\widetilde{V}_3\delta z+\widetilde{m}_1^0\delta\pi_1+\widetilde{m}_2^0\delta\pi_2+\widetilde{m}_3^0\delta\pi_3\end{aligned}$$

其中 $\boldsymbol{V}$ 为主动力主矢；$\boldsymbol{m}^{0}$ 为主动力向球心 0 简化的主矩；$\delta\boldsymbol{r}$ 为球心的虚位移；$\boldsymbol{\theta}$ 为球的无限小转动矢量。

将上述计算所得代入 Boltzmann-Hamel 方程(14.2.37)，得到

$$\frac{7}{5}ma^{2}\dot{\omega}_1=\widetilde{m}_1^0-a\widetilde{V}_2$$

$$\frac{7}{5}ma^{2}\dot{\omega}_2=\widetilde{m}_2+a\widetilde{V}_1$$

$$\frac{2}{5}ma^{2}\dot{\omega}_3=\widetilde{m}_3^0$$

§14.3 积分方法

本节将完整系统的 Routh 降阶法、Whittaker 降阶法，以及 Hamilton-Jacobi方法，在一定条件下推广到非完整系统。

14.3.1 非完整系统的循环积分及其降阶法

非完整系统存在循环积分有严格的限制，不仅要求相应坐标不出现于

Lagrange函数中，而且要求相应的非完整特性项为零，即要求对这个坐标的微分方程有第二类 Lagrange 方程的形式。

Чаплыгин 方程(14.2.19)可表示为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \widetilde{L}}{\partial \dot{q}_\sigma}-\frac{\partial \widetilde{L}}{\partial q_\sigma}-\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}\sum_{\nu=1}^{\varepsilon}\left(\frac{\partial B_{\varepsilon+\beta,\sigma}}{\partial q_\nu}-\frac{\partial B_{\varepsilon+\beta,\nu}}{\partial q_\sigma}\right)\dot{q}_\nu=0$$

$$(\sigma=1,2,\cdots,\varepsilon) \tag{14.3.1}$$

为使方程(14.3.1)在 $\sigma=1$ 时取第二类 Lagrange 方程形式，其充分必要条件是满足[1]

$$\frac{\partial B_{\varepsilon+\beta,\nu}}{\partial q_1}-\frac{\partial B_{\varepsilon+\beta,1}}{\partial q_\nu}=0 \qquad (\beta=1,2,\cdots,g;\varepsilon=n-g;\nu=1,2,\cdots,\varepsilon) \tag{14.3.2}$$

借助表达式

$$u_{\varepsilon+\beta}=\int_{q_{10}}^{q_1}B_{\varepsilon+\beta,1}\mathrm{d}q_1$$

其中 q_{10} 为任意常数，可引出函数 $u_{\varepsilon+\beta}=u_{\varepsilon+\beta}(q_1,q_2,\cdots,q_\varepsilon)$。利用式(14.3.2)，有

$$\frac{\partial u_{\varepsilon+\beta}}{\partial q_\nu}=\int_{q_{10}}^{q_1}\frac{\partial B_{\varepsilon+\beta,1}}{\partial q_\nu}\mathrm{d}q_1=\int_{q_{10}}^{q_1}\frac{\partial B_{\varepsilon+\beta,\nu}}{\partial q_1}\mathrm{d}q_1$$

$$=B_{\varepsilon+\beta,\nu}(q_1,q_2,\cdots,q_\varepsilon)-B_{\varepsilon+\beta,\nu}(q_{10},q_2,\cdots,q_\varepsilon)$$

即

$$B_{\varepsilon+\beta,\nu}=\frac{\partial u_{\varepsilon+\beta}}{\partial q_\nu}+B_{\varepsilon+\beta,\nu}(q_{10},q_2,\cdots,q_\varepsilon)$$

将其代入约束方程

$$\dot{q}_{\varepsilon+\beta}=\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}B_{\varepsilon+\beta,\sigma}\dot{q}_\sigma \tag{14.3.3}$$

得到

$$\mathrm{d}q_{\varepsilon+\beta}=\mathrm{d}u_{\varepsilon+\beta}+\sum_{\nu=1}^{\varepsilon}B_{\varepsilon+\beta,\nu}(q_{10},q_2,\cdots,q_\varepsilon)\mathrm{d}q_\nu \tag{14.3.4}$$

这表明，如果在非完整约束方程(14.3.3)中可分出某个函数的全微分，以使剩下的微分关系中不包含坐标 q_1，那么非完整系统的运动方程(14.3.1)对坐标 q_1 可写成第二类 Lagrange 方程的形式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \widetilde{L}}{\partial \dot{q}_1}-\frac{\partial \widetilde{L}}{\partial q_1}=0$$

此时，如果

$$\frac{\partial \widetilde{L}}{\partial q_1}=0$$

则有循环积分

$$\frac{\partial \widetilde{L}}{\partial \dot{q}_1}=C_1$$

假设 $q_1, q_2, \cdots, q_k (k\leqslant\varepsilon)$ 是 Чаплыгин 方程的循环坐标，即

$$\frac{\partial \widetilde{L}}{\partial q_r}=0 \qquad (r=1,2,\cdots,k)$$

定义 Routh 函数

$$\widetilde{R}=\widetilde{L}-\sum_{i=1}^{k}\beta_i\dot{q}_i \tag{14.3.5}$$

先由下面 k 个方程

$$\frac{\partial \widetilde{L}}{\partial \dot{q}_i}=\beta_i \qquad (i=1,2,\cdots,k) \tag{14.3.6}$$

将 $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots, \dot{q}_k$ 解出，表示为 $q_{k+1}, q_{k+2}, \cdots, q_\varepsilon, \dot{q}_{k+1}, \dot{q}_{k+2}, \cdots, \dot{q}_\varepsilon, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_k, t$ 的函数，从而消去对应循环坐标的广义速度 $q_i (i=1,2,\cdots,k)$，这样，Routh 函数仅含 $q_{k+1}, q_{k+2}, \cdots, q_\varepsilon, \dot{q}_{k+1}, \dot{q}_{k+2}, \cdots, \dot{q}_\varepsilon$。通过类似完整系统的 Routh 方法的步骤，可以证明

$$\frac{\partial \widetilde{R}}{\partial q_i}=\frac{\partial \widetilde{L}}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial \widetilde{R}}{\partial \dot{q}_i}=\frac{\partial \widetilde{L}}{\partial \dot{q}_i} \qquad (i=k+1,k+2,\cdots,\varepsilon) \tag{14.3.7}$$

将式(14.3.7)代入 Чаплыгин 方程(14.3.1)，得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \widetilde{R}}{\partial \dot{q}_\sigma}-\frac{\partial \widetilde{R}}{\partial q_\sigma}+\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}\left\{\sum_{\nu=1}^{k}\left(\frac{\partial B_{\varepsilon+\beta,\nu}}{\partial q_\sigma}-\frac{\partial B_{\varepsilon+\beta,\sigma}}{\partial q_\nu}\right)\dot{q}_\nu+\sum_{\nu=k+1}^{\varepsilon}\left(\frac{\partial B_{\varepsilon+\beta,\nu}}{\partial q_\sigma}-\frac{\partial B_{\varepsilon+\beta,\sigma}}{\partial q_\nu}\right)\dot{q}_\nu\right\}=0 \tag{14.3.8}$$

因 $q_1, q_2, \cdots, q_k$ 为循环坐标并有相应的循环积分，故左端第三项中第一个括号应为零，方程(14.3.8)成为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \widetilde{R}}{\partial \dot{q}_\sigma}-\frac{\partial \widetilde{R}}{\partial q_\sigma}+\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}\sum_{\nu=k+1}^{\varepsilon}\left(\frac{\partial B_{\varepsilon+\beta,\nu}}{\partial q_\sigma}-\frac{\partial B_{\varepsilon+\beta,\sigma}}{\partial q_\nu}\right)\dot{q}_\nu=0$$

$$(\sigma=k+1,k+2,\cdots,\varepsilon) \tag{14.3.9}$$

这就是降价后的 Чаплыгин 方程，其数目为 $\varepsilon-k$。因 L 和 $B_{\varepsilon+\beta,\sigma}$ 均不含 $q_{\varepsilon+\beta}$，再假设 $B_{\varepsilon+\beta,\sigma}$ 中亦不含 $q_1, q_2, \cdots, q_k$，那么 $\partial L/\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}$ 就不含 $q_1, q_2, \cdots, q_k$ 了。

14.3.2 非完整系统的能量积分及其降阶法

首先，研究非完整系统带乘子的方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial L}{\partial q_s}=Q'_s+\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s} \qquad (s=1,2,\cdots,n) \tag{14.3.10}$$

约束方程为

$$f_\beta(q_s,\dot{q}_s,t)=0 \qquad (\beta=1,2,\cdots,g) \tag{14.3.11}$$

将方程(14.3.10)两端乘以 $\dot{q}_s$，并对 s 求和，容易得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s-L\Big)=\sum_{s=1}^{n}Q'_s\dot{q}_s+\sum_{\beta=1}^{g}\sum_{s=1}^{n}\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s-\frac{\partial L}{\partial t} \tag{14.3.12}$$

方程(14.3.12)可称为非完整系统的能量变化方程。当式(14.3.12)右端为零时，特别地，当 L 不显含 t，Q'_s 为陀螺力或为零，f_β 对 $\dot{q}_s$ 为齐次时，有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s-L\Big)=0$$

由此得能量积分

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s-L=h \tag{14.3.13}$$

其次，研究广义 Чаплыгин 方程。将广义力分为有势的 $\widetilde{Q}'_\sigma$ 和非势的 $\widetilde{Q}''_\sigma$

$$\widetilde{Q}_\sigma=\widetilde{Q}'_\sigma+\widetilde{Q}''_\sigma,\qquad \widetilde{Q}'_\sigma=-\frac{\partial\widetilde{V}}{\partial q_\sigma}$$

则方程(14.2.14)可表示为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\widetilde{L}}{\partial \dot{q}_\sigma}-\frac{\partial\widetilde{L}}{\partial q_\sigma}-\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\epsilon+\beta}}\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial \dot{q}_\sigma}-\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial q_\sigma}-\sum_{\gamma=1}^{g}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial q_{\epsilon+\gamma}}\frac{\partial\varphi_\gamma}{\partial \dot{q}_\sigma}\Big)-\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial\widetilde{L}}{\partial q_{\epsilon+\beta}}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial \dot{q}_\sigma}=\widetilde{Q}''_\sigma \tag{14.3.14}$$

其中

$$\widetilde{L}=\widetilde{T}-\widetilde{V}$$

按方程(14.3.14)做计算，有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\sum_{\sigma=1}^{\epsilon}\frac{\partial\widetilde{L}}{\partial \dot{q}_\sigma}\dot{q}_\sigma-L\Big)&=\sum_{\sigma=1}^{\epsilon}\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\widetilde{L}}{\partial \dot{q}_\sigma}-\frac{\partial\widetilde{L}}{\partial q_\sigma}\Big)\dot{q}_\sigma-\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial\widetilde{L}}{\partial q_{\epsilon+\beta}}\varphi_\beta-\frac{\partial\widetilde{L}}{\partial t}\\
&=\sum_{\sigma=1}^{\epsilon}\dot{q}_\sigma\Big\{\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\epsilon+\beta}}\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial \dot{q}_\sigma}-\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial q_\sigma}-\sum_{\gamma=1}^{g}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial q_{\epsilon+\gamma}}\frac{\partial\varphi_\gamma}{\partial \dot{q}_\sigma}\Big)+\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial\widetilde{L}}{\partial q_{\epsilon+\beta}}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial \dot{q}_\sigma}+\widetilde{Q}''_\sigma\Big\}-\\
&\quad\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial\widetilde{L}}{\partial q_{\epsilon+\beta}}\varphi_\beta-\frac{\partial\widetilde{L}}{\partial t}\\
&=\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\epsilon+\beta}}\Big\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\sum_{\sigma=1}^{\epsilon}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial \dot{q}_\sigma}\dot{q}_\sigma\Big)-\dot{\varphi}_\beta\Big\}+\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial L}{\partial q_{\epsilon+\beta}}\Big(\sum_{\sigma=1}^{\epsilon}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial \dot{q}_\sigma}\dot{q}_\sigma-\varphi_\beta\Big)+\sum_{\sigma=1}^{\epsilon}Q''_\sigma\dot{q}_\sigma-\frac{\partial L}{\partial t}\end{aligned} \tag{14.3.15}$$

于是，如果 L 不显含 t，φ_β 对 $\dot{q}_\sigma$ 是一阶齐次的，非势力为陀螺力或不存在，则方程(14.3.14)有能量积分

$$\sum_{\sigma=1}^{\epsilon}\frac{\partial\widetilde{L}}{\partial \dot{q}_\sigma}\dot{q}_\sigma-\widetilde{L}=h \tag{14.3.16}$$

下面研究利用能量积分降阶的方法。

假设系统的 Lagrange 函数 L 和非完整约束方程均不含 $q_{\varepsilon+\beta}$，且不含 t，则约束方程和运动方程分别为

$$\dot{q}_{\varepsilon+\beta}=\varphi_{\beta}(q_{\sigma},\dot{q}_{\sigma}) \qquad (\beta=1,2,\cdots,g) \tag{14.3.17}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\widetilde{L}}{\partial\dot{q}_{\sigma}}-\frac{\partial\widetilde{L}}{\partial q_{\sigma}}-\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_{\varepsilon+\beta}}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\varphi_{\beta}}{\partial\dot{q}_{\sigma}}-\frac{\partial\varphi_{\beta}}{\partial q_{\sigma}}\right)=0 \qquad (\sigma=1,2,\cdots,\varepsilon) \tag{14.3.18}$$

其中

$$\widetilde{L}(q_{\sigma},\dot{q}_{\sigma})=L(q_{\sigma},\dot{q}_{\sigma},\varphi_{\beta}(q_{\sigma},\dot{q}_{\sigma}))$$

令

$$\dot{q}_{\nu}=\dot{q}_{\varepsilon}q'_{\nu}, \quad q'_{\nu}=\frac{\mathrm{d}q_{\nu}}{\mathrm{d}q_{\varepsilon}} \qquad (\nu=1,2,\cdots,\varepsilon-1) \tag{14.3.19}$$

并设

$$\Omega(q'_{\nu},q_{\varepsilon},q_{\sigma})=\widetilde{L}(q'_{\nu}\dot{q}_{\varepsilon},\dot{q}_{\varepsilon},q_{\sigma}) \tag{14.3.20}$$

如果 φ_{β} 是相对 $\dot{q}_{\sigma}$ 的一阶齐次函数，即

$$\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\frac{\partial\varphi_{\beta}}{\partial\dot{q}_{\sigma}}\dot{q}_{\sigma}-\varphi_{\beta}=0 \tag{14.3.21}$$

那么系统存在能量积分

$$\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\frac{\partial\widetilde{L}}{\partial\dot{q}_{\sigma}}\dot{q}_{\sigma}-\widetilde{L}=h \tag{14.3.22}$$

由式(14.3.19)和式(14.3.22)可解出 $\dot{q}_{\varepsilon}$，记作

$$\dot{q}_{\varepsilon}=\dot{q}_{\varepsilon}(q'_{\nu},q_{\sigma}) \tag{14.3.23}$$

再令

$$L^{*}(q'_{\nu},q_{\sigma})=\frac{\partial\Omega}{\partial\dot{q}_{\varepsilon}} \tag{14.3.24}$$

可以证明

$$\frac{\partial L^{*}}{\partial q'_{\nu}}=\frac{\partial\widetilde{L}}{\partial\dot{q}_{\nu}}, \quad \frac{\partial L^{*}}{\partial q_{\sigma}}=\frac{1}{\dot{q}_{\varepsilon}}\frac{\partial\widetilde{L}}{\partial q_{\sigma}} \qquad (\nu=1,2,\cdots,\varepsilon-1;\sigma=1,2,\cdots,\varepsilon) \tag{14.3.25}$$

现在令

$$\omega_{\beta}(q'_{\nu},\dot{q}_{\varepsilon},q_{\sigma})=\varphi_{\beta}(q'_{\nu}\dot{q}_{\varepsilon},\dot{q}_{\varepsilon},q_{\sigma}) \tag{14.3.26}$$

$$\varphi_{\beta}^{*}(q'_{\nu},q_{\sigma})=\frac{\partial\omega_{\beta}}{\partial\dot{q}_{\varepsilon}} \tag{14.3.27}$$

则式(14.3.21)可写成形式

$$\dot{q}_\varepsilon \frac{\partial \omega_\beta}{\partial \dot{q}_\varepsilon} - \omega_\beta = 0 \tag{14.3.28}$$

将式(14.3.27)和(14.3.28)微分，并比较所得结果，得到

$$\frac{\partial \varphi_\beta^*}{\partial q_\nu'} = \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial \dot{q}_\nu}, \quad \frac{\partial \varphi_\beta^*}{\partial q_\sigma} = \frac{1}{\dot{q}_\varepsilon} \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial q_\sigma} \qquad (\nu=1,2,\cdots,\varepsilon-1;\sigma=1,2,\cdots,\varepsilon) \tag{14.3.29}$$

将式(14.3.25)和(14.3.29)代入方程(14.3.18)，最终得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q_\varepsilon} \frac{\partial L^*}{\partial q_\nu'} - \frac{\partial L^*}{\partial q_\nu} - \sum_{\beta=1}^{g} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}} \right)^* \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q_\varepsilon} \frac{\partial \varphi_\beta^*}{\partial q_\nu'} - \frac{\partial \varphi_\beta^*}{\partial q_\nu} \right) = 0$$
$$(\nu = 1,2,\cdots,\varepsilon - 1) \tag{14.3.30}$$

其中$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}} \right)^*$为用 q_ν'，q_σ 表达的$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}$。方程(14.3.30)就是根据能量积分降阶后的方程，可称为**广义 Whittaker 方程**[22]。

例 1 一力学系统受一阶线性齐次定常的非完整约束

$$\dot{q}_4 = \dot{q}_1 + \dot{q}_2 \sin q_3 + \dot{q}_3 \sin q_2$$

系统的动能和势能分别为

$$T = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2 + \dot{q}_4^2), \quad V = g(q_2 + q_3)$$

试求循环积分，并利用循环积分降阶方程。

解：系统的 Lagrange 函数为

$$L = T - V = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2 + \dot{q}_4^2) - g(q_2 + q_3)$$

因约束方程和 Lagrange 函数 L 都不含 q_4，此系统为 Чаплыгин 系统。嵌入约束后的 L 为

$$\widetilde{L} = \frac{1}{2}[2\dot{q}_1^2 + (1+\sin^2 q_3)\dot{q}_2^2 + (1+\sin^2 q_2)\dot{q}_3^2 + 2\dot{q}_1\dot{q}_2 \sin q_3 + 2\dot{q}_1\dot{q}_3 \sin q_2 + 2\dot{q}_2\dot{q}_3 \sin q_2 \sin q_3] - g(q_2 + q_3)$$

不难验证，q_1 是循环坐标，并有循环积分

$$\frac{\partial \widetilde{L}}{\partial \dot{q}_1} = \beta_1$$

即

$$2\dot{q}_1 + \dot{q}_2 \sin q_3 + \dot{q}_3 \sin q_2 = \beta_1$$

由此解出 $\dot{q}_1$

$$\dot{q}_1 = \frac{1}{2}(\beta_1 - \dot{q}_2 \sin q_3 - \dot{q}_3 \sin q_2)$$

Routh 函数为

$$\widetilde{R}=\widetilde{L}-\beta_1\dot{q}_1$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left(1+\frac{1}{2}\sin^2 q_3\right)\dot{q}_2^2+\left(1+\frac{1}{2}\sin^2 q_2\right)\dot{q}_3^2+\dot{q}_2\dot{q}_3\sin q_2\sin q_3+\right.$$

$$\left.\beta_1\dot{q}_2\sin q_3+\beta_1\dot{q}_3\sin q_2-\frac{1}{2}\beta_1^2\right\}-g(q_2+q_3)$$

又

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_4}\right)^*=\frac{1}{2}(\beta_1+\dot{q}_2\sin q_3+\dot{q}_3\sin q_2)$$

方程(14.3.9)给出降阶后的方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\widetilde{R}}{\partial\dot{q}_j}-\frac{\partial\widetilde{R}}{\partial q_j}+\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_4}\right)^*\sum_{l=2}^{3}\left(\frac{\partial B_{4l}}{\partial q_j}-\frac{\partial B_{4j}}{\partial q_l}\right)\dot{q}_l=0\qquad(j=2,3)$$

将各项代入上式,并计算得

$$\left(1+\frac{1}{2}\sin^2 q_3\right)\ddot{q}_2+\frac{1}{2}\ddot{q}_3\sin q_2\sin q_3+\frac{1}{2}\dot{q}_2\dot{q}_3(\cos q_2+\cos q_3)\sin q_3+g=0$$

$$\left(1+\frac{1}{2}\sin^2 q_2\right)\ddot{q}_3+\frac{1}{2}\ddot{q}_2\sin q_2\cos q_3+\frac{1}{2}\dot{q}_2\dot{q}_3(\cos q_2+\cos q_3)\sin q_2+g=0$$

例 2 一雪橇在水平面上滑动。雪橇质心 C 在平面上的投影与雪橇和平面接触点相重合。令 m 和 J 分别表示雪橇质量和它对质心的惯性矩。系统的位置由三个参数确定:质心的坐标(x,y)以及雪橇对称轴与固定轴 Ox 的夹角 θ。力函数为 $U=-\frac{1}{2}k^2\theta^2$,$k$ 为常数。试求能量积分,并利用它将方程降阶。

解:系统的 Lagrange 函数为

$$L=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)+\frac{1}{2}J\dot{\theta}^2-\frac{1}{2}k^2\theta^2$$

非完整约束方程为

$$\dot{y}=\dot{x}\tan\theta$$

于是有

$$\widetilde{L}=\frac{1}{2}m\dot{x}^2(1+\tan^2\theta)+\frac{1}{2}J\dot{\theta}^2-\frac{1}{2}k^2\theta^2$$

能量积分为

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2(1+\tan^2\theta)+\frac{1}{2}J\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}k^2\theta^2=h$$

由此解得

$$\dot{x}^2=\frac{2h-k^2\theta^2}{m(1+\tan^2\theta)+J\theta'^2},\quad \theta'=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x}$$

式(14.3.20)和(14.3.24)分别给出

$$\Omega=\frac{1}{2}\dot{x}^2[m(1+\tan^2\theta)+J\theta'^2]-\frac{1}{2}k^2\theta^2$$

$$L^*=\frac{\partial\Omega}{\partial\dot{x}}=\pm\sqrt{2h-k^2\theta^2}\sqrt{m(1+\tan^2\theta)+J\theta'^2}$$

式(14.3.26)和(14.3.27)分别给出

$$\omega=\dot{x}\tan\theta,\quad \dot{y}^*=\frac{\partial(\dot{x}\tan\theta)}{\partial\dot{x}}=\tan\theta$$

方程(14.3.30)给出

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial L^*}{\partial\theta'}-\frac{\partial L^*}{\partial\theta}-\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{y}}\right)^*\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial\dot{y}^*}{\partial\theta'}-\frac{\partial\dot{y}^*}{\partial\theta}\right)=0$$

将 L^*，$\dot{y}^*$ 代入并简化得

$$J(2h-k^2\theta^2)\theta''+J[-(2h-k^2\theta^2)\tan\theta+k^2\theta^2]\theta'^2+mk^2\theta(1+\tan^2\theta)=0$$

积分得

$$\theta'=\frac{1}{c\cos\theta}\sqrt{\frac{2h-k^2\theta^2-mc^2}{J}}$$

其中 c 为常数。将 θ' 代入 $\dot{x}^2$ 中，得

$$\dot{x}=c\cos\theta$$

进而得

$$\dot{y}=c\sin\theta$$

$$\dot{\theta}=\sqrt{\frac{2h-k^2\theta^2-mc^2}{J}}$$

$$\ddot{\theta}=-\frac{k^2}{J}\theta$$

积分得

$$\theta=a\cos\left(\frac{k}{\sqrt{J}}t+\varphi\right)$$

其中 a，φ 为积分常数。

14.3.3 Jacobi 方法

一般说，积分 Hamilton-Jacobi 方程的 Jacobi 方法不能应用于非完整系统方程的积分。但对某些特殊的非完整系统，例如，主动力有势、广义约束力有势的情形，尚可应用。

设非完整约束为

$$f_\beta(q_s, \dot{q}_s, t)=0 \qquad (\beta=1,2,\cdots,g; s=1,2,\cdots,n) \qquad (14.3.31)$$

则运动方程为(14.2.5),即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial T}{\partial q_s}=Q_s+\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s} \qquad (s=1,2,\cdots,n) \qquad (14.3.32)$$

在运动微分方程积分之前,可由方程(14.3.31)和(14.3.32)求出约束乘子 λ_β 为 $\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t$ 的函数,于是方程(14.3.32)可表示为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial T}{\partial q_s}=Q_s+\Lambda_s \qquad (s=1,2,\cdots,n) \qquad (14.3.33)$$

其中广义约束力

$$\Lambda_s=\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s} \qquad (14.3.34)$$

已表示为 $\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t$ 的函数。称方程(14.3.33)为与非完整系统(14.3.31),(14.3.32)相应的完整系统的方程。文献[13]已证明,如果运动初始条件满足非完整约束方程(14.3.31),即满足

$$f_\beta(q_{s0}, \dot{q}_{s0}, t_0)=0 \qquad (14.3.35)$$

则相应完整系统(14.3.33)的解就给出非完整系统的运动。

如果广义约束力 Λ_s 满足条件

$$\Lambda_s=\frac{\partial U}{\partial q_s}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_s} \qquad (s=1,2,\cdots,n) \qquad (14.3.36)$$

就说广义约束力有势。在此条件下,如果主动力有势,即

$$Q_s=-\frac{\partial V}{\partial q_s} \qquad (s=1,2,\cdots,n) \qquad (14.3.37)$$

那么引入 Lagrange 函数

$$L'=T-V+U \qquad (14.3.38)$$

则方程(14.3.33)可写成

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial L'}{\partial q_s}=0 \qquad (s=1,2,\cdots,n) \qquad (14.3.39)$$

它有完整保守系统 Lagrange 方程的形式。

引进 Hamilton 函数

$$H'=\sum_{s=1}^{n}p'_s\dot{q}_s-L', \quad p'_s=\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_s} \qquad (14.3.40)$$

则方程(14.3.39)成为正则方程

$$\dot{q}_s=\frac{\partial H'}{\partial p'_s}, \quad \dot{p}'_s=-\frac{\partial H'}{\partial q_s} \qquad (s=1,2,\cdots,n) \qquad (14.3.41)$$

这样,可列写 Hamilton-Jacobi 方程

$$\frac{\partial S}{\partial t}+H'\left(q_s,\frac{\partial S}{\partial q_s},t\right)=0 \tag{14.3.42}$$

设其完全积分为

$$S=S(q_s,\beta_k,t),\quad \beta_k=\text{const.}\qquad (s,k=1,2,\cdots,n) \tag{14.3.43}$$

则由 Jacobi 定理知，方程(14.3.41)的解可表示为

$$\frac{\partial S}{\partial \beta_k}=\alpha_k,\quad \alpha_k=\text{const.} \tag{14.3.44}$$

$$\frac{\partial S}{\partial q_s}=p'_s \tag{14.3.45}$$

例 3 设力学系统的位置由广义坐标 q_1,q_2 来确定，动能和势能分别为

$$T=\frac{1}{2}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2),V=0$$

非完整约束方程为

$$f=\dot{q}_1+bt\dot{q}_2-bq_2+t=0$$

其中 b 为常数[13]。试用 Jacobi 方法求解。

解：方程(14.3.32)给出

$$\ddot{q}_1=\lambda,\quad \ddot{q}_2=\lambda bt$$

利用约束方程可求得

$$\lambda=-\frac{1}{1+b^2t^2}$$

于是

$$\Lambda_1=-\frac{1}{1+b^2t^2},\quad \Lambda_2=-\frac{bt}{1+b^2t^2}$$

由此可找到函数 U

$$U=\frac{1}{b}\dot{q}_1\arctan bt+\frac{1}{2b}\dot{q}_2\ln(1+b^2t^2)$$

使得

$$\Lambda_1=\frac{\partial U}{\partial q_1}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_1},\quad \Lambda_2=\frac{\partial U}{\partial q_2}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_2}$$

这样就有

$$L'=T+U$$

$$p'_1=\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_1}=\dot{q}_1+\frac{1}{b}\arctan bt$$

$$p'_2=\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_2}=\dot{q}_2+\frac{1}{2b}\ln(1+b^2t^2)$$

$$H' = \sum_{s=1}^{2} p'_s \dot{q}_s - L' = \frac{1}{2}(p'_1 - \frac{1}{b}\arctan bt)^2 + \frac{1}{2}[p'_2 - \frac{1}{2b}\ln(1+b^2t^2)]^2$$

Hamilton-Jacobi 方程(14.3.42)给出

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial S}{\partial q_1} - \frac{1}{b}\arctan bt\right)^2 + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial S}{\partial q_2} - \frac{1}{2b}\ln(1+b^2t^2)\right]^2 = 0$$

它的完全积分为

$$S = C_1 q_1 + D_1 q_2 + f(t)$$

$$f(t) = -\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\left\{\left(C_1 - \frac{1}{b}\arctan bt\right)^2 + \left[D_1 - \frac{1}{2b}\ln(1+b^2t^2)\right]^2\right\}dt$$

式(14.3.44)给出

$$\frac{\partial S}{\partial C_1} = C_2, \quad \frac{\partial S}{\partial D_1} = D_2$$

其中 C_2,D_2 为新的常数,即

$$q_1 - \int_{t_0}^{t}(C_1 - \frac{1}{b}\arctan bt)dt = C_2$$

$$q_2 - \int_{t_0}^{t}[D_1 - \frac{1}{2b}\ln(1+b^2t^2)]dt = D_2$$

积分得

$$q_1 = -\frac{t}{b}\arctan bt + \frac{1}{2b^2}\ln(1+b^2t^2) + C_1 t + C_2$$

$$q_2 = \frac{t}{b} - \frac{1}{b^2}\arctan bt - \frac{t}{2b}\ln(1+b^2t^2) + D_1 t + D_2$$

这是相应完整系统的解。对非完整系统,还要施加条件(14.3.35),即

$$C_1 - bD_2 = 0$$

§14.4 专门问题

本节讨论非完整系统力学的几个专门问题,包括平衡状态附近的小振动、相对运动动力学、打击运动、变质量系统等。

14.4.1 非完整系统平衡状态附近的小振动

设力学系统的位形由 n 个广义坐标 $q_s(s=1,2,\cdots,n)$来确定,它的运动受有 g 个理想线性齐次定常非完整约束

$$\sum_{s=1}^{n} a_{\varepsilon+\beta,s}\dot{q}_s = 0 \qquad (\beta = 1,2,\cdots,g;\varepsilon = n-g) \qquad (14.4.1)$$

其中系数 $a_{\varepsilon+\beta,s}$ 不依赖于时间 t。假设广义力有势，势能不含时间 t，而能量耗散用耗散函数 F 表示，系统的运动微分方程表示为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial L}{\partial q_s}=\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta a_{\varepsilon+\beta,s}-\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_s}\qquad (s=1,2,\cdots,n)\qquad (14.4.2)$$

其中 $L=T-V$。

现在设 $q_1=q_2=\cdots=q_n=0$ 是系统的平衡位置。由方程(14.4.1)和方程(14.4.2)知，在平衡位置上满足关系

$$\frac{\partial V(0,0,\cdots,0)}{\partial q_s}-\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta a_{\varepsilon+\beta,s}(0,0,\cdots,0)=0\qquad (14.4.3)$$

由此可知，当非完整系统平衡时，$\dfrac{\partial V}{\partial q_s}$ 不同于完整系统，一般说不等于零。将 V 在平衡位置附近展开，得

$$V=V(0,0,\cdots,0)+\sum_{s=1}^{n}C_s^0 q_s+\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}C_{sk}^0 q_s q_k+\cdots\qquad (14.4.4)$$

其中

$$C_s^0=\left(\frac{\partial V}{\partial q_s}\right)_0,\quad C_{sk}^0=\left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_s\partial q_k}\right)_0$$

对于小量 $q_1,q_2\cdots,q_n,\dot{q}_1,\dot{q}_2,\cdots,\dot{q}_n$，函数 T 和 F 与完整系统情形一样，是带常系数的广义速度的齐二次式

$$T=\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}A_{sk}^0\dot{q}_s\dot{q}_k,\quad F=\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}B_{sk}^0\dot{q}_s\dot{q}_k\qquad (14.4.5)$$

带乘子项的线性化给出

$$\begin{aligned}\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta a_{\varepsilon+\beta,s}&=\sum_{\beta=1}^{g}(\lambda_\beta^0+\lambda_\beta^1)\left(a_{\varepsilon+\beta,s}^0+\sum_{k=1}^{n}a_{\varepsilon+\beta,s}^k q_k+\cdots\right)\\&=\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta^0 a_{\varepsilon+\beta,s}^0+\sum_{\beta=1}^{g}\sum_{k=1}^{n}\lambda_\beta^0 a_{\varepsilon+\beta,s}^k q_k+\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta^1 a_{\varepsilon+\beta,s}^0+\cdots\end{aligned}\qquad (14.4.6)$$

其中

$$a_{\varepsilon+\beta,s}^0=a_{\varepsilon+\beta,s}(0,0,\cdots,0),\quad a_{\varepsilon+\beta,s}^k=\frac{\partial a_{\varepsilon+\beta,s}}{\partial q_k}$$

而 λ_β^0 为待定乘子 λ_β 在系统平衡位置的值。将式(14.4.6)，(14.4.5)代入方程(14.4.2)并注意到式(14.4.3)，得到线性化方程

$$\sum_{k=1}^{n}A_{sk}^0\ddot{q}_k+\sum_{k=1}^{n}B_{sk}^0\dot{q}_k+\sum_{k=1}^{n}\left(C_{sk}^0-\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta^0 a_{\varepsilon+\beta,s}^k\right)q_k-\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta^1 a_{\varepsilon+\beta,s}^0=0$$
$$(s=1,2,\cdots,n)\qquad (14.4.7)$$

对这些方程尚需补充非完整约束的线性化方程

$$\sum_{s=1}^{n} a_{\varepsilon+\beta,s}^{0}\dot{q}_{s}=0 \qquad (\beta=1,2,\cdots,g) \tag{14.4.8}$$

方程(14.4.7)和(14.4.8)称为非完整系统在平衡位置 $q_1=q_2=\cdots=q_n=0$ 附近的小振动方程。

将形如

$$q_k=M_k\exp(pt),\quad \lambda_\beta^1=N_\beta\exp(pt) \qquad \begin{pmatrix}k=1,2,\cdots,n;\\ \beta=1,2,\cdots,g\end{pmatrix} \tag{14.4.9}$$

的解代入这些方程,得到特征方程

$$p^g\begin{vmatrix} P_{11} & P_{12} & \cdots & P_{1n} & a_{\varepsilon+1,1}^0 & a_{\varepsilon+2,1}^0 & \cdots & a_{n1}^0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ P_{n1} & P_{n2} & \cdots & P_{nn} & a_{\varepsilon+1,n}^0 & a_{\varepsilon+2,n}^0 & \cdots & a_{nn}^0 \\ a_{\varepsilon+1,1}^0 & a_{\varepsilon+1,2}^0 & \cdots & a_{\varepsilon+1,n}^0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}^0 & a_{n2}^0 & \cdots & a_{nn}^0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}=0 \tag{14.4.10}$$

其中

$$P_{sk}=A_{sk}^0p^2+B_{sk}^0p+C_{sk}^0-\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta^0 a_{\varepsilon+\beta,s}^{k}$$

由特征方程(14.4.10)得知:①特征方程的系数矩阵不像完整系统那样有对称性,而是非对称的;②特征方程有 g 个零根[1]。

非完整系统小振动的研究归结为研究线性微分方程(14.4.7)和(14.4.8)。但是,按小振动理论的通常提法,既不能给出稳定性的解答,也不能揭示零根的性质。

现在方程(14.4.2)写成形式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial L}{\partial q_s}=Q_s+\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta a_{\varepsilon+\beta,s} \tag{14.4.11}$$

其中 Q_s 为除有势力外的所有广义力,它们是 $q_s,\dot{q}_s$ 的函数。由方程(14.4.11)得知,非完整系统的平衡状态满足方程

$$\frac{\partial L}{\partial q_s}+Q_s+\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta a_{\varepsilon+\beta,s}=0 \qquad (s=1,2,\cdots,n) \tag{14.4.12}$$

这是关于 $n+g$ 个未知量 q_s,λ_β 的 n 个方程,因此有 g 个量可以是任意的。在一般情形中,组成非完整系统平衡状态流形。此流形在 n 维空间中组成维数为 g 的曲面 O_g。曲面 O_g 用参数表示为

$$q_s^0=q_s^0(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_g)$$

可以证明[1],在研究流形的稳定性时,可由式(14.4.10)简单地去掉零根的

办法来得到特征方程。对这个特征方程，所有著名的稳定性判据都可应用。

例 1 斜面上的雪橇[1,22]。

解：假设雪橇在与水平面呈 α 角的斜平面上运动。设雪橇的刀片与斜面接触点 P 的坐标为 (x,y)，雪橇绕垂直于斜面的直线的转角为 θ。质心 C 在斜面上的投影位于垂直于刀片的平面上，距 P 为 l。对质心 C 的回转半径为 k。系统的 Lagrange 函数为

$$L=\frac{1}{2}m\{(\dot{x}+l\dot{\theta}\cos\theta)^2+(\dot{y}+l\dot{\theta}\sin\theta)^2+k^2\dot{\theta}^2\}-$$

$$mg(y-l\cos\theta)\sin\alpha$$

设系统有黏性阻尼，引入耗散函数

$$F=\frac{1}{2}m\{h(\dot{x}^2+\dot{y}^2)+h_1\dot{\theta}^2\}$$

其中 $h\geqslant 0, h_1\geqslant 0$ 分别为滑动黏摩擦系数和旋转黏摩擦系数。

非完整约束方程为

$$\dot{y}-\dot{x}\tan\theta=0$$

系统的 Routh 方程(14.4.2)给出

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{x}+l\dot{\theta}\cos\theta)+h\dot{x}+\frac{\lambda}{m}\tan\theta=0$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{y}+l\dot{\theta}\sin\theta)+h\dot{y}+g\sin\alpha-\frac{\lambda}{m}=0$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\{l(\dot{x}\cos\theta+\dot{y}\sin\theta)+(l^2+k^2)\dot{\theta}\}+h_1\dot{\theta}+gl\sin\alpha\sin\theta=0$$

平衡状态满足方程

$$\lambda\tan\theta=0,\quad \lambda=mg\sin\alpha,\quad \sin\theta=0$$

此平衡状态在空间 (x,y,θ) 中组成两个平面：$\theta=0$ 和 $\theta=\pi$。系统有一个非完整约束，但非完整系统平衡状态流形的维数是 2。这是因为上述第一和第三个方程相关。为研究平衡状态流形的稳定性，令

$$x=x_0+\xi,\quad y=y_0+\eta,\quad \theta=\theta_0=\zeta,\quad \lambda=\lambda_0+\chi$$

其中 $x_0, y_0, \theta_0, \lambda_0$ 满足平衡方程，即

$$\lambda_0\tan\theta_0=0,\quad \lambda_0=mg\sin\alpha,\quad \sin\theta_0=0$$

而 ξ,η,ζ,χ 为小量。将约束方程和运动方程线性化，得到

$$\dot{\eta}=0,\quad \ddot{\xi}\pm l\ddot{\zeta}+g\zeta\sin\alpha=0$$

$$\ddot{\eta}-h\dot{\eta}-\frac{\chi}{m}=0,\quad (l^2+k^2)\ddot{\zeta}\pm l\ddot{\xi}+h_1\dot{\zeta}\pm gl\zeta\sin\alpha=0$$

其中加号对应 $\theta=0$，而减号对应 $\theta=\pi$。特征方程为

$$\begin{vmatrix} 0 & p & 0 & 0 \\ p^2+hp & 0 & \pm lp^2+g\sin\alpha & 0 \\ 0 & p^2+hp & 0 & -\dfrac{1}{m} \\ \pm lp^2 & 0 & (l^2+k^2)p^2+h_1p\pm gl\sin\alpha & 0 \end{vmatrix}=0$$

展开得

$$p^2\{k^2p^2+[h(l^2+k^2)+h_1]p^2+hh_1p\pm hgl\sin\alpha\}=0$$

简单地去掉零根，研究括号内的多项式。当 $\theta=\pi$ 时，最后一项是负的，这种情形是不稳定的。当 $\theta=0$ 时，稳定性条件，按 Routh-Hurwitz判据为

$$\Delta_1=h(l^2+k^2)+h_1>0$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} h(l^2+k^2) & k^2 \\ hgl\sin\alpha & hh_1 \end{vmatrix}>0$$

设 $h>0,h_1>0$，则第一式满足，第二式成为

$$(l^2+k^2)h>\frac{k^2gl\sin\alpha}{h_1}-h_1$$

14.4.2 相对运动动力学

设被载系统的运动受有 g 个双面理想 Четаев 型非完整约束

$$f_\beta(q_s,\dot{q}_s,t)=0\qquad(\beta=1,2,\cdots,g)\tag{14.4.13}$$

系统在惯性坐标系中的 **Routh 方程**表示为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_s}-\frac{\partial T}{\partial q_s}=Q_s+\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial\dot{q}_s}\qquad(s=1,2,\cdots,n)\tag{14.4.14}$$

按照§10.3中方法，容易将方程(14.4.14)在与载体相固联的动坐标系中写出为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T_r}{\partial\dot{q}_s}-\frac{\partial T_r}{\partial q_s}=Q_s-\frac{\partial}{\partial q_s}(V^0+V^\omega)+Q_s^{\dot{\omega}}+\Gamma_s+\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial\dot{q}_s}$$

$$(s=1,2,\cdots,n)\tag{14.4.15}$$

惯性坐标系中的广义 Чаплыгин 方程(14.2.14)，在与载体相固联的动坐标系中可写成形式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \widetilde{T}_r}{\partial \dot{q}_\sigma}-\frac{\partial \widetilde{T}_r}{\partial q_\sigma}-\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial T_r}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial \dot{q}_\sigma}-\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial q_\sigma}-\sum_{\gamma=1}^{g}\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial q_{\varepsilon+\gamma}}\frac{\partial \varphi_\gamma}{\partial \dot{q}_\sigma}\right)-\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial \widetilde{T}_r}{\partial q_{\varepsilon+\beta}}\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial \dot{q}_\sigma}=$$

$$\widetilde{Q}_\sigma-\frac{\partial}{\partial q_\sigma}(V^0+V^\omega)-\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial (V^0+V^\omega)}{\partial q_{\varepsilon+\beta}}\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial \dot{q}_\sigma}+\widetilde{Q}_\sigma^{\dot{\omega}}+\widetilde{\Gamma}_\sigma\quad(\sigma=1,2,\cdots,\varepsilon)$$

(14.4.16)

其中

$$\widetilde{Q}_\sigma^{\dot{\omega}}=Q_\sigma^{\dot{\omega}}+\sum_{\beta=1}^{g}Q_{\varepsilon+\beta}^{\dot{\omega}}\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial \dot{q}_\sigma},\quad \widetilde{\Gamma}_\sigma=\Gamma_\sigma+\sum_{\beta=1}^{g}\Gamma_{\varepsilon+\beta}\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial \dot{q}_\sigma}$$

类似地，可建立非完整系统相对运动动力学的 Appell 方程

$$\frac{\partial \widetilde{S}_r}{\partial \ddot{q}_\sigma}=\widetilde{Q}_\sigma+\frac{\partial}{\partial q_\sigma}(V^0+V^\omega)-\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial (V^0+V^\omega)}{\partial q_{\varepsilon+\beta}}\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial \dot{q}_\sigma}+\widetilde{Q}_\sigma^{\dot{\omega}}+\widetilde{\Gamma}_\sigma$$

$$(\sigma=1,2,\cdots,\varepsilon)\tag{14.4.17}$$

例 2 设载体为一水平面，其基点 O 的速度 $\boldsymbol{V}_0$ 在水平面内，角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 垂直于平面，且 $\boldsymbol{V}_0$ 和 $\boldsymbol{\omega}$ 都是时间的已知函数。试研究平面上的 Чаплыгин 雪橇的运动。

解：假设雪橇质心 C 在对称轴(刀片方向)上，其在平面上的投影距雪橇与平面的接触点 P 为 a，雪橇对通过 C 而垂直于水平面的轴的转动惯量为 J_C。设点 P 在动系 $Ox'y'$ 中坐标为 (x', y')，雪橇对称轴 CP 与轴 Ox' 的夹角为 θ，则表示不允许横滑的非完整约束为

$$\dot{y}'=\dot{x}'\tan\theta$$

系统相对运动的动能为

$$T_r=\frac{1}{2}m\{(\dot{x}'-a\dot{\theta}\sin\theta)^2+(\dot{y}'+a\dot{\theta}\cos\theta)^2\}+\frac{1}{2}J_C\dot{\theta}^2$$

考虑到约束后，有

$$\widetilde{T}_r=\frac{1}{2}m\frac{\dot{x}'^2}{\cos^2\theta}+\frac{1}{2}(J_C+ma^2)\dot{\theta}^2$$

方程(14.4.16)给出为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \widetilde{T}_r}{\partial \dot{x}'}-\frac{\partial \widetilde{T}_r}{\partial x'}+\frac{\partial T_r}{\partial \dot{y}'}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \dot{y}'}{\partial \dot{x}'}-\frac{\partial \dot{y}'}{\partial x'}-\frac{\partial \dot{y}'}{\partial y'}\frac{\partial \dot{y}'}{\partial \dot{x}'}\right)-\frac{\partial \widetilde{T}_r}{\partial y'}\frac{\partial \dot{y}'}{\partial \dot{x}'}$$

$$=\widetilde{Q}_{x'}-\frac{\partial}{\partial x'}(V^0+V^\omega)-\frac{\partial}{\partial y'}(V^0+V^\omega)\frac{\partial \dot{y}'}{\partial \dot{x}'}+\widetilde{Q}_{x'}^{\dot{\omega}}+\widetilde{\Gamma}_{x'}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \widetilde{T}_r}{\partial \dot{\theta}}-\frac{\partial \widetilde{T}_r}{\partial \theta}+\frac{\partial T_r}{\partial \dot{y}'}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \dot{y}'}{\partial \dot{\theta}}-\frac{\partial \dot{y}'}{\partial \theta}-\frac{\partial \dot{y}'}{\partial y}\frac{\partial \dot{y}'}{\partial \dot{\theta}}\right)-\frac{\partial \widetilde{T}_r}{\partial y'}\frac{\partial \dot{y}'}{\partial \dot{\theta}}$$

$$=\widetilde{Q}_\theta-\frac{\partial}{\partial \theta}(V^0+V^\omega)-\frac{\partial}{\partial y'}(V^0+V^\omega)\frac{\partial \dot{y}'}{\partial \dot{\theta}}+\widetilde{Q}_\theta^{\dot{\omega}}+\widetilde{\Gamma}_\theta$$

做计算，有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\widetilde{T}_{\mathrm{r}}}{\partial\dot{x}'}-\frac{\partial\widetilde{T}_{\mathrm{r}}}{\partial x'}=m\left(\frac{\ddot{x}'}{\cos^2\theta}+\frac{2\dot{x}'\dot{\theta}\sin\theta}{\cos^3\theta}\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\widetilde{T}_{\mathrm{r}}}{\partial\dot{\theta}}-\frac{\partial\widetilde{T}_{\mathrm{r}}}{\partial\theta}=(J_C+ma^2)\ddot{\theta}-\frac{m\dot{x}'^2\sin\theta}{\cos^3\theta}$$

$$\frac{\partial T_{\mathrm{r}}}{\partial\dot{y}'}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\dot{y}'}{\partial\dot{x}'}-\frac{\partial\dot{y}'}{\partial x'}-\frac{\partial\dot{y}'}{\partial y}\frac{\partial\dot{y}'}{\partial\dot{x}'}\right)=m(\dot{x}'\tan\theta+a\dot{\theta}\cos\theta)\frac{\dot{\theta}}{\cos^2\theta}$$

$$\frac{\partial T_{\mathrm{r}}}{\partial\dot{y}'}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\dot{y}'}{\partial\dot{\theta}}-\frac{\partial\dot{y}'}{\partial\theta}-\frac{\partial\dot{y}'}{\partial y}\frac{\partial\dot{y}'}{\partial\dot{\theta}}\right)=-m(\dot{x}'\tan\theta+a\dot{\theta}\cos\theta)\frac{\dot{x}'}{\cos^2\theta}$$

$$\frac{\partial\widetilde{T}_{\mathrm{r}}}{\partial y'}=0$$

设雪橇除受重力外，无其他主动力作用，则有

$$\widetilde{Q}_{x'}=0,\quad \widetilde{Q}_{\theta}=0$$

设基点加速度在固定坐标系中的投影为 a_{Ox}，a_{Oy}，则

$$V^0=m\{[a_{Ox}(x'+a\cos\theta)+a_{Oy}(y'+a\sin\theta)]\cos\varphi+\\ [-a_{Ox}(y'+a\sin\theta)+a_{Oy}(x'+a\cos\theta)]\sin\varphi\}$$

其中 $\dot{\varphi}=\omega$，于是有

$$\frac{\partial V^0}{\partial x'}+\frac{\partial V^0}{\partial y'}\frac{\partial\dot{y}'}{\partial\dot{x}'}=\frac{m}{\cos\theta}[a_{Ox}\cos(\theta+\varphi)+a_{Oy}\sin(\theta+\varphi)]$$

$$\frac{\partial V^0}{\partial\theta}+\frac{\partial V^0}{\partial y'}\frac{\partial\dot{y}'}{\partial\dot{\theta}}=ma[-a_{Ox}\sin(\theta+\varphi)+a_{Oy}\cos(\theta+\varphi)]$$

又

$$V^{\omega}=-\frac{1}{2}\{J_C'+m[(x'+a\cos\theta)^2+(y'+a\sin\theta)^2]\}\omega^2$$

因此

$$\frac{\partial V^{\omega}}{\partial x'}+\frac{\partial V^{\omega}}{\partial y'}\frac{\partial\dot{y}'}{\partial\dot{x}'}=-m\omega^2[(x'+a\cos\theta)+(y'+a\sin\theta)\tan\theta]$$

$$\frac{\partial V^{\omega}}{\partial\theta}+\frac{\partial V^{\omega}}{\partial y'}\frac{\partial\dot{y}'}{\partial\dot{\theta}}=-m\omega^2(-x'\sin\theta+y'\cos\theta)$$

广义转动惯性力可计算得

$$Q_1^{\dot{\omega}}=m\dot{\omega}(y'+a\sin\theta)$$

$$Q_2^{\dot{\omega}}=-m\dot{\omega}(x'a\cos\theta+y'a\sin\theta+a^2)-J_C\dot{\omega}$$

$$Q_3^{\dot{\omega}}=-m\dot{\omega}(x'+a\cos\theta)$$

其中令 $q_1=x', q_2=\theta, q_3=y'$。于是

$$\widetilde{Q}_1^{\dot{\omega}}=Q_1^{\dot{\omega}}+Q_3^{\dot{\omega}}\frac{\partial \dot{y}'}{\partial \dot{x}'}=m\dot{\omega}(y'-x'\tan\theta)$$

$$\widetilde{Q}_2^{\dot{\omega}}=-m\dot{\omega}(x'a\cos\theta+y'a\sin\theta+a^2)-J_C\dot{\omega}$$

广义陀螺力为

$$\Gamma_1=2ma\omega\dot{\theta}\cos\theta+2m\omega\dot{x}'\tan\theta$$

$$\Gamma_2=-2ma\omega\frac{\dot{x}'}{\cos\theta}$$

$$\Gamma_3=-2m\omega\dot{x}'+2ma\omega\dot{\theta}\sin\theta$$

于是

$$\widetilde{\Gamma}_1=\Gamma_1+\Gamma_3\frac{\partial \dot{y}'}{\partial \dot{x}'}=\frac{2ma\omega\dot{\theta}}{\cos\theta},\quad \widetilde{\Gamma}_2=-2ma\omega\frac{\dot{x}'}{\cos\theta}$$

最后，代入方程，得到

$$m\left(\frac{\ddot{x}'}{\cos^2\theta}+\frac{2\dot{x}'\dot{\theta}\sin\theta}{\cos^3\theta}\right)-m(\dot{x}'\tan\theta+a\dot{\theta}\cos\theta)\frac{\dot{\theta}}{\cos^2\theta}=$$
$$-\frac{m}{\cos\theta}[a_{Ox}\cos(\theta+\varphi)+a_{Oy}\sin(\theta+\varphi)]+$$
$$m\omega^2[x'+a\cos\theta+(y'+a\sin\theta)\tan\theta]+m\dot{\omega}(y'-x'\tan\theta)+2ma\omega\frac{\dot{\theta}}{\cos\theta}$$

$$(J_C+ma^2)\ddot{\theta}-m\frac{\dot{x}'^2\sin\theta}{\cos^3\theta}+m(\dot{x}'\tan\theta+a\dot{\theta}\cos\theta)\frac{\dot{x}'}{\cos^2\theta}=$$
$$-ma[-a_{Ox}\sin(\theta+\varphi)+a_{Oy}\cos(\theta+\varphi)]+ma\omega^2(-x'\sin\theta+y'\cos\theta)-$$
$$m\dot{\omega}(x'a\cos\theta+y'a\sin\theta+a^2)-J_C\dot{\omega}-2ma\omega\frac{\dot{x}'}{\cos\theta}$$

14.4.3 打击运动

打击运动的 d'Alembert-Lagrange 原理在广义坐标下表示为式(9.4.6)，即

$$\sum_{s=1}^{n}\left\{-\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}\right)_1+\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}\right)_0+\hat{Q}_s\right\}\delta q_s=0 \tag{14.4.18}$$

其中

$$\hat{Q}_s=\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{I}_i\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_s} \tag{14.4.19}$$

为广义打击冲量。原理(14.4.18)不仅适合完整系统，而且适合非完整系统，只要施加非完整约束对虚位移 δq_s 的限制。

设系统所受非完整约束为线性的，有形式

$$\dot{q}_{\varepsilon+\beta} = \sum_{\sigma=1}^{\varepsilon} B_{\varepsilon+\beta,\sigma}\dot{q}_\sigma + B_{\varepsilon+\beta} \qquad (\beta = 1,2,\cdots,g;\varepsilon = n-g) \tag{14.4.20}$$

约束(14.4.20)加在虚位移上的条件为

$$\delta q_{\varepsilon+\beta} = \sum_{\sigma=1}^{\varepsilon} B_{\varepsilon+\beta,\sigma}\delta q_\sigma \tag{14.4.21}$$

将式(14.4.21)代入原理(14.4.18)，注意到 δq_σ 的独立性，得到 Maggi 型方程

$$-\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\sigma}\right)_1 + \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\sigma}\right)_0 + \hat{Q}_\sigma + \sum_{\beta=1}^{g}\left\{-\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}\right)_1 + \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}\right)_0 + \hat{Q}_{\varepsilon+\beta}\right\}B_{\varepsilon+\beta,\sigma} = 0$$

$$(\sigma = 1,2,\cdots,\varepsilon) \tag{14.4.22}$$

令 $\tilde{T}$ 为 T 中借助关系(14.4.20)消去不独立广义速度 $\dot{q}_{\varepsilon+\beta}$ 所得表达式，有

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \dot{q}_\sigma} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\sigma} + \sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}B_{\varepsilon+\beta,\sigma}$$

于是，方程(14.4.22)可写成形式

$$\left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \dot{q}_\sigma}\right)_1 - \left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \dot{q}_\sigma}\right)_0 = \tilde{\hat{Q}}_\sigma \qquad (\sigma=1,2,\cdots,\varepsilon) \tag{14.4.23}$$

其中

$$\tilde{\hat{Q}}_\sigma = \hat{Q}_\sigma + \sum_{\beta=1}^{g}\hat{Q}_{\varepsilon+\beta}B_{\varepsilon+\beta,\sigma} \tag{14.4.24}$$

方程(14.4.23)就是线性非完整系统的打击运动方程。

假设约束方程(14.4.20)在打击前后始终保持着，即有

$$(\dot{q}_{\varepsilon+\beta})_0 = \sum_{\sigma=1}^{\varepsilon} B_{\varepsilon+\beta,\sigma}(\dot{q}_\sigma)_0 + B_{\varepsilon+\beta}$$

$$(\dot{q}_{\varepsilon+\beta})_1 = \sum_{\sigma=1}^{\varepsilon} B_{\varepsilon+\beta,\sigma}(\dot{q}_\sigma)_1 + B_{\varepsilon+\beta}$$

于是得

$$(\dot{q}_{\varepsilon+\beta})_1 - (\dot{q}_{\varepsilon+\beta})_0 = \sum_{\sigma=1}^{\varepsilon} B_{\varepsilon+\beta,\sigma}\{(\dot{q}_\sigma)_1 - (\dot{q}_\sigma)_0\} \tag{14.4.25}$$

方程(14.4.23)和(14.4.25)联合，便可求解。

上面讨论的是给定打击冲量的情形。瞬时加上约束的情形，已在§9.4中讨论过。

例 3 沿位于水平面的雪橇的前端垂直于滑木平面给以打击，求打击运动。

解：如图 14.1 所示，取雪橇与平面接触点 P 的坐标(x,y)，以及滑木（或冰刀）方向与固定轴 Ox 夹角 θ 为广义坐标。约束方程为

$$\dot{y}=\dot{x}\tan\theta$$

系统的动能为

$$T=\frac{1}{2}m\{(\dot{x}-a\dot{\theta}\sin\theta)^2+(\dot{y}+a\dot{\theta}\cos\theta)^2\}+\frac{1}{2}J_C\dot{\theta}^2$$

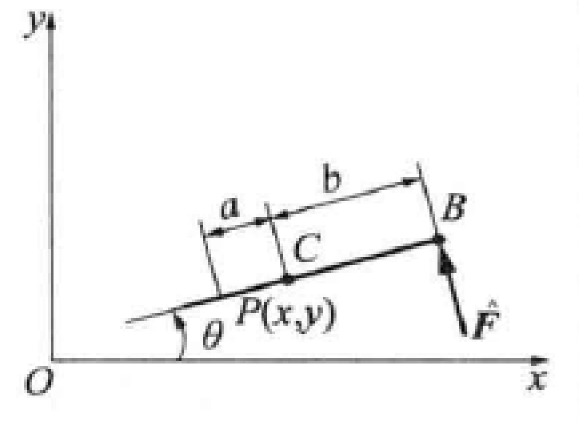


图 14.1

其中 m 为雪橇质量；J_C 为它对质心的转动惯量；a 为质心 C 距接触点 P 的距离。嵌入约束后的动能为

$$\widetilde{T}=\frac{1}{2}m\left\{\frac{\dot{x}^2}{\cos^2\theta}+\left(\frac{J_c}{m}+a^2\right)\dot{\theta}^2\right\}$$

设打击点 B 在 PC 的延长线上，且$\overline{BC}=b$。打击冲量$\hat{\boldsymbol{F}}$的元功为

$$-\hat{F}\sin\theta\delta x+\hat{F}\cos\theta\delta y+(a+b)\hat{F}\delta\theta$$

于是广义打击冲量为

$$\hat{Q}_x=-\hat{F}\sin\theta,\quad \hat{Q}_y=\hat{F}\cos\theta,\quad \hat{Q}_\theta=(a+b)\hat{F}$$

考虑到约束后，有

$$\widetilde{\hat{Q}}_x=\hat{Q}_x+\hat{Q}_y\tan\theta=0,\quad \widetilde{\hat{Q}}_\theta=\hat{Q}_\theta=(a+b)\hat{F}$$

打击运动方程(14.4.23)给出

$$\left(\frac{\partial\widetilde{T}}{\partial\dot{x}}\right)_1-\left(\frac{\partial\widetilde{T}}{\partial\dot{x}}\right)_0=\widetilde{\hat{Q}}_x,\quad \left(\frac{\partial\widetilde{T}}{\partial\dot{\theta}}\right)_1-\left(\frac{\partial\widetilde{T}}{\partial\dot{\theta}}\right)_0=\widetilde{\hat{Q}}_\theta$$

注意到打击前系统处于静止状态，有

$$\left(\frac{\partial\widetilde{T}}{\partial\dot{x}}\right)_0=0,\quad \left(\frac{\partial\widetilde{T}}{\partial\dot{\theta}}\right)_0=0$$

于是得到 $(\dot{x})_1=0,\quad (J_C+ma^2)(\dot{\theta})_1=(a+b)\hat{F}$

例 4 质量为 m，半径为 a 的匀质圆球沿粗糙水平面无滑动地滚动。在瞬间 t_0，它与粗糙的弹性墙相碰，求碰后的速度。

解:取球心坐标(x,y,z)及3个Euler角ψ,θ,φ为广义坐标,球的动能为

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)+\frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}ma^2\right)(\dot{\psi}^2+\dot{\theta}^2+\dot{\varphi}^2+2\,\dot{\varphi}\dot{\psi}\cos\theta)$$

在碰前所受约束为

$$\dot{x}=a(\dot{\theta}\sin\psi-\dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi)$$

$$\dot{y}=-a(\dot{\theta}\cos\psi+\dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi)$$

$$\dot{z}=0$$

它表明球在水平面做无滑滚动。假设与球相碰的墙与平面Oxy重合,在打击时在系统上瞬时地加上新的补充约束

$$\dot{x}=0,\quad \dot{y}-a(\dot{\psi}+\dot{\varphi}\cos\theta)=0,\quad \dot{\theta}\sin\psi-\dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi=0$$

它们可归结为两个方程

$$\dot{\theta}\sin\psi-\dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi=0,\quad \dot{\theta}\cos\psi+\dot{\varphi}(\sin\theta\sin\psi+\cos\theta)+\dot{\psi}=0$$

嵌入约束后的动能为

$$\tilde{T}=\frac{1}{2}ma^2\left\{\frac{7}{5}\dot{\theta}^2+\left(\frac{2}{5}+\sin^2\theta\right)\dot{\varphi}^2+\frac{2}{5}(\dot{\psi}^2+2\,\dot{\varphi}\dot{\psi}\cos\theta)\right\}$$

取$\dot{\varphi}$为独立的广义速度,解出$\dot{\psi}$和$\dot{\theta}$

$$\dot{\psi}=-\dot{\varphi}\left(\frac{\sin\theta}{\sin\psi}+\cos\theta\right),\quad \dot{\theta}=\dot{\varphi}\sin\theta\cot\psi$$

打击运动的Maggi型方程(9.4.15)给出

$$\left(\frac{\partial\tilde{T}}{\partial\dot{\varphi}}+\frac{\partial\tilde{T}}{\partial\dot{\psi}}\frac{\partial\dot{\psi}}{\partial\dot{\varphi}}+\frac{\partial\tilde{T}}{\partial\dot{\theta}}\frac{\partial\dot{\theta}}{\partial\dot{\varphi}}\right)_1=\left(\frac{\partial\tilde{T}}{\partial\dot{\varphi}}+\frac{\partial\tilde{T}}{\partial\dot{\psi}}\frac{\partial\dot{\psi}}{\partial\dot{\varphi}}+\frac{\partial\tilde{T}}{\partial\dot{\theta}}\frac{\partial\dot{\theta}}{\partial\dot{\varphi}}\right)_0$$

即

$$\left(\frac{7}{5}\sin\theta\sin\psi-\frac{2}{5}\cos\theta\right)\{(\dot{\varphi})_1-(\dot{\varphi})_0\}-\frac{2}{5}\{(\dot{\psi})_1-(\dot{\psi})_0\}+$$

$$\frac{7}{5}\{(\dot{\theta})_1-(\dot{\theta})_0\}\cos\psi=0$$

为确定碰后速度,尚需补充两个方程。为此,假设球与墙的接触点的速度在打击终了之前等于零,这表明

$$(\dot{\psi})_1=-(\dot{\varphi})_1\left(\frac{\sin\theta}{\sin\psi}+\cos\theta\right),(\dot{\theta})_1=(\dot{\varphi})_1\sin\theta\cot\psi$$

这样就可由已知打击前的$(\dot{\psi})_0$,$(\dot{\theta})_0$,$(\dot{\varphi})_0$,求出打击后的$(\dot{\psi})_1$,$(\dot{\theta})_1$,$(\dot{\varphi})_1$。

14.4.4 变质量系统

变质量系统的 d'Alembert-Lagrange 原理在凝固导数和凝固偏导数下表示为式(10.4.5)，即

$$\sum_{s=1}^{n}\left\{-\frac{\mathrm{d}^{*}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial^{*}T}{\partial\dot{q}_{s}}+\frac{\partial^{*}T}{\partial q_{s}}+Q_{s}+\Psi_{s}\right\}\delta q_{s}=0 \qquad (14.4.26)$$

其中

$$Q_{s}=\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{F}_{i}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}_{i}}{\partial q_{s}} \qquad (14.4.27)$$

为广义力，而

$$\Psi_{s}=\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{R}_{i}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}_{i}}{\partial q_{s}} \qquad (14.4.28)$$

为广义反推力。在普遍导数和普通偏导数下表示为式(10.4.8)，即

$$\sum_{s=1}^{n}\left\{-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_{s}}+\frac{\partial T}{\partial q_{s}}+Q_{s}+P_{s}\right\}\delta q_{s}=0 \qquad (14.4.29)$$

其中

$$P_{s}=\sum_{i=1}^{N}\left\{(\boldsymbol{R}_{i}+\dot{m}_{i}\dot{\boldsymbol{r}}_{i})\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}_{i}}{\partial q_{s}}-\frac{1}{2}v_{i}^{2}\frac{\partial m_{i}}{\partial q_{s}}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}v_{i}^{2}\frac{\partial m_{i}}{\partial\dot{q}_{s}}\right)\right\} \qquad (14.4.30)$$

设非完整约束为

$$f_{\beta}(q_{s},\dot{q}_{s},t)=0 \qquad (14.4.31)$$

约束加在虚位移上的限制为

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial f_{\beta}}{\partial\dot{q}_{s}}\delta q_{s}=0 \qquad (14.4.32)$$

利用 Lagrange 乘子法，由式(14.4.32)和原理(14.4.26)得到带乘子的方程

$$\frac{\mathrm{d}^{*}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial^{*}T}{\partial\dot{q}_{s}}-\frac{\partial^{*}T}{\partial q_{s}}=Q_{s}+\Psi_{s}+\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_{\beta}\frac{\partial f_{\beta}}{\partial\dot{q}_{s}}\qquad(s=1,2,\cdots,n) \qquad (14.4.33)$$

由式(14.4.32)和原理(14.4.29)得到带乘子的方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_{s}}-\frac{\partial T}{\partial q_{s}}=Q_{s}+P_{s}+\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_{\beta}\frac{\partial f_{\beta}}{\partial\dot{q}_{s}} \qquad (14.4.34)$$

设非完整约束表示为

$$\dot{q}_{\varepsilon+\beta}=\varphi_{\beta}(q_{s},\dot{q}_{\sigma},t)\qquad\begin{pmatrix}\beta=1,2,\cdots,g;\sigma=1,2,\cdots,\varepsilon;\\ \varepsilon=n-g;s=1,2,\cdots,n\end{pmatrix} \qquad (14.4.35)$$

由原理(14.4.26)可导出变质量非完整系统的广义 Чаплыгин 方程

$$\frac{\mathrm{d}^*}{\mathrm{d}t}\frac{\partial^*\widetilde{T}}{\partial\dot{q}_\sigma}-\frac{\partial^*\widetilde{T}}{\partial q_\sigma}-\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial^*T}{\partial\dot{q}_{\varepsilon+\beta}}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial\dot{q}_\sigma}-\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial q_\sigma}\right)-\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial^*T}{\partial q_{\varepsilon+\beta}}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial\dot{q}_\sigma}=$$
$$\widetilde{Q}_\sigma+\widetilde{\Psi}_\sigma\qquad(\sigma=1,2,\cdots,\varepsilon)\tag{14.4.36}$$

由原理(14.4.29)可导出广义 Чаплыгин 方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\widetilde{T}}{\partial\dot{q}_\sigma}-\frac{\partial\widetilde{T}}{\partial q_\sigma}-\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_{\varepsilon+\beta}}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial\dot{q}_\sigma}-\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial q_\sigma}\right)-\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial T}{\partial q_{\varepsilon+\beta}}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial\dot{q}_\sigma}=$$
$$\widetilde{Q}_\sigma+\widetilde{P}_\sigma\qquad(\sigma=1,2,\cdots,\varepsilon)\tag{14.4.37}$$

同时,也可导出 Appell 方程

$$\frac{\partial\widetilde{S}}{\partial\ddot{q}_\sigma}=\widetilde{Q}_\sigma+\widetilde{\Psi}_\sigma\qquad(\sigma=1,2,\cdots,\varepsilon)\tag{14.4.38}$$

例 5 变质量 Чаплыгин 雪橇[22]。

解:在 Чаплыгин 雪橇对称轴上附加一质点 B,其质量随时间变化 $m=m(t)$,并距接触点为 b。考虑到附加质量质点之后,系统动能为

$$T=\frac{1}{2}M\{(\dot{x}-a\dot{\theta}\sin\theta)^2+(\dot{y}+a\dot{\theta}\cos\theta)^2\}+\frac{1}{2}J_c\dot{\theta}^2+$$
$$\frac{1}{2}m(t)\{(\dot{x}-b\dot{\theta}\sin\theta)^2+(\dot{y}+b\dot{\theta}\cos\theta)^2\}$$

约束方程为

$$\dot{y}=\dot{x}\tan\theta$$

于是

$$\widetilde{T}=\frac{1}{2}[M+m(t)]\dot{x}^2(1+\tan^2\theta)+\frac{1}{2}[J_c+Ma^2+m(t)b^2]\dot{\theta}^2$$

下面利用方程(14.4.36)来组建系统的运动微分方程。方程(14.4.36)给出

$$\frac{\mathrm{d}^*}{\mathrm{d}t}\frac{\partial^*\widetilde{T}}{\partial\dot{x}}-\frac{\partial^*\widetilde{T}}{\partial x}-\frac{\partial^*T}{\partial\dot{y}}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\dot{y}}{\partial\dot{x}}-\frac{\partial\dot{y}}{\partial x}\right)-\frac{\partial^*T}{\partial y}\frac{\partial\dot{y}}{\partial\dot{x}}=\widetilde{Q}_x+\widetilde{\Psi}_x$$

$$\frac{\mathrm{d}^*}{\mathrm{d}t}\frac{\partial^*\widetilde{T}}{\partial\dot{\theta}}-\frac{\partial^*\widetilde{T}}{\partial\theta}-\frac{\partial^*T}{\partial\dot{y}}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\dot{y}}{\partial\dot{\theta}}-\frac{\partial\dot{y}}{\partial\theta}\right)-\frac{\partial^*T}{\partial y}\frac{\partial\dot{y}}{\partial\dot{\theta}}=\widetilde{Q}_\theta+\widetilde{\Psi}_\theta$$

做计算,有

$$\frac{\partial^*\widetilde{T}}{\partial\dot{x}}=[M+m(t)]\dot{x}(1+\tan^2\theta),\quad\frac{\partial^*\widetilde{T}}{\partial x}=0$$

$$\frac{\partial^* \widetilde{T}}{\partial \dot{\theta}}=[J_c+Ma^2+m(t)b^2]\dot{\theta}, \quad \frac{\partial^* \widetilde{T}}{\partial \theta}=[M+m(t)]\frac{\dot{x}^2\tan\theta}{\cos^2\theta}$$

$$\frac{\partial \dot{y}}{\partial \dot{x}}=\tan\theta, \quad \frac{\partial \dot{y}}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial \dot{y}}{\partial \dot{\theta}}=0, \quad \frac{\partial \dot{y}}{\partial \theta}=\frac{\dot{x}}{\cos^2\theta}$$

$$\widetilde{Q}_x=\widetilde{Q}_\theta=0, \quad \widetilde{\Psi}_x=\Psi_x+\Psi_y\frac{\partial \dot{y}}{\partial \dot{x}}=\dot{m}u\frac{\cos\alpha}{\cos\theta}, \quad \widetilde{\Psi}_\theta=\dot{m}ub\sin\alpha$$

其中 α 为微粒相对速度 $\boldsymbol{u}$ 与 PC 的夹角。将上面表达式代入方程，得

$$\frac{1}{\cos^2\theta}[M+m(t)](\ddot{x}+\dot{x}\dot{\theta}\tan\theta)-\frac{\dot{\theta}^2}{\cos\theta}[Ma+m(t)b]=\dot{m}u\frac{\cos\alpha}{\cos\theta}$$

$$[J_c+Ma^2+m(t)b^2]\ddot{\theta}+\frac{\dot{x}\dot{\theta}}{\cos\theta}[Ma+m(t)b]=\dot{m}ub\sin\alpha$$

研究一特殊情形

$$a=0, \quad J_c=Mb^2, \quad \boldsymbol{u}=-\boldsymbol{u}_B$$

则方程可归结为 Riccati 方程，因此可积分到底[22]。

至少有一个非完整约束的系统称为非完整系统。非完整力学是继 Lagrange力学和 Hamilton 力学之后分析力学发展的第三阶段。本章介绍的是非完整系统力学的基础，包括基本概念、运动微分方程、积分方法、专门问题等。非完整力学有丰富的内容，可参考专著[1,10,13,15,19,20,22,23]等。

思考题

14.1 非完整约束对虚位移限制的 Четаев 条件(14.1.2)，曾受到怀疑，有人说它既不是物理的，也不是数学的。应该怎样理解 Четаев 条件？

14.2 由 d'Alembert-Lagrange 原理的 Nielsen 形式(14.2.3)能否导出非完整系统不带乘子的运动方程？

14.3 将完整系统的第一积分当作非完整约束，会出现矛盾吗？例如对完整系统 $L=\frac{1}{2}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2)$，$Q_1=q_1$，$Q_2=q_2$，有积分 $f=\dot{q}_1q_2-q_1\dot{q}_2=C$。将这个积分当作非完整约束，用非完整系统的方程来研究，会有什么结果？

14.4 对 Четаев 型非完整系统，ε 个 Lindelöf 方程 (14.2.52)中，一个都不能成立。对否？

14.5 有人说 Appell-Hamel 例可以 Lagrange 化，能做到吗？

习题

14.1　一质点在空间 $Oxyz$ 中运动,所受非完整约束为

$$f=\dot{y}-z\dot{x}=0$$

试计算 d,δ 交换关系。

14.2　一质点在空间运动,所受非完整约束为

$$\dot{z}=(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{\frac{1}{2}}$$

试计算 d,δ 交换关系。

14.3　一质量为 m 的质点,受速度大小为常数的非完整约束

$$\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2\cos^2\theta+r^2\dot{\theta}^2=c^2$$

其中 r,θ,φ 为球坐标,广义力为

$$Q_r=-\frac{mM\gamma}{r^2},\quad Q_\theta=Q_\varphi=0$$

其中 m,γ 为常数。试列写系统的运动微分方程。

14.4　试用 Appell 方程建立 Чаплыгин 雪橇的运动微分方程。

14.5　系统的 Lagrange 函数为

$$L=\frac{1}{2}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2+\dot{q}_3^2)-\frac{1}{2}(q_1^2+q_2^2+q_3^2)$$

广义力为

$$Q_1=\dot{q}_2,\quad Q_2=-\dot{q}_1,\quad Q_3=0$$

非完整约束方程为

$$f=\dot{q}_3-q_1\dot{q}_2=0$$

试写出能量积分。

14.6　试证:对相对运动动力学方程(14.4.13),如果 L_r 不显含 t,非势力不存在,$\dot{\omega}=0$,且约束方程对广义速度 $\dot{q}_s$ 是齐次的,则存在广义能量积分

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L_r}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s-L_r=h=\mathrm{const.}$$

参考文献

[1]Неймарк ЮИ,Фуфаев НА. Динамика Неголономных Систем[M]. Москва: Наука,1967.
[2]Синг Дж Л. Классическая Динамика[M]. Москва:Наука,1961.
[3]Лурье АИ. Аналитическая Механика[M]. Москва:ГИФМЛ,1961.

[4]Wittenberg J. Dynamics of Systems of Rigid Bodies[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1977.
[5]Appell P. Sur les liaisons exprimées par des relations non linéaires entre les vitesses[J]. C. R. Acad Sci Paris, 1911, 152: 1197-1199.
[6]Delassus D. Sur les liaisons non linéaires[J]. C. R. Acad Sci Paris, 1911, 153: 626-628.
[7]Ghori QK. Hamilton-Jacobi theorem for nonlinear nonholonomic systems [J]. ZAMM, 1970, 50: 563-564.
[8]Van Dooren R. Generalized methods for nonholonomic systems with applications in various field of classical mechanics [C]. in TAM Proc. 14th IUTAM Congress, Delf, 1976: 373-391.
[9]Rumyatsev VV, Sumbatov AS. On the problem of generalization of Hamilton-Jacobi method for nonholonomic systems[J]. ZAMM, 1978, 58: 477-481.
[10]陈滨. 分析动力学[M]. 北京:北京大学出版社, 1987.
[11]Добронравов ВВ. Об основых положениях механики неголономных систем[C]. Механика. МВТУ, 50, 1955.
[12] Фрадлин БН. Аналитическая динамика механических систем с нелинейными связями[J]. Пркл Мех, 1965, 1: 7.
[13] Новосёлов ВС. Вариационные Методы в Механике [М]. Ленинград: ЛГУ, 1966.
[14]陈滨. 关于非完整力学的一个争议[J]. 力学学报, 1991, 23(3): 379-384.
[15]梅凤翔. 非完整动力学研究[M]. 北京:北京工业学院出版社, 1987.
[16]牛青萍. 经典力学基本微分原理与不完整力学组的运动方程[J]. 力学学报, 1964, 7(2): 139-148.
[17]Воронец ПВ. Об уравнениях движения для неголономных систем[J]. Мат Сбор, 1901, 22(4): 659-686.
[18]Чаплыгин СА. О движении тяжелого тела вращения на горизонтальной плоскости [J]. ТФНОЛЕАА, 1897, 9(1): 10-16.
[19]Hamel G. Theoretische Mechanik[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1949.
[20]Appell P. Traité de Mécanique Rationnelle[M]. T Ⅱ. Sixième É d. Paris: Gauthier-Villars, 1953.
[21]Lindelöf E. Sur le mouvement d'un corps de révolution roulant sur unn plan horisontal[J]. Acta Societatis Scientiarum Fennicae, 1895, 20(10): 1-18.
[22]梅凤翔. 非完整系统力学基础[M]. 北京:北京工业学院出版社, 1985.
[23]梅凤翔, 刘端, 罗勇. 高等分析力学[M]. 北京:北京理工大学出版社, 1991.

15

Birkhoff 系统

1927 年，Birkhoff GD(1884—1944)在其名著《动力系统》[1]中给出一类积分变分原理和一类运动微分方程。1983 年，Santilli 在其著作[2]中将 Birkhoff 的结果推广到包含时间的情形，将方程称为 Birkhoff 方程，并以此方程为基础提出“**Birkhoff 力学**”一词。专著[3,4]研究了 Birkhoff 系统动力学。

§15.1 Pfaff-Birkhoff 原理

本节讨论 Pfaff-Birkhoff 原理，包括 Birkhoff 的贡献、Santilli 的总结，以及 Pfaff-Birkhoff 原理的推广。

15.1.1 Birkhoff 的贡献

1927 年，美国著名数学家 Birkhoff 出版专著《动力系统》，书中有下面一段文字：

“现在假设我们取扩充的 Pfaff 变分问题

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}\Big[\sum_{j=1}^{2m}X_j(x_1,\cdots,x_{2m})x_j'+Z(x_1,\cdots,x_{2m})\Big]\mathrm{d}t=0 \tag{12}$$

它立即导出阶为 $2m$ 的常微分方程组

$$\sum_{j=1}^{2m}\left(\frac{\partial X_i}{\partial x_j}-\frac{\partial X_j}{\partial x_i}\right)\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}-\frac{\partial Z}{\partial x_i}=0 \qquad (i=1,\cdots,2m) \tag{13}$$

当在原点有平衡点的情形，假设 $2m$ 个解析函数 X_i 使得反对称行列式

$$\left|\frac{\partial X_i}{\partial x_j}-\frac{\partial X_j}{\partial x_i}\right|$$

在原点不为零，我们来考虑这些方程。函数 X_i 的级数中的常数项显然可全部忽略。

显然，Hamilton 方程是 Pfaff 方程(12)的特殊情形，如在前一章证明的，一旦一阶稳定的明显条件得以满足，Hamilton 方程的这种推广就具有自动成立

完全稳定的所有条件的性质。因此,从这一观点来看,Pfaff 方程比 Hamilton 方程对动力学似乎更有意义,类型更为一般,而且,它们具有在形式群的任何变换下保持其 Pfaff 形式的更大优越性。"[1]

15.1.2 Santilli 的总结

美国强子物理学家 Santilli 在其著作[2]中研究了 Birkhoff 方程、Birkhoff 方程的变换理论和 Galilei 相对论的推广等问题,并对方程的起源与其后研究作了很好的总结。

1978 年,Santilli 提议将下述方程命名为 Birkhoff 方程

$$\sum_{\nu=1}^{2n}\left(\frac{\partial R_\nu(t,\boldsymbol{a})}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu(t,\boldsymbol{a})}{\partial a^\nu}\right)\dot{a}^\nu-\left[\frac{\partial B(t,\boldsymbol{a})}{\partial a^\mu}+\frac{\partial R_\mu(t,\boldsymbol{a})}{\partial t}\right]=0$$

$$(\mu=1,2,\cdots,2n) \tag{15.1.1}$$

而函数 $B(t,\boldsymbol{a})$ 命名为 Birkhoff 函数。显然,方程(15.1.1)比 Birkhoff 原来的方程(13)更为一般。

15.1.3 Pfaff-Birkhoff 原理

积分

$$A=\int_{t_0}^{t_1}\left\{\sum_{\nu=1}^{2n}R_\nu(t,\boldsymbol{a})\,\dot{a}^\nu-B(t,\boldsymbol{a})\right\}\mathrm{d}t \tag{15.1.2}$$

称为 **Pfaff 作用量**。积分(15.1.2)的被积函数是一个 Pfaff 形式

$$\omega_1=\sum_{\nu=1}^{2n}R_\nu(t,\boldsymbol{a})\mathrm{d}a^\nu-B(t,\boldsymbol{a})\mathrm{d}t \tag{15.1.3}$$

其中 $B(t,\boldsymbol{a})$ 称为 **Birkhoff 函数**,$R_\mu(t,\boldsymbol{a})$,$(\mu=1,2,\cdots,2n)$ 称为 **Birkhoff 函数组**。

等时变分原理

$$\delta A=0 \tag{15.1.4}$$

带有交换关系

$$\mathrm{d}\delta a^\nu=\delta\mathrm{d}a^\nu \qquad (\nu=1,2,\cdots,2n) \tag{15.1.5}$$

以及端点条件

$$\delta a^\nu\Big|_{t=t_0}=\delta a^\nu\Big|_{t=t_1}=0 \qquad (\nu=1,2,\cdots,2n) \tag{15.1.6}$$

称为 **Pfaff-Birkhoff 原理**。

如果取

$$a^\mu=\begin{cases}q_\mu & (\mu=1,2,\cdots,n)\\ p_{\mu-n} & (\mu=n+1,n+2,\cdots,2n)\end{cases}$$

$$R_\nu=\begin{cases}p_\nu & (\nu=1,2,\cdots,n)\\ 0 & (\nu=n+1,n+2,\cdots,2n)\end{cases}$$

$$B=H$$

则原理(15.1.4)成为

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}\Big(\sum_{s=1}^{n}p_s\dot{q}_s-H\Big)\mathrm{d}t=0 \tag{15.1.7}$$

这就是正则变量表示的 Hamilton 原理。因此,Hamilton 原理是 Pfaff-Birkhoff 原理的特殊情形。

15.1.4 Pfaff-Birkhoff 原理的推广

类似于 Hamilton 原理可以推广到非保守系统,Pfaff-Birkhoff 原理(15.1.4)可作如下推广[5]

$$\int_{t_0}^{t_1}\Big\{\delta\Big(\sum_{\nu=1}^{2n}R_\nu\dot{a}^\nu-B\Big)+\delta'\boldsymbol{W}\Big\}\mathrm{d}t=0 \tag{15.1.8}$$

其中

$$\delta'\boldsymbol{W}=\sum_{\nu=1}^{2n}\Lambda_\nu(t,\boldsymbol{a})\delta a^\nu \tag{15.1.9}$$

原理(15.1.8)称为**广义 Pfaff-Birkhoff 原理**。

当取

$$\Lambda_\nu=\begin{cases}Q_\nu & (\nu=1,2,\cdots,n)\\ 0 & (\nu=n+1,n+2,\cdots,2n)\end{cases} \tag{15.1.10}$$

时,原理(15.1.8)给出

$$\int_{t_0}^{t_1}\Big\{\delta\Big(\sum_{s=1}^{n}p_s\dot{q}_s-H\Big)+\sum_{s=1}^{n}Q_s\delta q_s\Big\}\mathrm{d}t=0 \tag{15.1.11}$$

§15.2 Birkhoff 方程

本节讨论 Birkhoff 方程的来源、Birkhoff 方程的形式、Birkhoff 方程的代数和几何性质、自伴随性质,以及 Birkhoff 方程的推广等。

15.2.1 Birkhoff 方程的导出

1)由 Pfaff-Birkhoff 原理导出

展开 Pfaff-Birkhoff 原理,得

$$\begin{aligned}0=\delta A&=\int_{t_0}^{t_1}\Big(\sum_{\nu=1}^{2n}\sum_{\mu=1}^{2n}\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu}\dot{a}^\nu\delta a^\mu+\sum_{\nu=1}^{2n}R_\nu\delta\dot{a}^\nu-\sum_{\mu=1}^{2n}\frac{\partial B}{\partial a^\mu}\delta a^\mu\Big)\mathrm{d}t\\&=\sum_{\mu=1}^{2n}R_\mu\delta a^\mu\Big|_{t=t_0}^{t=t_1}+\int_{t_0}^{t_1}\sum_{\mu=1}^{2n}\Big\{\sum_{\nu=1}^{2n}\Big(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu}\Big)\dot{a}^\nu-\frac{\partial B}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu}{\partial t}\Big\}\delta a^\mu\,\mathrm{d}t\end{aligned} \tag{15.2.1}$$

考虑到端点条件

$$\delta a^\mu\Big|_{t=t_0}=\delta a^\mu\Big|_{t=t_1}=0$$

以及积分区间$[t_0, t_1]$的任意性,得到

$$\sum_{\mu=1}^{2n}\left\{\sum_{\nu=1}^{2n}\left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu}\right)\dot{a}^\nu-\frac{\partial B}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu}{\partial t}\right\}\delta a^\mu=0 \qquad (15.2.2)$$

原理(15.2.2)称为 **Pfaff-Birkhoff-d'Alembert 原理**[3]。如果原理(15.2.2)中的δa^μ是彼此独立的,任意的,则得到方程

$$\sum_{\nu=1}^{2n}\left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu}\right)\dot{a}^\nu-\frac{\partial B}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu}{\partial t}=0 \qquad (\mu=1,2,\cdots,2n) \quad (15.2.3)$$

这就是 **Birkhoff 方程**

2)由正则方程导出

Hamilton 正则方程经历正则变换仍是正则方程,经历一般非正则变换将成为 Birkhoff 方程。

Hamilton 正则方程可表示为

$$\sum_{\nu=1}^{2n}\left(\frac{\partial R_\nu^0(\boldsymbol{a})}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu^0(\boldsymbol{a})}{\partial a^\nu}\right)\dot{a}^\nu-\frac{\partial H(t,\boldsymbol{a})}{\partial a^\mu}=0 \qquad (\mu=1,2,\cdots,2n) \qquad (15.2.4)$$

其中

$$a^\mu=\begin{cases}q_\mu & (\mu=1,2,\cdots,n)\\ p_{\mu-n} & (\mu=n+1,n+2,\cdots,2n),\end{cases}$$

$$R_\mu^0=\begin{cases}p_\mu & (\mu=1,2,\cdots,n)\\ 0 & (\mu=n+1,n+2,\cdots,2n)\end{cases} \qquad (15.2.5)$$

在等时变换

$$t\to t'\equiv t, \quad a^\mu\to a'^\mu(\boldsymbol{a}) \qquad (15.2.6)$$

下,Hamilton 方程(15.2.4)变换为半自治 Birkhoff 方程

$$\sum_{\sigma=1}^{2n}\left(\frac{\partial R'_\sigma(\boldsymbol{a}')}{\partial a'^\rho}-\frac{\partial R'_\rho(\boldsymbol{a}')}{\partial a'^\sigma}\right)\dot{a}'^\sigma-\frac{\partial B'(t,\boldsymbol{a}')}{\partial a'^\rho}=0 \qquad (15.2.7)$$

其中

$$B'(t,\boldsymbol{a}')=H(t,\boldsymbol{a}(\boldsymbol{a}')), \quad R'_\rho(\boldsymbol{a}')=\left(\sum_{\alpha=1}^{2n}\frac{\partial a^\alpha}{\partial a'^\rho}R_\alpha^0\right)(\boldsymbol{a}') \quad (15.2.8)$$

证明如下[2]。

因

$$\frac{\partial R'_\sigma}{\partial a'^\rho}=\sum_{\alpha=1}^{2n}\frac{\partial^2 a^\alpha}{\partial a'^\rho\partial a'^\sigma}R_\alpha^0+\sum_{\alpha=1}^{2n}\sum_{\tau=1}^{2n}\frac{\partial a^\alpha}{\partial a'^\sigma}\frac{\partial R_\alpha^0}{\partial a^\tau}\frac{\partial a^\tau}{\partial a'^\rho}$$

$$\frac{\partial R'_\sigma}{\partial a'^\rho}-\frac{\partial R'_\rho}{\partial a'^\sigma}=\sum_{\alpha=1}^{2n}\sum_{\tau=1}^{2n}\left(\frac{\partial R_\alpha^0}{\partial a^\tau}-\frac{\partial R_\tau^0}{\partial a^\alpha}\right)\frac{\partial a^\alpha}{\partial a'^\sigma}\frac{\partial a^\tau}{\partial a'^\rho}$$

故

$$\sum_{\rho=1}^{2n}\sum_{\sigma=1}^{2n}\frac{\partial a'^{\rho}}{\partial a^{\mu}}\Big(\frac{\partial R'_{\sigma}}{\partial a'^{\rho}}-\frac{\partial R'_{\rho}}{\partial a'^{\sigma}}\Big)\dot{a}'^{\sigma}$$
$$=\sum_{\rho=1}^{2n}\sum_{\alpha=1}^{2n}\sum_{\nu=1}^{2n}\sum_{\sigma=1}^{2n}\sum_{\tau=1}^{2n}\Big(\frac{\partial R^0_{\alpha}}{\partial a^{\tau}}-\frac{\partial R^0_{\tau}}{\partial a^{\alpha}}\Big)\frac{\partial a^{\alpha}}{\partial a'^{\sigma}}\frac{\partial a^{\tau}}{\partial a'^{\rho}}\frac{\partial a'^{\rho}}{\partial a^{\mu}}\frac{\partial a'^{\sigma}}{\partial a^{\nu}}\dot{a}^{\nu} \quad (15.2.9)$$
$$=\sum_{\nu=1}^{2n}\Big(\frac{\partial R^0_{\nu}}{\partial a^{\mu}}-\frac{\partial R^0_{\mu}}{\partial a^{\nu}}\Big)\dot{a}^{\nu}$$

又

$$\frac{\partial B'}{\partial a'^{\rho}}=\sum_{\tau=1}^{2n}\frac{\partial B}{\partial a^{\tau}}\frac{\partial a^{\tau}}{\partial a'^{\rho}}$$

故有

$$\sum_{\rho=1}^{2n}\frac{\partial a'^{\rho}}{\partial a^{\mu}}\frac{\partial B'}{\partial a'^{\rho}}=\frac{\partial B}{\partial a^{\mu}} \quad (15.2.10)$$

由式(15.2.9)和(15.2.10),得

$$\sum_{\rho=1}^{2n}\frac{\partial a'^{\rho}}{\partial a^{\mu}}\Big\{\sum_{\sigma=1}^{2n}\Big(\frac{\partial R'_{\sigma}}{\partial a'^{\rho}}-\frac{\partial R'_{\rho}}{\partial a'^{\sigma}}\Big)\dot{a}'^{\sigma}-\frac{\partial B'}{\partial a'^{\rho}}\Big\}$$
$$=\sum_{\nu=1}^{2n}\Big(\frac{\partial R^0_{\nu}}{\partial a^{\mu}}-\frac{\partial R^0_{\mu}}{\partial a^{\nu}}\Big)\dot{a}^{\nu}-\frac{\partial B}{\partial a^{\mu}} \quad (15.2.11)$$

等式(15.2.11)右端为原变量$(t,\boldsymbol{a})$下的 Hamilton 方程的左端,而矩阵$\Big(\frac{\partial a'^{\rho}}{\partial a^{\mu}}\Big)$非奇异,故由式(15.2.11)导出方程(15.2.7)。证毕。

类似地,可证明在等时变换

$$t\to t'\equiv t,\quad a^{\mu}\to a'^{\mu}(t,\boldsymbol{a}) \quad (15.2.12)$$

下,Hamilton 方程(15.2.4)变换为非自治 Birkhoff 方程

$$\sum_{\sigma=1}^{2n}\Big(\frac{\partial R'_{\sigma}(t,\boldsymbol{a}')}{\partial a'^{\rho}}-\frac{\partial R'_{\rho}(t,\boldsymbol{a}')}{\partial a'^{\sigma}}\Big)\dot{a}'^{\sigma}-\Big(\frac{\partial B'(t,\boldsymbol{a}')}{\partial a'^{\rho}}+\frac{\partial R'_{\rho}(t,\boldsymbol{a}')}{\partial t}\Big)=0$$
$$(\rho=1,2,\cdots,2n) \quad (15.2.13)$$

其中

$$B'(t,\boldsymbol{a}')=\Big(H-\sum_{\alpha=1}^{2n}\frac{\partial a^{\alpha}}{\partial t}R^0_{\alpha}\Big)(t,\boldsymbol{a}')$$
$$R'_{\rho}(t,\boldsymbol{a}')=\Big(\sum_{\alpha=1}^{2n}\frac{\partial a^{\alpha}}{\partial a'^{\rho}}R^0_{\alpha}\Big)(t,\boldsymbol{a}') \quad (15.2.14)$$

15.2.2 Birkhoff 方程的形式

Birkhoff 方程的一般情形为式(15.1.1)。

如果函数 $R_{\mu}(\mu=1,2,\cdots,2n)$和 B 都不显含时间 t,则 Birkhoff 方程称为自治的。在自治情形下,方程(15.1.1)有如下简单形式

$$\sum_{\nu=1}^{2n}\Omega_{\mu\nu}(\boldsymbol{a})\,\dot{a}^{\nu}-\frac{\partial B(\boldsymbol{a})}{\partial a^{\mu}}=0\qquad(\mu=1,2\cdots,2n)\tag{15.2.15}$$

其中

$$\Omega_{\mu\nu}=\frac{\partial R_{\nu}}{\partial a^{\mu}}-\frac{\partial R_{\mu}}{\partial a^{\nu}}\tag{15.2.16}$$

称为 Birkhoff 张量。

如果 $R_{\mu}(\mu=1,2,\cdots,2n)$ 不显含 t，则 Birkhoff 方程(15.1.1)称为半自治的。在半自治情形下，方程(15.1.1)有如下形成

$$\sum_{\nu=1}^{2n}\Omega_{\mu\nu}(\boldsymbol{a})\,\dot{a}^{\nu}-\frac{\partial B(t,\boldsymbol{a})}{\partial a^{\mu}}=0\qquad(\mu=1,2,\cdots,2n)\tag{15.2.17}$$

如果 $R_{\mu}(\mu=1,2,\cdots,2n)$ 和 B 都显含时间 t，则 Birkhoff 方程称为非自治的。在非自治情形，方程(15.1.1)可重新写成形式

$$\sum_{\nu=1}^{2n}\Omega_{\mu\nu}(t,\boldsymbol{a})\,\dot{a}^{\nu}-\frac{\partial B(t,\boldsymbol{a})}{\partial a^{\mu}}-\frac{\partial R_{\mu}(t,\boldsymbol{a})}{\partial t}=0\qquad(\mu=1,2\cdots,2n)\tag{15.2.18}$$

如果在所考虑的区域上，函数行列式

$$\det(\Omega_{\mu\nu})\neq 0\tag{15.2.19}$$

则 Birkhoff 方程称为规则的。在规则情形下，方程(15.2.18)可表示为等价形式

$$\dot{a}^{\mu}=\sum_{\nu=1}^{2n}\Omega^{\mu\nu}(t,\boldsymbol{a})\left[\frac{\partial B(t,\boldsymbol{a})}{\partial a^{\nu}}+\frac{\partial R_{\nu}(t,\boldsymbol{a})}{\partial t}\right]\qquad(\mu=1,2,\cdots,2n)\tag{15.2.20}$$

其中

$$\sum_{\nu=1}^{2n}\Omega^{\mu\nu}\Omega_{\nu\rho}=\delta^{\mu}_{\rho}\tag{15.2.21}$$

而 $\Omega^{\mu\nu}$ 称为 Birkhoff 逆变张量。

15.2.3 Birkhoff 方程的性质

1)Birkhoff 方程的代数性质

数学家侧重研究代数本身，物理学家侧重构造代数。

某函数 $A=A(\boldsymbol{a})$ 按半自治情形 Birkhoff 方程求时间的导数为

$$\dot{A}(\boldsymbol{a})=\sum_{\mu=1}^{2n}\sum_{\nu=1}^{2n}\frac{\partial A}{\partial a^{\mu}}\Omega^{\mu\nu}\frac{\partial B}{\partial a^{\nu}}\overset{\text{def}}{=\!=}[A,B]\tag{15.2.22}$$

它定义了广义 Poisson 括号。因为 Birkhoff 张量 $\Omega^{\mu\nu}$ 满足可积性条件

$$\Omega^{\mu\nu}+\Omega^{\nu\mu}=0$$

$$\sum_{\rho=1}^{2n}\left(\Omega^{\tau\rho}\frac{\partial\Omega^{\mu\nu}}{\partial a^{\rho}}+\Omega^{\mu\rho}\frac{\partial\Omega^{\nu\tau}}{\partial a^{\rho}}+\Omega^{\nu\rho}\frac{\partial\Omega^{\tau\mu}}{\partial a^{\rho}}\right)=0\qquad(\mu,\nu,\tau=1,2,\cdots,2n)\tag{15.2.23}$$

因此,括号$[A,B]$满足 **Lie 代数**公理

$$
\begin{aligned}
&[A,B]+[B,A]=0\\
&[[A,B],C]+[[B,C],A]+[[C,A],B]=0
\end{aligned}
\tag{15.2.24}
$$

因此说,自治情形和半自治情形的 Birkhoff 方程具有相容代数结构,并且具有 Lie 代数结构[2]。对于非自治情形的 Birkhoff 方程,这个重要性质失去了。

2)Birkhoff 方程的几何性质

Birkhoff 方程以局部坐标中最一般可能的恰当辛形式为特征[2]。实际上,2—形式的恰当特性意味着余切丛 T^*M 上的结构

$$
\begin{aligned}
\Omega_2 &= \mathrm{d}\Big[\sum_{\nu=1}^{2n} R_\nu(\boldsymbol{a})\mathrm{d}a^\nu\Big] = \sum_{\mu=1}^{2n}\sum_{\nu=1}^{2n}\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu}\mathrm{d}a^\mu\Lambda\mathrm{d}a^\nu\\
&= \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{2n}\sum_{\mu=1}^{2n}\Big(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu}\Big)\mathrm{d}a^\mu\Lambda\mathrm{d}a^\nu
\end{aligned}
\tag{15.2.25}
$$

利用半自治情形的 Birkhoff 方程,有

$$
\Omega_2 = \frac{1}{2}\sum_{\mu=1}^{2n}\sum_{\nu=1}^{2n}\Omega_{\mu\nu}(\boldsymbol{a})\mathrm{d}a^\mu\Lambda\mathrm{d}a^\nu
\tag{15.2.26}
$$

对一般情形的 Birkhoff 方程,令

$$
\begin{aligned}
&\hat{\boldsymbol{a}}\in R\times T^*M\\
&\hat{R}_\nu=\begin{cases}-B & (\nu=0)\\ R_\nu & (\nu=1,2,\cdots,2n)\end{cases}\\
&\hat{R}_1(\hat{\boldsymbol{a}}) = \sum_{\nu=0}^{2n}\hat{R}_\nu(\hat{\boldsymbol{a}})\mathrm{d}\,\hat{a}^\nu
\end{aligned}
\tag{15.2.27}
$$

1—形式$\hat{R}_1$ 的外微分表示 $R\times T^*M$ 上的 2—形式

$$
\begin{aligned}
\Omega_2 &= \mathrm{d}\Big[\sum_{\nu=1}^{2n}\hat{R}_\nu(\hat{\boldsymbol{a}})\mathrm{d}\hat{a}^\nu\Big] = \sum_{\nu=0}^{2n}\sum_{\mu=0}^{2n}\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial\hat{R}_\nu}{\partial\hat{a}^\mu}-\frac{\partial\hat{R}_\mu}{\partial\hat{a}^\nu}\Big)\mathrm{d}\hat{a}^\mu\Lambda\mathrm{d}\hat{a}^\nu\\
&\overset{\text{def}}{=\!=}\frac{1}{2}\sum_{\nu=0}^{2n}\sum_{\mu=0}^{2n}\hat{\Omega}_{\mu\nu}(\hat{\boldsymbol{a}})\mathrm{d}\hat{a}^\mu\Lambda\mathrm{d}\hat{a}^\nu
\end{aligned}
\tag{15.2.28}
$$

2—形式$\hat{\Omega}_2$ 有如下性质:

(1)$\hat{\Omega}_2$ 是 $R\times T^*M$ 上恰当 2—形式的最大可能局部组成,显然,因为$\boldsymbol{R}_1$ 有最大容许函数相关;

(2)$\hat{\Omega}_2$ 是一个接触 2—形式,因为它是协变型的,最大秩 $2n$ 且限制 T^*M 是辛的;

(3)$\hat{\Omega}_2$ 是 Birkhoff 方程的几何结构。实际上,将张量$\hat{\Omega}_{\mu\nu}$在不相交坐标$(t,\boldsymbol{a})$中写出,有

$$(\hat{\Omega}_{\mu\nu})=\left(\begin{array}{c:c} & \dfrac{\partial B}{\partial a^{\mu}}+\dfrac{\partial R_{\mu}}{\partial t} \\ \hdashline -\dfrac{\partial B}{\partial a^{\mu}}-\dfrac{\partial R_{\mu}}{\partial t} & \dfrac{\partial R_{\nu}}{\partial a^{\mu}}-\dfrac{\partial R_{\mu}}{\partial a^{\nu}} \end{array}\right)$$

而 Birkhoff 方程为

$$\sum_{\nu=1}^{2n}\hat{\Omega}_{\mu\nu}(\hat{\boldsymbol{a}})\,\dot{\hat{\boldsymbol{a}}}^{\nu}=0 \qquad (\mu=0,1,2,\cdots,2n)$$

或者

$$\sum_{\nu=0}^{2n}\hat{\Omega}_{\mu\nu}(\hat{\boldsymbol{a}})\,\dot{\hat{a}}^{\nu}=\begin{cases}\displaystyle\sum_{\nu=1}^{2n}\left(\frac{\partial B}{\partial a^{\nu}}+\frac{\partial R_{\nu}}{\partial t}\right)\dot{a}^{\nu}=0 \quad (\mu=0) & (15.2.29)\\ \displaystyle\frac{\partial B}{\partial a^{\mu}}+\frac{\partial R_{\mu}}{\partial t}-\sum_{\nu=1}^{2n}\left(\frac{\partial R_{\nu}}{\partial a^{\mu}}-\frac{\partial R_{\mu}}{\partial a^{\nu}}\right)\dot{a}^{\nu}=0 \quad (\mu=1,2,\cdots,2n) & \end{cases}$$

$$(15.2.30)$$

方程(15.2.29)恒为零,方程(15.2.30)即为 Birkhoff 方程。

3)Birkhoff 方程的自伴随性质

设一般非自治一阶方程组

$$\sum_{\nu=1}^{2n}C_{\mu\nu}(t,\boldsymbol{a})\,\dot{a}^{\nu}+D_{\mu}(t,\boldsymbol{a})=0 \qquad (\mu=1,2,\cdots,2n) \qquad (15.2.31)$$

在 $R\times T^{*}M$ 点的星形区域上是解析的,规则的,方程组(15.2.31)是该区域上自伴随的充分必要条件是它们有 Birkhoff 形式,即

$$\sum_{\nu=1}^{2n}C_{\mu\nu}(t,\boldsymbol{a})\,\dot{a}^{\nu}+D_{\mu}(t,\boldsymbol{a})=\sum_{\nu=1}^{2n}\left(\frac{\partial R_{\nu}}{\partial a^{\mu}}-\frac{\partial R_{\mu}}{\partial a^{\nu}}\right)\dot{a}^{\nu}-\left(\frac{\partial B}{\partial a^{\mu}}+\frac{\partial R_{\mu}}{\partial t}\right)=0$$

$$(\mu=1,2,\cdots,2n) \qquad (15.2.32)$$

自伴随条件表示为

$$\begin{cases}C_{\mu\nu}+C_{\nu\mu}=0\\ \dfrac{\partial C_{\mu\nu}}{\partial a^{\tau}}+\dfrac{\partial C_{\nu\tau}}{\partial a^{\mu}}+\dfrac{\partial C_{\tau\mu}}{\partial a^{\nu}}=0\\ \dfrac{\partial C_{\mu\nu}}{\partial t}=\dfrac{\partial D_{\mu}}{\partial a^{\nu}}-\dfrac{\partial D_{\nu}}{\partial a^{\mu}}\end{cases} \qquad (\mu,\nu,\tau=1,2,\cdots,2n) \qquad (15.2.33)$$

可用 Poincaré 引理来证明[2]。

15.2.4 广义 Birkhoff 方程

由广义 Pfaff-Birkhoff 原理(15.1.8)容易导出广义 Birkhoff 方程

$$\sum_{\nu=1}^{2n}\left(\frac{\partial R_{\nu}}{\partial a^{\mu}}-\frac{\partial R_{\mu}}{\partial a^{\nu}}\right)\dot{a}^{\nu}-\left(\frac{\partial B}{\partial a^{\mu}}+\frac{\partial R_{\mu}}{\partial t}\right)=-\Lambda_{\mu} \qquad (\mu=1,2,\cdots,2n)$$

$$(15.2.34)$$

方程(15.2.33)也可由 Pfaff-Birkhoff 原理的广义准对称变换来得到[6]。

§ 15.3 Birkhoff 函数的构造

本节讨论 Birkhoff 方程的 4 种构造方法以及构造的困难。

15.3.1 Santilli 第一方法

取 Birkhoff 函数 B 为系统的总能量，并对 Birkhoff 函数组 R_μ 解 Cauchy-Ковалевская 方程。

设系统方程组表示为标准字阶形式

$$\dot{a}^\mu-\sigma^\mu(t,\boldsymbol{a})=0 \qquad (\mu=1,2,\cdots,2n) \tag{15.3.1}$$

欲使方程(15.3.1)有 Birkhoff 形式(15.1.1)，即

$$\dot{a}^\mu-\sigma^\mu=\sum_{\nu=1}^{2n}\left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu}\right)\dot{a}^\nu-\left(\frac{\partial B}{\partial a^\mu}+\frac{\partial R_\mu}{\partial t}\right)=0$$
$$(\mu=1,2,\cdots,2n) \tag{15.3.2}$$

由此得

$$\sum_{\nu=1}^{2n}\left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu}\right)\sigma^\nu=\frac{\partial B}{\partial a^\mu}+\frac{\partial R_\mu}{\partial t} \qquad (\mu=1,2,\cdots,2n) \tag{15.3.3}$$

对任何给定的函数 B，方程(15.3.3)是 Cauchy-Ковалевска 型的。根据 **Cauchy-Ковалевская 定理**，方程(15.3.3)的解总是存在的。将方程(15.3.3)表示为形式

$$\frac{\partial R_\mu}{\partial t}=\sum_{\nu=1}^{2n}\left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu}\right)\sigma^\nu-\frac{\partial B}{\partial a^\mu} \qquad (\mu=1,2,\cdots,2n) \tag{15.3.4}$$

如果已知系统的总能量，即动能和势能之和，并将其取为 Birkhoff 函数 B，那么通过解方程(15.3.4)，便可确定 Birkhoff 函数组 $R_\mu(\mu=1,2,\cdots,2n)$。

Santilli 第一方法对所有变量和函数都有直接的物理意义，利用它的主要困难在于求解 Cauchy-Ковалевская 方程(15.3.4)。

15.3.2 Santilli 第二方法

如果能构造出自伴随协变一般形式

$$\left[\sum_{\nu=1}^{2n}\Omega_{\mu\nu}(t,\boldsymbol{a})\,\dot{a}^\nu+\Gamma_\mu(t,\boldsymbol{a})\right]_{SA}=0 \qquad (\mu=1,2,\cdots,2n) \tag{15.3.5}$$

其中 SA 表示自伴随，那么 Birkhoff 函数组 R_μ 由下式确定

$$R_\mu(t,\boldsymbol{a})=\sum_{\nu=1}^{2n}\int_0^1\tau\,\Omega_{\nu\mu}(t,\boldsymbol{a})a^\nu\mathrm{d}\tau \tag{15.3.6}$$

而 Birkhoff 函数 B 为

$$B(t,\boldsymbol{a})=-\sum_{\mu=1}^{2n}\int_0^1\left(\Gamma_\mu+\frac{\partial R_\mu}{\partial t}\right)(t,\tau\boldsymbol{a})a^\mu\mathrm{d}\tau \tag{15.3.7}$$

利用 Santilli 第二方法的主要困难是如何将系统的方程组表示为**自伴随形式**。一旦表示为自伴随形式，便可按式(15.3.6)和式(15.3.7)构造出 Birkhoff 函数组 R_μ 和 Birkhoff 函数 B。

如果已知系统的全部独立的第一积分，便可构造出自伴随方程组。考虑逆变一阶范式

$$\dot{a}^\mu = \sigma^\mu(t, \boldsymbol{a}) \qquad (\mu = 1, 2, \cdots, 2n) \tag{15.3.8}$$

它们在变量的规则点邻域内是解析的。假设已知 $2n$ 个独立的第一积分 $I^\mu\ (t, \boldsymbol{a})(\mu = 1, 2, \cdots, 2n)$，则

$$\dot{I}^\mu(t, \boldsymbol{a}) = \frac{\partial I^\mu}{\partial t} + \sum_{\nu=1}^{2n} \frac{\partial I^\mu}{\partial a^\nu}\sigma^\nu = 0, \qquad \det\left(\frac{\partial I^\mu}{\partial a^\nu}\right) \neq 0 \tag{15.3.9}$$

考虑 $2n$ 个函数 $G_\mu(I(\boldsymbol{a}))$，使得

$$\det\left(\frac{\partial G_\mu}{\partial I^\nu} - \frac{\partial G_\nu}{\partial I^\mu}\right) \neq 0 \tag{15.3.10}$$

那么协变一般形式

$$\sum_{\nu=1}^{2n} C_{\mu\nu}(t, \boldsymbol{a})\, \dot{a}^\nu + D_\mu(t, \boldsymbol{a}) = 0 \qquad (\mu = 1, 2, \cdots, 2n) \tag{15.3.11}$$

便是自伴随的，其中

$$\begin{aligned} C_{\mu\nu} &= \sum_{\alpha=1}^{2n} \sum_{\beta=1}^{2n} \left(\frac{\partial G_\alpha}{\partial I^\beta} - \frac{\partial G_\beta}{\partial I^\alpha}\right) \frac{\partial I^\alpha}{\partial a^\mu} \frac{\partial I^\beta}{\partial a^\nu} \\ D_\mu &= -\sum_{\nu=1}^{2n} C_{\mu\nu}\sigma^\nu \end{aligned} \tag{15.3.12}$$

15.3.3 Hojman 方法

假设已知 $2n$ 个独立的第一积分 $I^\mu(t, \boldsymbol{a})$，那么 Birkhoff 函数组 R_μ 由下式确定

$$R_\mu(t, \boldsymbol{a}) = \sum_{\alpha=1}^{2n} G_\alpha \frac{\partial I^\alpha}{\partial a^\mu} \tag{15.3.13}$$

而 Birkhoff 函数 B 为

$$B(t, \boldsymbol{a}) = -\sum_{\alpha=1}^{2n} G_\alpha \frac{\partial I^\alpha}{\partial t} \tag{15.3.14}$$

其中 G_α 应满足式(15.3.10)。

Hojman 方法的关键是要知道系统方程的全部独立的第一积分。

15.3.4 自治系统 Birkhoff 函数的构造

研究一般的自治系统

$$\dot{a}^\nu = \sigma^\nu(\boldsymbol{a}) \qquad (\nu = 1, 2, \cdots, 2n) \tag{15.3.15}$$

其中函数 σ^ν 对变量 $a^\mu(\mu = 1, 2, \cdots, 2n)$ 连续可微。

现将方程组(15.3.15)表示为自治情形的 Birkhoff 方程。首先，研究

Birkhoff函数 B 的构造问题。将式(15.3.15)代入方程(15.2.15),得到

$$\sum_{\nu=1}^{2n}\left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu}\right)\sigma^\nu-\frac{\partial B}{\partial a^\mu}=0\qquad(\mu=1,2,\cdots,2n)\tag{15.3.16}$$

将式(15.3.16)两端乘以 σ^μ 并对 μ 求和,注意到 $\Omega_{\mu\nu}$ 的反对称性,得到

$$\sum_{\mu=1}^{2n}\frac{\partial B}{\partial a^\mu}\sigma^\mu=0\tag{15.3.17}$$

这就是 Birkhoff 函数 B 所应满足的一阶齐次偏微分方程,其特征方程为

$$\frac{\mathrm{d}a^1}{\sigma^1}=\frac{\mathrm{d}a^2}{\sigma^2}=\cdots=\frac{\mathrm{d}a^{2n}}{\sigma^{2n}}\tag{15.3.18}$$

假设可找到方程(15.3.18)的$(2n-1)$个独立的第一积分

$$f^1(\boldsymbol{a})=C^1,\cdots,f^{(2n-1)}(\boldsymbol{a})=C^{2n-1}\tag{15.3.19}$$

则方程(15.3.18)的解可表示为

$$B=\Psi(f^1(\boldsymbol{a}),f^2(\boldsymbol{a}),\cdots,f^{2n-1}(\boldsymbol{a}))\tag{15.3.20}$$

其中主 Ψ 为某函数。这样,便可通过寻求特征方程(15.3.18)的第一积分来构造函数 B。在具体应用时,不必求出形如(15.3.20)的解。实际上,只要找到特征方程(15.3.18)的某一积分 $f(\boldsymbol{a})=\text{const}$,取其为函数 B 即可。这样有

$$B=f(\boldsymbol{a})\tag{15.3.21}$$

其次,研究 Birkhoff 函数组 $R_\mu(\mu=1,2,\cdots,2n)$ 的构造问题。将已找到的 Birkhoff 函数 B 代入方程(15.3.6),得到

$$\sum_{\nu=1}^{2n}\left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu}\right)\sigma^\nu=\frac{\partial B}{\partial a^\mu}\qquad(\mu=1,2,\cdots,2n)\tag{15.3.22}$$

其右端为 $\boldsymbol{a}$ 的已知函数。根据 Cauchy-Ковалевская 定理,可知方程(15.3.22)的解总是存在的。问题是如何由方程(15.3.22)简单地构造出函数 R_μ。在具体应用时,可取一部分 R_μ 为零。当 $n=1$ 时,方程(15.3.22)给出

$$\left(\frac{\partial R_2}{\partial a^1}-\frac{\partial R_1}{\partial a^2}\right)\sigma^2=\frac{\partial B}{\partial a^1},\left(\frac{\partial R_1}{\partial a^2}-\frac{\partial R_2}{\partial a^1}\right)\sigma^1=\frac{\partial B}{\partial a^2}\tag{15.3.23}$$

令

$$R_1=0\tag{15.3.24}$$

则由方程(15.3.23)得到

$$R_2=\int\frac{1}{\sigma^2}\frac{\partial B}{\partial a^1}\mathrm{d}a^1=-\int\frac{1}{\sigma^1}\frac{\partial B}{\partial a^2}\mathrm{d}a^2\tag{15.3.25}$$

当 $n=2$ 时,方程(15.3.22)给出

$$
\begin{aligned}
&\Omega_{12}\sigma^2+\Omega_{13}\sigma^3+\Omega_{14}\sigma^4=\frac{\partial B}{\partial a^1}\\
&\Omega_{21}\sigma^1+\Omega_{23}\sigma^3+\Omega_{24}\sigma^4=\frac{\partial B}{\partial a^2}\\
&\Omega_{31}\sigma^1+\Omega_{32}\sigma^2+\Omega_{34}\sigma^4=\frac{\partial B}{\partial a^3}\\
&\Omega_{41}\sigma^1+\Omega_{42}\sigma^2+\Omega_{43}\sigma^3=\frac{\partial B}{\partial a^4}
\end{aligned}
\tag{15.3.26}
$$

令

$$R_1=R_2=0 \tag{15.3.27}$$

则方程(15.3.26)成为

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial R_3}{\partial a^1}\sigma^3+\frac{\partial R_4}{\partial a^1}\sigma^4=\frac{\partial B}{\partial a^1}\\
&\frac{\partial R_3}{\partial a^2}\sigma^3+\frac{\partial R_4}{\partial a^2}\sigma^4=\frac{\partial B}{\partial a^2}\\
&-\frac{\partial R_3}{\partial a^1}\sigma^1-\frac{\partial R_3}{\partial a^2}\sigma^2+\left(\frac{\partial R_4}{\partial a^3}-\frac{\partial R_3}{\partial a^4}\right)\sigma^4=\frac{\partial B}{\partial a^3}\\
&-\frac{\partial R_4}{\partial a^1}\sigma^1-\frac{\partial R_4}{\partial a^2}\sigma^2+\left(\frac{\partial R_3}{\partial a^4}-\frac{\partial R_4}{\partial a^3}\right)\sigma^3=\frac{\partial B}{\partial a^4}
\end{aligned}
\tag{15.3.28}
$$

这组方程比方程组(15.3.26)容易求解。对于 n 较大时,亦可取 n 个 R_μ 为零。

15.3.5 构造 Birkhoff 表示的困难

从理论上讲,一般的力学系统可以由 Birkhoff 表示。但在实际构造 Birkhoff表示时却有不少技术上的困难,不用说高阶系统,甚至对简单系统都有困难。例如,**Van der Pol 方程**

$$\ddot{x}+x-\varepsilon(1-x^2)\dot{x}=0$$

的 Birkhoff 表示就非常困难[2,3]。为克服困难,因 ε 为小参数,可以给出 Birkhoff近似表示。

另一个问题是所谓严格规则条件问题。Birkhoff 方程的规则条件为

$$\det(\Omega_{\mu\nu})\neq 0$$

严格规则条件是指

$$\det\left(\frac{\partial N_s}{\partial y_k}\right)\neq 0$$

其中

$$N_s=\sum_{\nu=1}^{2n}\Omega^{s\nu}\left(\frac{\partial B}{\partial a^\nu}+\frac{\partial R_\nu}{\partial t}\right)$$

$$y_k=a^{n+k}$$

为用 Birkhoff 方程表示力学系统,严格规则条件是必需的。例如,4 阶 Birkhoff 系统为

$$B=\frac{1}{2}\{(a^1)^2+(a^2)^2+(a^3)^2+(a^4)^2\}$$

$$R_1=\frac{1}{2}(a^3)^2,R_2=\frac{1}{2}(a^4)^2,R_3=R_4=0$$

它可表示为

$$\dot{a}^1-1=0,\dot{a}^2-1=0,\dot{a}^3+\frac{a^1}{a^3}=0,\dot{a}^4+\frac{a^2}{a^4}=0$$

这 4 个变量的 4 个一阶方程没有等价的关于变量 a^1,a^2 的二阶方程，因为严格规则条件不满足。

例 1 研究线性阻尼振子

$$\ddot{x}+\gamma\dot{x}+x=0 \qquad (\gamma=\text{const.}) \tag{15.3.29}$$

的 Birkhoff 表示。

解：首先，用 Santilli 第一方法。令

$$a^1=x, \quad a^2=\dot{x}$$

则方程(15.3.29)表示为

$$\dot{a}^1=a^2,\dot{a}^2=-\gamma a^2-a^1$$

取系统能量为 Birkhoff 函数 B

$$B=\frac{1}{2}(a^1)^2+\frac{1}{2}(a^2)^2$$

方程(15.3.4)给出

$$\frac{\partial R_1}{\partial t}=\left(\frac{\partial R_2}{\partial a^1}-\frac{\partial R_1}{\partial a^2}\right)(-a^1-\gamma a^2)-a^1$$

$$\frac{\partial R_2}{\partial t}=\left(\frac{\partial R_1}{\partial a^2}-\frac{\partial R_2}{\partial a^1}\right)a^2-a^2$$

假设 R_2 不依赖于 a^1，则第一个方程的特征方程为

$$\frac{\mathrm{d}a^1}{0}=\frac{\mathrm{d}a^2}{-a^1-\gamma a^2}=\frac{\mathrm{d}t}{1}=\frac{\mathrm{d}R_1}{-a^1}$$

它有如下积分

$$a^1=C_1,(a^2\gamma+a^1)\exp(\gamma t)=C_2,R_1+a^1t=C_3$$

于是解为

$$\Phi(a^1,(a^2\gamma+a^1)\exp(\gamma t),R_1+a^1t)=0$$

其中 Φ 为任意函数。可简单地取为

$$\Phi=R_1+a^1t-\frac{1}{\gamma}(a^2\gamma+a^1)\exp(\gamma t)=0$$

由此得

$$R_1=\frac{1}{\gamma}(a^2\gamma+a^1)\exp(\gamma t)-a^1t$$

将其代入第二个方程，得

$$\frac{\partial R_2}{\partial t}=a^2\exp(\gamma t)-a^2$$

于是有

$$R_2=\frac{1}{\gamma}a^2\exp(\gamma t)-a^2 t$$

由所得 B,R_1,R_2 可列写 Birkhoff 方程

$$-\dot{a}^2\exp(\gamma t)-(a^2\gamma+a^1)\exp(\gamma t)=0$$

$$\dot{a}^1\exp(\gamma t)-a^2\exp(\gamma t)=0$$

其次，用 Santilli 第二方法。这个方法要求方程是自伴随的，但方程(15. 3. 29)不是自伴随的。为此，将方程表示为

$$(\ddot{x}+\gamma\dot{x}+x)\exp(\gamma t)=0$$

令

$$a^1=x,a^2=\dot{x}$$

则有

$$-\dot{a}^2\exp(\gamma t)-(\gamma a^2+a^1)\exp(\gamma t)=0$$

$$\dot{a}^1\exp(\gamma t)-a^2\exp(\gamma t)=0$$

将其表示为形式(15. 2. 31)，有

$$C_{11}=C_{22}=0,C_{12}=-C_{21}=-\exp(\gamma t)$$

$$D_1=-(\gamma a^2+a^1)\exp(\gamma t),D_2=-a^2\exp(\gamma t)$$

它满足自伴随条件。对照式(15. 3. 5)，有

$$\Omega_{11}=\Omega_{22}=0,\Omega_{12}=-\Omega_{21}=-\exp(\gamma t)$$

$$\Gamma_1=-(\gamma a^2+a^1)\exp(\gamma t),\Gamma_2=-a^2\exp(\gamma t)$$

将其代入式(15. 3. 6)，(15. 3. 7)，得到

$$R_1=\int_0^1 a^2\tau\exp(\gamma t)\mathrm{d}\tau=\frac{1}{2}a^2\exp(\gamma t)$$

$$R_2=\int_0^1 -a^1\tau\exp(\gamma t)\mathrm{d}\tau=-\frac{1}{2}a^1\exp(\gamma t)$$

$$\begin{aligned}B=&-\int_0^1\{[-(a^2\tau\gamma+a^1\tau)\exp(\gamma t)+\frac{1}{2}\gamma a^2\tau\exp(\gamma t)]a^1+\\&[-a^2\tau\exp(\gamma t)-\frac{1}{2}\gamma a^1\tau\exp(\gamma t)]a^2\}\mathrm{d}\tau\\=&\frac{1}{2}[(a^1)^2+(a^2)^2+\gamma a^1a^2]\exp(\gamma t)\end{aligned}$$

例 2 研究 Hojman-Urrutia 例

$$\ddot{x}+\dot{y}=0,\ddot{y}+y=0 \tag{15.3.30}$$

的 Birkhoff 表示。

解:令

$$a^1=x, a^2=y, a^3=\dot{x}, a^4=\dot{y}$$

则方程(15.3.30)表示为一阶形式

$$\dot{a}^\nu=\sigma^\nu \qquad (\nu=1,2,3,4)$$

其中

$$\sigma^1=a^3, \sigma^2=a^4, \sigma^3=-a^4, \sigma^4=-a^2$$

现用 Hojman 方法来构造系统的 Birkhoff 函数 B 和 Birkhoff 函数组 $R_\mu(\mu=1,2,3,4)$。容易求得方程的 4 个独立的积分

$$I^1=a^2\cos t-a^4\sin t \qquad I^2=a^2\sin t+a^4\cos t$$

$$I^3=a^2+a^3 \qquad I^4=a^1-a^4-(a^2+a^3)t$$

利用式(15.3.13)和(15.3.14),得到

$R_1=G_4$, $R_2=G_1\cos t+G_2\sin t+G_3-G_4 t$

$R_3=G_3-G_4 t$, $R_4=-G_1\sin t+G_2\cos t-G_4$

$B=-G_1(-a^2\sin t-a^4\cos t)-G_2(a^2\cos t-a^4\sin t)+G_4(a^2+a^3)$

取

$$G_1=-I^2, G_2=I^1, G_3=-I^4, G_4=I^3$$

则有

$$R_1=a^2+a^3, R_2=-a^1, R_3=-a^1+a^4, R_4=-a^3$$

$$B=(a^3)^2+2a^2a^3-(a^4)^2$$

§15.4 Birkhoff 方程的积分

本节讨论 Birkhoff 方程的积分方法,包括经典积分及降阶法、Poisson 方法、变换理论、积分不变量等。

15.4.1 经典积分及降阶法

1)类能量积分

将 Birkhoff 方程(15.1.1)两端乘以$\dot{a}^\mu$,并对 μ 求和,得到

$$\sum_{\mu=1}^{2n}\sum_{\nu=1}^{2n}\left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu}\right)\dot{a}^\nu\dot{a}^\mu-\sum_{\mu=1}^{2n}\frac{\partial B}{\partial a^\mu}\dot{a}^\mu-\sum_{\mu=1}^{2n}\frac{\partial R_\mu}{\partial t}\dot{a}^\mu=0$$

考虑到

$$\Omega_{\mu\nu}=\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu}=-\Omega_{\nu\mu}$$

则有

$$\sum_{\mu=1}^{2n} \frac{\partial B}{\partial a^\mu} \dot{a}^\mu + \sum_{\mu=1}^{2n} \frac{\partial R^\mu}{\partial t} \dot{a}^\mu = 0$$

于是

$$\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial B}{\partial t} - \sum_{\mu=1}^{2n} \frac{\partial R_\mu}{\partial t} \dot{a}^\mu \tag{15.4.1}$$

因 Birkhoff 函数 B 通常代表能量，故方程(15.4.1)可称为类功率方程。于是有如下结果：

命题 1 对方程(15.1.1)，如果满足

$$\frac{\partial B}{\partial t} - \sum_{\mu=1}^{2n} \frac{\partial R_\mu}{\partial t} \dot{a}^\mu = 0 \tag{15.4.2}$$

则 Birkhoff 函数 B 是系统的积分。特别地，对自治的 Birkhoff 方程，Birkhoff 函数 B 是系统的积分，称为**类能量积分**。

2)类循环积分

命题 2 对方程(15.1.1)，如果对某个变量 a^1，有

$$\frac{\partial B}{\partial a^1} = \frac{\partial R_\mu}{\partial a^1} = 0 \tag{15.4.3}$$

则 Birdhoff 方程有**类循环积分**

$$R_1 = \text{const.} \tag{15.4.4}$$

3)利用类能量积分的降阶法

假设类能量积分表示为

$$B(a^1, a^2, \cdots, a^{2n}) = h \tag{15.4.5}$$

设由此可解出某个 a^μ，记作

$$a^\mu = K(a^1, a^2, \cdots, a^{\mu-1}, a^{\mu+1}, \cdots, a^{2n}) \tag{15.4.6}$$

将式(15.4.6)代入式(15.4.5)，得到恒等式

$$B(a^1, a^2, \cdots, a^{\mu-1}, K, a^{\mu+1}, \cdots, a^{2n}) \equiv h$$

将其对 a^ν 求偏导数，得

$$\frac{\partial B}{\partial a^\nu} + \frac{\partial B}{\partial a^\mu}\frac{\partial K}{\partial a^\nu} = 0$$

由此解得

$$\frac{\partial B}{\partial a^\mu} = -\frac{\dfrac{\partial B}{\partial a^\nu}}{\dfrac{\partial K}{\partial a^\nu}} \tag{15.4.7}$$

将方程(15.2.15)的第 μ 个方程写成形式

$$\sum_{\nu=2}^{2n} \left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu} - \frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu}\right) a^{\nu\,\prime} - \left(\frac{\partial R_1}{\partial a^\mu} - \frac{\partial R_\mu}{\partial a^1}\right) - \frac{\partial B}{\partial a^\mu} \frac{1}{\dot{a}^1} = 0 \tag{15.4.8}$$

其中

$$a^{\nu\prime}=\frac{\dot{a}^{\nu}}{\dot{a}^{1}}\qquad(\nu=2,3,\cdots,2n)\tag{15.4.9}$$

将式(15.4.7)代入式(15.4.8),并解出$\dot{a}^1$,代入其余$(2n-2)$个方程,得到

$$\sum_{\nu=2}^{2n}\left\{\frac{\partial R_\nu}{\partial a^i}-\frac{\partial R_i}{\partial a^\nu}+\frac{aK}{\partial a^i}\left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu}\right)\right\}a^{\nu\prime}+\left(\frac{\partial R_\mu}{\partial a^i}-\frac{\partial R_i}{\partial a^\mu}\right)a^{\mu\prime}+$$
$$\frac{\partial K}{\partial a^i}\left(\frac{\partial R_1}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu}{\partial a^1}\right)+\left(\frac{\partial R_1}{\partial a^i}-\frac{\partial R_i}{\partial a^1}\right)=0\qquad(i\neq 1,\mu;\nu\neq\mu)$$
$$\tag{15.4.10}$$

考虑到

$$a^{\mu\prime}=\sum_{\nu=2}^{2n}\frac{\partial K}{\partial a^\nu}a^{\nu\prime}+\frac{\partial K}{\partial a^1}\qquad(\nu\neq\mu)\tag{15.4.11}$$

并令

$$\widetilde{R}_\nu(a^1,a^2,\cdots,a^{\mu-1},a^{\mu+1},\cdots,a^{2n})=R_\nu(a^1,a^2,\cdots,a^{\mu-1},K,a^{\mu+1},\cdots,a^{2n})\tag{15.4.12}$$

则方程(15.4.10)可表示为形式

$$\sum_{\nu=2}^{2n}\left\{\left(\frac{\partial\widetilde{R}_\nu}{\partial a^i}+\frac{\partial\widetilde{R}_\mu}{\partial a^i}\frac{\partial K}{\partial a^\nu}\right)-\left(\frac{\partial\widetilde{R}_i}{\partial a^\nu}+\frac{\partial\widetilde{R}_\mu}{\partial a^\nu}\frac{\partial K}{\partial a^i}\right)\right\}a^{\nu\prime}+$$
$$\left(\frac{\partial\widetilde{R}_1}{\partial a^i}+\frac{\partial\widetilde{R}_\mu}{\partial a^i}\frac{\partial K}{\partial a^1}\right)-\left(\frac{\partial\widetilde{R}_i}{\partial a^1}+\frac{\partial\widetilde{R}_\mu}{\partial a^1}\frac{\partial K}{\partial a^i}\right)=0\qquad(\nu\neq\mu)\tag{15.4.13}$$

给出如下定义

$$\frac{\partial R_\nu^*}{\partial a^i}\overset{\text{def}}{=\!=}\frac{\partial\widetilde{R}_\nu}{\partial a^i}+\frac{\partial\widetilde{R}_\mu}{\partial a^i}\frac{\partial K}{\partial a^\nu}\qquad(\nu=2,3,\cdots,2n;i=1,2,\cdots,2n;\nu\neq\mu)$$
$$\frac{\partial R_1^*}{\partial a^i}\overset{\text{def}}{=\!=}-\left(\frac{\partial\widetilde{R}_1}{\partial a^i}+\frac{\partial\widetilde{R}_\mu}{\partial a^i}\frac{\partial K}{\partial a^1}\right)\quad(i=2,3,\cdots,2n;i\neq\mu)$$
$$\frac{\partial R_i^*}{\partial a^1}\overset{\text{def}}{=\!=}\frac{\partial\widetilde{R}_i}{\partial a^1}+\frac{\partial\widetilde{R}_\mu}{\partial a^1}\frac{\partial K}{\partial a^i}\qquad(i=2,3,\cdots,2n;i\neq\mu)$$
$$\tag{15.4.14}$$

则方程(15.4.13)简记作

$$\sum_{\nu=2}^{2n}\left(\frac{\partial R_\nu^*}{\partial a^i}-\frac{\partial R_i^*}{\partial a^\nu}\right)a^{\nu\prime}-\left(\frac{\partial R_1^*}{\partial a^i}-\frac{\partial R_i^*}{\partial a^1}\right)=0$$
$$(i=2,3,\cdots,2n;i\neq\mu)\tag{15.4.15}$$

于是有

命题 3 利用一个类能量积分,就可将 Birkhoff 方程降两阶。

4)利用类循环积分的降阶法

设系统有一个类循环积分

$$R_1(a^2, a^3, \cdots, a^{2n}, t) = h \tag{15.4.16}$$

设由此可解出

$$a^2 = M(a^3, a^4, \cdots, a^{2n}, t) \tag{15.4.17}$$

将其代入式(15.4.16)，得到恒等式

$$R_1(M(a^2, a^3, \cdots, a^{2n}, t), a^3, a^4, \cdots, a^{2n}, t) \equiv h$$

将其对 a^ν 求偏导数，得

$$\frac{\partial R_1}{\partial a^\nu} + \frac{\partial R_1}{\partial a^2}\frac{\partial M}{\partial a^\nu} = 0 \qquad (\nu = 3, 4, \cdots, 2n)$$

由此解得

$$\frac{\partial M}{\partial a^\nu} = -\frac{\dfrac{\partial R_1}{\partial a^\nu}}{\dfrac{\partial R_1}{\partial a^2}} \tag{15.4.18}$$

写出第2个方程

$$\frac{\partial R_1}{\partial a^2}\dot{a}^1 + \sum_{\nu=2}^{2n}\left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^2} - \frac{\partial R_2}{\partial a^\nu}\right)\dot{a}^\nu - \frac{\partial B}{\partial a^2} - \frac{\partial R_2}{\partial t} = 0 \tag{15.4.19}$$

由此解出$\dot{a}^1$

$$\dot{a}^1 = \left\{\frac{\partial B}{\partial a^2} + \frac{\partial R_2}{\partial t} - \sum_{\nu=2}^{2n}\left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^2} - \frac{\partial R_2}{\partial a^\nu}\right)\dot{a}^\nu\right\}\Big/\frac{\partial R_1}{\partial a^2} \tag{15.4.20}$$

后面$(2n-2)$个方程有形式

$$\sum_{\nu=1}^{2n}\left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^i} - \frac{\partial R_i}{\partial a^\nu}\right)\dot{a}^\nu - \frac{\partial B}{\partial a^i} - \frac{\partial R_i}{\partial t} = 0 \qquad (i = 3, 4, \cdots, 2n) \tag{15.4.21}$$

将式(15.4.20)代入式(15.4.21)并利用式(15.4.18)，得

$$-\frac{\partial M}{\partial a^i}\left\{\frac{\partial B}{\partial a^2} + \frac{\partial R_2}{\partial t} - \sum_{\nu=2}^{2n}\left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^2} - \frac{\partial R_2}{\partial a^\nu}\right)\dot{a}^\nu\right\} + \sum_{\nu=2}^{2n}\left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^i} - \frac{\partial R_i}{\partial a^\nu}\right)\dot{a}^\nu - \frac{\partial B}{\partial a^i} - \frac{\partial R_i}{\partial t} = 0 \qquad (i = 3, 4, \cdots, 2n) \tag{15.4.22}$$

由式(15.4.17)得

$$\dot{a}^2 = \sum_{i=3}^{2n}\frac{\partial M}{\partial a^i}\dot{a}^i + \frac{\partial M}{\partial t} \tag{15.4.23}$$

将式(15.4.23)代入式(15.4.22)，消去$\dot{a}^2$，整理得

$$\sum_{\nu=3}^{2n}\left\{\left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^i} + \frac{\partial R_\nu}{\partial a^2}\frac{\partial M}{\partial a^i}\right) - \left(\frac{\partial R_i}{\partial a^\nu} + \frac{\partial R_i}{\partial a^2}\frac{\partial M}{\partial a^\nu}\right) + \left(\frac{\partial R_2}{\partial a^i} + \frac{\partial R_2}{\partial a^2}\frac{\partial M}{\partial a^i}\right)\frac{\partial M}{\partial a^\nu} - \left(\frac{\partial R_2}{\partial a^\nu} + \frac{\partial R_2}{\partial a^2}\frac{\partial M}{\partial a^\nu}\right)\frac{\partial M}{\partial a^i}\right\}\dot{a}^\nu - \left(\frac{\partial B}{\partial a^i} + \frac{\partial B}{\partial a^2}\frac{\partial M}{\partial a^i}\right) - \left(\frac{\partial R_i}{\partial t} + \frac{\partial R_i}{\partial a^2}\frac{\partial M}{\partial t}\right) +$$

$$\left(\frac{\partial R_2}{\partial a^i}+\frac{\partial R_2}{\partial a^2}\frac{\partial M}{\partial a^i}\right)\frac{\partial M}{\partial t}-\left(\frac{\partial R_2}{\partial t}+\frac{\partial R_2}{\partial a^2}\frac{\partial M}{\partial t}\right)\frac{\partial M}{\partial a^i}=0 \qquad (i=3,4,\cdots,2n) \tag{15.4.24}$$

令

$$\begin{aligned}R'_\nu(a^3,a^4,\cdots,a^{2n},t)&=R_\nu(M(a^3,a^4,\cdots,a^{2n},t),a^3,a^4,\cdots,a^{2n},t)\\ B'(a^3,a^4,\cdots,a^{2n},t)&=B(M(a^3,a^4,\cdots,a^{2n},t),a^3,a^4,\cdots,a^{2n},t)\end{aligned} \tag{15.4.25}$$

则有

$$\begin{aligned}\frac{\partial R'_\nu}{\partial a^i}&=\frac{\partial R_\nu}{\partial a^i}+\frac{\partial R_\nu}{\partial a^2}\frac{\partial M}{\partial a^i}\\ \frac{\partial B'}{\partial a^i}&=\frac{\partial B}{\partial a^i}+\frac{\partial B}{\partial a^2}\frac{\partial M}{\partial a^i}\end{aligned} \tag{15.4.26}$$

将其代入式(15.4.24),得

$$\begin{aligned}&\sum_{\nu=3}^{2n}\left(\frac{\partial R'_\nu}{\partial a^i}-\frac{\partial R'_i}{\partial a^\nu}+\frac{\partial R'_2}{\partial a^i}\frac{\partial M}{\partial a^\nu}-\frac{\partial R'_2}{\partial a^\nu}\frac{\partial M}{\partial a^i}\right)\dot{a}^\nu-\\ &\left(\frac{\partial B'}{\partial a^i}-\frac{\partial R'_2}{\partial a^i}\frac{\partial M}{\partial t}\right)-\left(\frac{\partial R'_i}{\partial t}+\frac{\partial R'_2}{\partial t}\frac{\partial M}{\partial a^i}\right)=0\end{aligned} \tag{15.4.27}$$

做如下定义

$$\begin{aligned}\frac{\partial R^*_\nu}{\partial a^i}&\overset{\text{def}}{=\!=}\frac{\partial R'_\nu}{\partial a^i}+\frac{\partial R'_2}{\partial a^i}\frac{\partial M}{\partial a^\nu}\\ \frac{\partial B^*}{\partial a^i}&\overset{\text{def}}{=\!=}\frac{\partial B'}{\partial a^i}-\frac{\partial R'_2}{\partial a^i}\frac{\partial M}{\partial t}\\ \frac{\partial R^*_i}{\partial t}&\overset{\text{def}}{=\!=}\frac{\partial R'_i}{\partial t}+\frac{\partial R'_2}{\partial t}\frac{\partial M}{\partial a^i}\end{aligned} \tag{15.4.28}$$

则方程(15.4.27)简记作[7]

$$\sum_{\nu=3}^{2n}\left(\frac{\partial R^*_\nu}{\partial a^i}-\frac{\partial R^*_i}{\partial a^\nu}\right)\dot{a}^\nu-\frac{\partial B^*}{\partial a^i}-\frac{\partial R^*_i}{\partial t}=0 \qquad (i=3,4,\cdots,2n) \tag{15.4.29}$$

它保持 Birkhoff 方程的形式,并降了两阶。于是有

命题 4 利用一个类循环积分就可将 Birkhoff 方程降两阶。

方程(15.4.29)与式(15.4.17)联合,便可求解。

例 1 4 阶 Birkhoff 系统为

$$R_1=a^2+a^3,R_2=0,R_3=a^4,R_4=0,B=\frac{1}{2}\{(a^2)^2+(a^3)^2+(a^4)^2\}$$

试用类循环积分将方程降阶。

解:因 R_ν 和 B 都不含 a^1,故 R_1 是类循环积分

$$R_1=a^2+a^3=h$$

解出 a^2，有

$$a^2=h-a^3\equiv M$$

利用式(15.4.25)，得

$$R'_2=0, R'_3=a^4, R'_4=0$$

$$B'=\frac{1}{2}\{(h-a^3)^2+(a^3)^2+(a^4)^2\}$$

按式(15.4.28)，有

$$\frac{\partial R_3^*}{\partial a^4}=\frac{\partial R'_3}{\partial a^4}+\frac{\partial R'_2}{\partial a^4}\frac{\partial M}{\partial a^3}=1$$

$$\frac{\partial R_4^*}{\partial a^3}=\frac{\partial R'_4}{\partial a^3}+\frac{\partial R'_2}{\partial a^3}\frac{\partial M}{\partial a^4}=0$$

$$\frac{\partial B^*}{\partial a^3}=\frac{\partial B'}{\partial a^3}-\frac{\partial R'_2}{\partial a^3}\frac{\partial M}{\partial t}=a^3-(h-a^3)$$

$$\frac{\partial B^*}{\partial a^4}=\frac{\partial B'}{\partial a^4}-\frac{\partial R'_2}{\partial a^4}\frac{\partial M}{\partial t}=a^4$$

方程(15.4.29)给出

$$-\dot{a}^4-[a^3-(h-a^3)]=0$$

$$\dot{a}^3-a^4=0$$

这样，原来的 4 个方程变成了两个方程。

15.4.2 Poisson 方法

Poisson 方法包括关于第一积分的充分必要条件、Poisson 定理，以及由已知积分生成新的积分等。

1)广义 Poisson 条件

对自治和半自治情形的 Birkhoff 方程，有 Lie 代数结构，可以定义广义 Poisson 括号

$$\sum_{\mu=1}^{2n}\sum_{\nu=1}^{2n}\frac{\partial A}{\partial a^\mu}\Omega^{\mu\nu}\frac{\partial B}{\partial a^\nu}\overset{\text{def}}{=\!=\!=}[A,B] \tag{15.4.30}$$

关于第一积分的广义 Poisson 条件表示为

$$\frac{\partial I}{\partial t}+[I,B]=0 \tag{15.4.31}$$

它是一个充分必要条件。如果 $I(t,\boldsymbol{a})$ 是自治或半自治情形 Birkhoff 方程的积分，则它满足式(15.4.31)；如果某函数 $I(t,\boldsymbol{a})$ 满足式(15.4.31)，则 $I(t,\boldsymbol{a})$ 是系统的积分。于是有

命题 5 $I(t,\boldsymbol{a})$ 是自治或半自治 Birkhoff 方程积分的充分必要条件是满足广义 Poisson 条件(15.4.31)。

由命题5知,Birkhoff 函数 B 是自治和半自治 Birkhoff 方程的积分。

利用广义 Poisson 条件不仅可以验证积分,还可用解偏微分方程(15.4.31)的方法来找到积分。

2)Poisson 定理

如果两个积分 I_1 和 I_2 的广义 Poisson 括号恒等于零,即

$$[I_1, I_2] \equiv 0$$

则称为处于相互内旋的(对合的)。

Hamilton 系统的 Poisson 定理可应用于自治情形和半自治情形的 Birkhoff 系统,有

命题 6 如果自治情形或半自治情形 Birkhoff 系统有不处于相互内旋的两个积分 $I_1(t,\boldsymbol{a})$ 和 $I_2(t,\boldsymbol{a})$,则它们的广义 Poisson 括号 $[I_1, I_2]$ 也是系统的积分。

3)由已知积分生成新的积分

命题 7 如果自治 Birkhoff 系统有积分 $I(t,\boldsymbol{a})$,那么 $\frac{\partial I}{\partial t}, \frac{\partial^2 I}{\partial t^2}, \cdots$ 都是系统的积分。

命题 8 如果自治情形或半自治情形 Birkhoff 系统有包含变量 a^ρ 的积分,但 $\Omega^{\mu\nu}$ 和 B 都不含 a^ρ,则 $\frac{\partial I}{\partial a^\rho}, \frac{\partial^2 I}{\partial a^{\rho 2}}, \cdots$ 都是系统的积分。

例 2 4阶半自治 Birkhoff 系统为

$$R_1 = a^3, R_2 = a^4, R_3 = R_4 = 0, B = \frac{1}{2}(a^3)^2 + \frac{1}{2}(a^4)^2 - a^1 \ln t \quad (t > 0)$$

试用 Poisson 方法求积分。

解:Birkhoff 方程给出

$$-\dot{a}^3 = -\ln t, -\dot{a}^4 = 0, \dot{a}^1 = a^3, \dot{a}^2 = a^4$$

广义 Poisson 条件(15.4.31)给出

$$\frac{\partial I}{\partial t} + \frac{\partial I}{\partial a^1} a^3 + \frac{\partial I}{\partial a^2} a^4 + \frac{\partial I}{\partial a^3} \ln t = 0$$

其特征方程为

$$\frac{\mathrm{d}t}{1} = \frac{\mathrm{d}a^1}{a^3} = \frac{\mathrm{d}a^2}{a^4} = \frac{\mathrm{d}a^3}{\ln t} = \frac{\mathrm{d}a^4}{0}$$

由此可得如下积分

$$I_1 = a^4 = C_1$$

$$I_2 = a^2 - a^4 t = C_2$$

$$I_3 = a^3 - t \ln t + t = C_3$$

$$I_4 = a^1 - a^3 t - \frac{1}{4} t^2 + \frac{1}{2} t^2 \ln t = C_4$$

例 3 4 阶 Birkhoff 系统为

$R_1=a^2+a^3, R_2=-a^1, R_3=-a^1+a^4, R_4=-a^3, B=(a^3)^2+2a^2a^3-(a^4)^2$

试求其积分。

解:Birkhoff 方程给出

$$-2\dot{a}^1-2\dot{a}^3=0, \qquad 2\dot{a}^1-2a^3=0$$

$$2\dot{a}^1-2\dot{a}^4-2a^3-2a^2=0, \qquad 2\dot{a}^3+2a^4=0$$

即

$$\dot{a}^1=a^3, \dot{a}^2=a^4, \dot{a}^3=-a^4, \dot{a}^4=-a^2$$

由第二、第三个方程,容易得到积分

$$I_1=a^2+a^3=C_1$$

由第二、第四个方程,可求得积分

$$I_2=a^2\sin t+a^4\cos t=C_2$$

由命题 7 知,由 I_2 可生成积分

$$I_3=\frac{\partial I_2}{\partial t}=a^2\cos t+a^4\sin t=C_3$$

因系统是自治情形的 Birkhoff 方程,故 B 是积分,即有

$$I_4=(a^3)^2+2a^2a^3-(a^4)^2=C_4$$

注意到,上述 4 个积分不是彼此独立的。

例 4 4 阶 Birkhoff 系统为

$$R_1=2a^3-a^2+ta^4, R_2=R_3=0, R_4=ta^1+a^2-a^3$$

$$B=-(a^1)^2+\frac{1}{2}(a^3)^2-\frac{1}{2}(a^4)^2$$

试求其积分。

解:由 R_ν 知

$$(\Omega_{\mu\nu})=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Birkhoff 方程给出

$$\dot{a}^2-2\dot{a}^3=-2a^1+a^4, \qquad -\dot{a}^1-\dot{a}^4=0$$

$$2\dot{a}^1-\dot{a}^4=a^3, \qquad -\dot{a}^2+\dot{a}^3=-a^4+a^1$$

简化为

$$\dot{a}^1=a^3, \dot{a}^2=a^4, \dot{a}^3=a^1, \dot{a}^4=a^3,$$

广义 Poisson 条件(15.4.31)给出

$$\frac{\partial I}{\partial t}+\frac{\partial I}{\partial a^1}a^3+\frac{\partial I}{\partial a^2}a^4+\frac{\partial I}{\partial a^3}a^1+\frac{\partial I}{\partial a^4}a^3=0$$

可找到它的一个积分

$$I_1=a^3+a^4t-a^2-a^1t=C_1$$

因 $\Omega^{\mu\nu}$ 和 B 都不显含 t,由命题 7 知有积分

$$I_2=\frac{\partial I_1}{\partial t}=a^4-a^1=C_2$$

与广义 Poisson 条件相应的特征方程为

$$\frac{\mathrm{d}t}{1}=\frac{\mathrm{d}a^1}{a^3}=\frac{\mathrm{d}a^2}{a^4}=\frac{\mathrm{d}a^3}{a^1}=\frac{\mathrm{d}a^4}{a^3}$$

由此有

$$a^1\mathrm{d}a^1-a^3\mathrm{d}a^3=0$$

积分得

$$I_3=(a^1)^2-(a^3)^2=C_3$$

另外,还有

$$(\mathrm{d}a^1-\mathrm{d}a^3)\exp t+(a^1-a^3)\exp t\mathrm{d}t=0$$

积分得

$$I_4=(a^1-a^3)\exp t=C_4$$

15.4.3 变换理论

Hamilton 方程在一般变换下不能保持其正则形式。类似地,Birkhoff 方程在一般变换下也不能保持其形式。下面两个命题给出 Birkhoff 方程保持形式不变的一些变换。

命题 9 在等时变换

$$t\to t'\equiv t,a^\mu\to a'^\mu(t,\boldsymbol{a}) \tag{15.4.32}$$

下,新的 Birkhoff 函数和新的 Birkhoff 函数组分别选为

$$\begin{aligned}B'(t,\boldsymbol{a}')&=\left(B-\sum_{\alpha=1}^{2n}\frac{\partial a^\alpha}{\partial t}R_\alpha\right)(t,\boldsymbol{a}')\\R'_\rho(t,\boldsymbol{a}')&=\left(\sum_{\alpha=1}^{2n}\frac{\partial a^\alpha}{\partial a'^\rho}R_\alpha\right)(t,\boldsymbol{a}')\end{aligned} \tag{15.4.33}$$

则在新变量下 Birkhoff 方程保持其形式

$$\sum_{\sigma=1}^{2n}\Big(\frac{\partial R'_\sigma(t,\boldsymbol{a}')}{\partial a'^\rho}-\frac{\partial R'_\rho(t,\boldsymbol{a}')}{\partial a'^\sigma}\Big)\dot{a}'^\sigma-\Big(\frac{\partial B'(t,\boldsymbol{a}')}{\partial a'^\rho}+\frac{\partial R'_\rho(t,\boldsymbol{a}')}{\partial t}\Big)=0$$

$$(\rho=1,2,\cdots,2n) \qquad (15.4.34)$$

命题 10 在非等时变换

$$t\to t'(t,\boldsymbol{a}),a^\mu\to a'^\mu(t,\boldsymbol{a}) \qquad (15.4.35)$$

下，新的 Birkhoff 函数和新的 Birkhoff 函数组分别选为

$$B'(t',\boldsymbol{a}')=\Big(B\frac{\partial t}{\partial t'}-\sum_{\mu=1}^{2n}R_\mu\frac{\partial a^\mu}{\partial t}\Big)(t',\boldsymbol{a}')$$

$$R'_\rho(t',\boldsymbol{a}')=\Big(\sum_{\mu=1}^{2n}R_\mu\frac{\partial a^\mu}{\partial a'^\rho}-B\frac{\partial t}{\partial a'^\rho}\Big)(t',\boldsymbol{a}') \qquad (15.4.36)$$

则在新变量下 Birkhoff 方程保持其形式

$$\sum_{\sigma=1}^{2n}\Big(\frac{\partial R'_\sigma}{\partial a'^\rho}-\frac{\partial R'_\rho}{\partial a'^\sigma}\Big)\frac{\mathrm{d}a'^\sigma}{\mathrm{d}t'}-\Big(\frac{\partial B'}{\partial a'^\rho}+\frac{\partial R'_\rho}{\partial t'}\Big)=0 \qquad (\rho=1,2,\cdots,2n)$$

$$(15.4.37)$$

证明见文献[2]。

如果等时变换(15.4.32)满足以下等式

$$\sum_{\mu=1}^{2n}R_\mu(t,\boldsymbol{a})\mathrm{d}a^\mu-B(t,\boldsymbol{a})\mathrm{d}t-\sum_{\mu=1}^{2n}R'_\mu(t,\boldsymbol{a}')\mathrm{d}a'^\mu+B'(t,\boldsymbol{a}')\mathrm{d}t=\mathrm{d}F(t,\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}')$$

$$(15.4.38)$$

其中 F 为 $t,\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}'$ 的某函数，则称变换(15.4.32)为广义正则变换，而函数 F 称为母函数。

当取

$$a^\mu=\begin{cases}q_\mu & (\mu=1,2,\cdots,n)\\ p_{\mu-n} & (\mu=n+1,n+2,\cdots,2n)\end{cases}$$

$$R_\nu=\begin{cases}p_\nu & (\nu=1,2,\cdots,n)\\ 0 & (\nu=n+1,n+2,\cdots,2n)\end{cases}$$

$$B=H$$

时，式(15.4.38)给出

$$\sum_{s=1}^{n}p_s\mathrm{d}q_s-H(t,\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})\mathrm{d}t-\sum_{s=1}^{n}p'_s\mathrm{d}q'_s+H'(t,\boldsymbol{q}',\boldsymbol{p}')\mathrm{d}t=\mathrm{d}F(t,\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}',\boldsymbol{p}')$$

$$(15.4.39)$$

这就是构造 Hamilton 系统正则变换的基本等式。

等式(15.4.38)中的函数 F 可选为变量 $t,\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}'$ 的任何 $2n$ 维子集。假设 $F=F(t,\boldsymbol{a}')$，等式(15.4.38)展开为

$$\sum_{\mu=1}^{2n}\Big(\sum_{\alpha=1}^{2n}R_\alpha\frac{\partial a^\alpha}{\partial a'^\mu}-R'_\mu-\frac{\partial F}{\partial a'^\mu}\Big)\mathrm{d}a'^\mu+\Big(B'-B+\sum_{\alpha=1}^{2n}R_\alpha\frac{\partial a^\alpha}{\partial t}-\frac{\partial F}{\partial t}\Big)\mathrm{d}t=0 \tag{15.4.40}$$

由此得到变换规则

$$\begin{aligned}R'_\mu&=\sum_{\alpha=1}^{2n}R_\alpha\frac{\partial a_\alpha}{\partial a'^\mu}-\frac{\partial F}{\partial a'^\mu}\\ B'&=B-\sum_{\alpha=1}^{2n}R_\alpha\frac{\partial a^\alpha}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial t}\end{aligned}\qquad(\mu=1,2,\cdots,2n) \tag{15.4.41}$$

例 5 4 阶 Birkhoff 系统为

$$R_1=a^3,R_2=a^4,R_3=R_4=0$$

$$B=\frac{1}{2}[a^3-\frac{1}{b}\arctan bt]^2+\frac{1}{2}[a^4-\frac{1}{2b}\ln(1+b^2t^2)]^2$$

试构造新的 Birkhoff 函数 B'和新的 Birkhoff 函数组 R'_μ,使 Birkhoff 方程保持其形式。

解:取新变量为

$$a'^1=a^1,a'^2=a^2,a'^3=a^3-\frac{1}{b}\arctan bt,a'^4=a^4-\frac{1}{2b}\ln(1+b^2t^2)$$

则有逆变换

$$a^1=a'^1,a^2=a'^2,a^3=a'^3+\frac{1}{b}\arctan bt,a^4=a'^4+\frac{1}{2b}\ln(1+b^2t^2)$$

按式(15.4.33)构造新的 Birkhoff 函数 B' 和新的 Birkhoff 函数组 R'_μ,有

$$\begin{aligned}R'_1&=\sum_{\alpha=1}^{4}R_\alpha\frac{\partial a^\alpha}{\partial a'^1}=R_1(t,\boldsymbol{a}')=a'^3+\frac{1}{b}\arctan bt\\ R'_2&=\sum_{\alpha=1}^{4}R_\alpha\frac{\partial a^\alpha}{\partial a'^2}=R_2(t,\boldsymbol{a}')=a'^4+\frac{1}{2b}\ln(1+b^2t^2)\\ R'_3&=R_3(t,\boldsymbol{a}')=0\\ R'_4&=R_4(t,\boldsymbol{a}')=0\\ B'&=B-\sum_{\alpha=1}^{4}\frac{\partial a^\alpha}{\partial t}R_\alpha=\frac{1}{2}[(a'^3)^2+(a'^4)^2]\end{aligned}$$

而新的 Birkhoff 方程

$$\sum_{\nu=1}^{4}\Big(\frac{\partial R'_\nu}{\partial a'^\mu}-\frac{\partial R'_\mu}{\partial a'^\nu}\Big)\dot a'^\nu-\Big(\frac{\partial B'}{\partial a'^\mu}+\frac{\partial R'_\mu}{\partial t}\Big)=0\qquad(\mu=1,2,3,4)$$

例 6 研究例 5 的广义正则变换。

解:取母函数为

$$F=a'^1a'^3+a'^2a'^4$$

式(15.4.41)给出

$$R'_\mu=\sum_{\alpha=1}^{4}R_\alpha\frac{\partial a^\alpha}{\partial a'^\mu}-\frac{\partial F}{\partial a'^\mu}$$

做计算,得

$$R'_1=\frac{1}{b}\arctan bt,R'_2=\frac{1}{2b}\ln(1+b^2t^2)$$

$$R'_3=-a'^1,R'_4=-a'^2,B'=\frac{1}{2}[(a'^3)^2+(a'^4)^2]$$

15.4.4 积分不变量

1)Pfaff 作用量的非等时变分

Pfaff 作用量为

$$A=\int_{t_0(\alpha)}^{t_1(\alpha)}(\sum_{\mu=1}^{2n}R_\mu\mathrm{d}a^\mu-B\mathrm{d}t) \tag{15.4.42}$$

其中 α 为参数,它的非等时变分为

$$\Delta A=\int_{t_0}^{t_1}\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[(\sum_{\mu=1}^{2n}R_\mu\dot{a}^\mu-B)\Delta t+\sum_{\mu=1}^{2n}R_\mu\delta a^\mu\right]+\sum_{\mu=1}^{2n}\left[\sum_{\nu=1}^{2n}\left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu}\right)\dot{a}^\nu-\frac{\partial B}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu}{\partial t}\right]\delta a^\mu\right\}\mathrm{d}t \tag{15.4.43}$$

或

$$\Delta A=\int_{t_0}^{t_1}\left\{(\sum_{\mu=1}^{2n}R_\mu\dot{a}^\mu-B)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Delta t)+\left(\sum_{\mu=1}^{2n}\frac{\partial R_\mu}{\partial t}\dot{a}^\mu-\frac{\partial B}{\partial t}\right)\Delta t+\sum_{\mu=1}^{2n}\left(\sum_{\nu=1}^{2n}\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu}\dot{a}^\nu-\frac{\partial B}{\partial a^\mu}\right)\Delta a^\mu+\sum_{\mu=1}^{2n}R_\mu\Delta\dot{a}^\mu\right\}\mathrm{d}t \tag{15.4.44}$$

2)积分不变量

将 Birkhoff 方程(15.1.1)代入式(15.4.43),得到

$$\Delta A=\left[(\sum_{\mu=1}^{2n}R_\mu\dot{a}^\mu-B)\Delta t+\sum_{\mu=1}^{2n}R_\mu\delta a^\mu\right]_{t_0}^{t_1}=\left[(\sum_{\mu=1}^{2n}R_\mu\Delta a^\mu-B\Delta t)\right]_{t_0}^{t_1}$$

当参数初始值 α_0 与终了值 α_1 相重合时,有

$$\oint_c\Delta A=\int_{\alpha_0}^{\alpha}\Delta A=0$$

于是有 Poincaré-Cartan 积分不变量

$$\oint_c \left(\sum_{\mu=1}^{2n} R_\mu \Delta a^\mu - B\Delta t\right) = \text{inv.} \tag{15.4.45}$$

当取

$$\begin{aligned} &R_\mu = \begin{cases} p_\mu & (\mu=1,2,\cdots,n) \\ 0 & (\mu=n+1,n+2,\cdots,2n) \end{cases} \\ &a^\mu = \begin{cases} q_\mu & (\mu=1,2,\cdots,n) \\ p_{\mu-n} & (\nu=n+1,n+2,\cdots,2n) \end{cases} \\ &B=H \end{aligned} \tag{15.4.46}$$

时,式(15.4.45)给出 Hamilton 系统的 Poincaré-Cartan 积分不变量

$$\oint \left(\sum_{s=1}^{n} p_s \Delta q_s - H\Delta t\right) = \text{inv.} \tag{15.4.47}$$

如果积分沿同时状态的轮廓进行,则 Poincaré-Cartan 积分不变量(15.4.45)成为 Poincaré 线性积分不变量

$$\oint \sum_{\mu=1}^{2n} R_\mu \delta a^\mu = \text{inv.} \tag{15.4.48}$$

§15.5 专门问题

本节讨论 Birkhoff 系统的一些专门问题,包括完整系统和非完整系统的 Birkhoff 动力学、约束 Birkhoff 系统动力学,以及系统的平衡稳定性等问题。

15.5.1 完整系统的 Birkhoff 动力学

1)一般完整系统的运动方程

完整系统的第二类 Lagrange 方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial T}{\partial q_s} = Q_s \qquad (s=1,2,\cdots,n) \tag{15.5.1}$$

其中

$$\begin{aligned} &T = T_2 + T_1 + T_0 \\ &T_2 = \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} A_{sk}(t,\boldsymbol{q})\,\dot{q}_s\,\dot{q}_k,\ T_1 = \sum_{s=1}^{n} B_s(t,\boldsymbol{q})\,\dot{q}_s \\ &T_0 = T_0(t,\boldsymbol{q}), \qquad Q_s = Q_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) \end{aligned}$$

表示为显式,有

$$\sum_{k=1}^{n} A_{sk}\ddot{q}_k + \sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}[k,m;s]\,\dot{q}_k\,\dot{q}_m = Q_s + \Gamma_s + \frac{\partial T_0}{\partial q_s} - \frac{\partial B_s}{\partial t} - \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial A_{sk}}{\partial t}\dot{q}_k \qquad (s=1,2,\cdots,n) \tag{15.5.2}$$

其中

$$[k,m;s]=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial A_{ks}}{\partial q_m}+\frac{\partial A_{ms}}{\partial q_k}-\frac{\partial A_{km}}{\partial q_s}\right) \tag{15.5.3}$$

为动能二次型系数的第一类 Christoffel 符号，而

$$\Gamma_s = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial B_k}{\partial q_s}-\frac{\partial B_s}{\partial q_k}\right)\dot{q}_k \tag{15.5.4}$$

为广义陀螺力。由方程(15.5.2)可解出所有广义加速度

$$\ddot{q}_r = \sum_{s=1}^{n}\frac{\Delta_{sr}}{\Delta}\left\{-\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}[k,m;s]\,\dot{q}_k\dot{q}_m+Q_s+\Gamma_s+\frac{\partial T_0}{\partial q_s}-\frac{\partial B_s}{\partial t}-\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial A_{sk}}{\partial t}\dot{q}_k\right\} \tag{15.5.5}$$

其中 $\Delta=\det(A_{sk})\neq 0$，$\Delta_{sr}$ 为 Δ 元素 (s,r) 的代数余子式。方程(15.5.5)的右端为 $t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}$ 的函数，简记作 $g_r(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$，有

$$\ddot{q}_s=g_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) \qquad (s=1,2,\cdots,n) \tag{15.5.6}$$

对于有多余坐标的完整系统、完整系统的相对运动动力学、变质量完整系统等，其方程都可表示为二阶常微分方程组[3]。

2)运动方程的 Birkhoff 化

令

$$a^s=q_s, \qquad a^{n+s}=\dot{q}_s \qquad (s=1,2,\cdots,n)$$

方程(15.5.6)可表示为标准一阶形式

$$\dot{a}^\nu=\sigma^\nu \qquad (\nu=1,2,\cdots,2n) \tag{15.5.7}$$

其中

$$\sigma^s=a^{n+s},\sigma^{n+s}=g_s(t,a^k,a^{n+k}) \qquad (s,k=1,2,\cdots,n)$$

欲使方程(15.5.7)有 Birkhoff 表示，则有

$$\sum_{\nu=1}^{2n}\left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu}\right)\sigma^\nu(t,\boldsymbol{a})=\frac{\partial B}{\partial a^\mu}+\frac{\partial R_\mu}{\partial t} \qquad (\mu=1,2,\cdots,2n) \tag{15.5.8}$$

对于给定的 Birkhoff 函数 B，无论 Birkhoff 函数组 R_μ 是否显含 t，方程(15.5.8)总可表示为 Cauchy-Ковалевская 型[2]。根据 Cauchy-Ковалевская 定理，可知方程(15.5.8)的解总是存在的。因此，一切完整系统的方程总有 Birkhoff 表示。有了 Birkhoff 表示，就可用 Birkhoff 系统的特性来研究完整系统的动力学。

例 1 二自由度完整系统为

$$T=\frac{1}{2}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2),Q_1=-\dot{q}_2,Q_2=-\dot{q}_1$$

试将其 Birkhoff 化。

解：系统的微分方程为

$$\ddot{q}_1+\dot{q}_2=0, \qquad \ddot{q}_2+\dot{q}_1=0$$

令 $a^1=q_1, a^2=q_2, a^3=\dot{q}_1, a^4=\dot{q}_2$，则有

$$\dot{a}^1=a^3, \dot{a}^2=a^4, \dot{a}^3=-a^4, \dot{a}^4=-a^3$$

可找到 4 个积分

$$I^1=a^1+a^4, \qquad I^2=a^2+a^3$$

$$I^3=-(a^3+a^4)\exp t, \quad I^4=(a^3-a^4)\exp(-t)$$

按 Hojman 方法，利用式(15.3.13)和式(15.3.14)，计算得

$$R_1=G_1, R_2=G_2, R_3=G_2-G_3\exp t+G_4\exp(-t)$$

$$R_4=G_1-G_3\exp t-G_4\exp(-t)$$

$$B=G_3(a^3+a^4)\exp t+G_4(a^3-a^4)\exp(-t)$$

取

$$G_1=I^3, G_2=I^4, G_3=G_4=0$$

则有

$$R_1=R_4=-(a^3+a^4)\exp t, R_2=R_3=(a^3-a^4)\exp(-t), B=0$$

而 Birkhoff 方程为

$$(\dot{a}^3+\dot{a}^4)\exp t=-(a^3+a^4)\exp t$$

$$(-\dot{a}^3+\dot{a}^4)\exp(-t)=-(a^3-a^4)\exp(-t)$$

$$(-\dot{a}^1+\dot{a}^4)\exp t+(\dot{a}^2+\dot{a}^4)\exp(-t)=-(a^3-a^4)\exp(-t)$$

$$(-\dot{a}^1+\dot{a}^3)\exp t+(-\dot{a}^1-\dot{a}^3)\exp(-t)=-(a^3+a^4)\exp t$$

15.5.2 非完整系统的 Birkhoff 动力学

1)一般非完整系统的运动方程

假设力学系统的位形由 n 个广义坐标 $q_s(s=1,2,\cdots,n)$ 来确定，它的运动受有 g 个彼此独立的双面理想 Четаев 型非完整约束

$$f_\beta(q_s,\dot{q}_s,t)=0 \qquad (\beta=1,2,\cdots,g;s=1,2,\cdots,n) \tag{15.5.9}$$

系统的运动方程可表示为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial T}{\partial q_s}=Q_s+\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s} \qquad (s=1,2,\cdots,n) \tag{15.5.10}$$

其中 λ_β 为约束乘子，而带 λ_β 的项代表广义非完整约束力。类似于方程(15.5.5)，方程(15.5.10)可表示为

$$\ddot{q}_l=\sum_{s=1}^{n}\frac{\Delta_{sl}}{\Delta}\left\{-\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}[k,m;s]\dot{q}_k\dot{q}_m+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial B_k}{\partial q_s}-\frac{\partial B_s}{\partial q_k}\right)\dot{q}_k-\frac{\partial B_s}{\partial t}+\right.$$

$$\left.\frac{\partial T_0}{\partial q_s}-\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial A_{sk}}{\partial t}\dot{q}_k+Q_s+\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\right\} \quad (l=1,2,\cdots,n) \tag{15.5.11}$$

在运动微分方程积分之前，可确定出广义非完整约束力作为广义坐标、广义速度和时间的函数。将约束方程(15.5.9)对 t 求导数，得

$$\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial f_\gamma}{\partial q_l}\dot{q}_l+\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial f_\gamma}{\partial \dot{q}_l}\ddot{q}_l+\frac{\partial f_\gamma}{\partial t}=0\quad(\gamma=1,2,\cdots,g)\qquad(15.5.12)$$

将式(15.5.11)代入(15.5.12)得到

$$\begin{aligned}&\sum_{\beta=1}^{g}\sum_{s=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\frac{2\Delta_{sl}}{\Delta}\frac{\partial f_\gamma}{\partial \dot{q}_l}\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\lambda_\beta+\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial f_\gamma}{\partial q_l}\dot{q}_l+\frac{\partial f_\gamma}{\partial t}+\\&\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial f_\gamma}{\partial \dot{q}_l}\sum_{s=1}^{n}\frac{\Delta_{sl}}{\Delta}\Big\{-\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}[k,m;s]\,\dot{q}_k\dot{q}_m+\sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{\partial B_k}{\partial q_s}-\frac{\partial B_s}{\partial q_k}\Big)\dot{q}_k-\frac{\partial B_s}{\partial t}+\frac{\partial T_0}{\partial q_s}-\\&\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial A_{sk}}{\partial t}\dot{q}_k+Q_s\Big\}=0\qquad(\gamma=1,2,\cdots,g)\end{aligned}$$

(15.5.13)

设

$$\det\Big(\sum_{s=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\frac{\Delta_{sl}}{\Delta}\frac{\partial f_\gamma}{\partial \dot{q}_l}\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\Big)\neq 0$$

则可由式(15.5.13)解出 $\lambda_\beta=\lambda_\beta(q_s,\dot{q}_t,t)$，于是广义非完整约束力为

$$\Lambda_s=\Lambda_s(t,q_k,\dot{q}_k)=\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta(t,q_k,\dot{q}_k)\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\qquad(s=1,2,\cdots,n)$$

(15.5.14)

将其代入方程(15.5.11)，得到

$$\begin{aligned}\ddot{q}_l=&\sum_{s=1}^{n}\frac{\Delta_{sl}}{\Delta}\Big\{-\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}[k,m;s]\,\dot{q}_k\dot{q}_m+\sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{\partial B_k}{\partial q_s}-\frac{\partial B_s}{\partial q_k}\Big)\dot{q}_k-\\&\frac{\partial B_s}{\partial t}+\frac{\partial T_0}{\partial q_s}-\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial A_{sk}}{\partial t}\dot{q}_k+Q_s+\Lambda_s\Big\}\qquad(l=1,2,\cdots,n)\end{aligned}$$

(15.5.15)

简记作

$$\ddot{q}_s=g_s(t,q_k,\dot{q}_k)\qquad(s,k=1,2,\cdots,n)\qquad(15.5.16)$$

方程(15.5.16)可作为某个完整系统来研究，这个完整系统有 n 个自由度，其动能为 T，而广义力为 $Q_s+\Lambda_s$。在初始条件 $t=t_0,q_s=q_{s0},\dot{q}_s=\dot{q}_{s0}$ 下解方程(15.5.16)，可得到这个完整系统的运动

$$q_s=q_s(t,t_0,q_{k0},\dot{q}_{k0})\qquad(s,k=1,2,\cdots,n)\qquad(15.5.17)$$

方程(15.5.16)称为与非完整系统(15.5.9)，(15.5.10)相应的完整系统的方程。非完整系统的运动可在相应完整系统的解(15.5.17)中找到，只要施加非完整约束对初始条件的限制

$$f_\beta(t_0,q_{s0},\dot{q}_{s0})=0\qquad(15.5.18)$$

2)运动方程的 Birkhoff 化

非完整系统运动方程的 Birkhoff 化问题归结为相应完整系统运动方程(15.5.16)的 Birkhoff 化问题。

令

$$a^s=q_s,\quad a^{n+s}=\dot{q}_s$$

则方程(15.5.16)表示为标准一阶形式

$$\dot{a}^\nu=\sigma^\nu\qquad(\nu=1,2,\cdots,2n)$$

其中

$$\sigma^s=a^{n+s},\sigma^{n+s}=g_s(t,a^\nu)\qquad(s=1,2,\cdots,n)$$

为使其有 Birkhoff 形式,则有

$$\sum_{\nu=1}^{2n}\left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu}\right)\sigma^\nu=\frac{\partial B}{\partial a^\mu}+\frac{\partial R_\mu}{\partial t}\qquad(\mu=1,2,\cdots,2n)\quad(15.5.19)$$

对于给定的 Birkhoff 函数 B,关于 R_μ 的偏微分方程(15.5.19)总是 Cauchy-Ковалевская 型的。根据 Cauchy-Ковалевская 定理,可知方程(15.5.19)的解总是存在的。

例 2 系统的位形由两个广义坐标 q_1,q_2 来确定,动能和势能分别为

$$T=\frac{1}{2}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2),\qquad \nu=\text{const.}$$

所受非完整约束为

$$f=\dot{q}_1+bt\,\dot{q}_2-bq_2+t=0\qquad(b=\text{const.})$$

试将其表示为 Birkhoff 形式。

解:方程(15.5.10)给出

$$\ddot{q}_1=\lambda,\quad \ddot{q}_2=\lambda bt$$

可解出约束乘子

$$\lambda=-\frac{1}{1+b^2t^2}$$

于是有

$$\ddot{q}_1=-\frac{1}{1+b^2t^2},\ddot{q}_2=-\frac{bt}{1+b^2t^2}$$

令

$$a^1=q_1,a^2=q_2,a^3=\dot{q}_1,a^4=\dot{q}_2$$

方程的标准阶形式为

$$\dot{a}^1=a^3,\dot{a}^2=a^4,\dot{a}^3=-\frac{1}{1+b^2t^2},\dot{a}^4=-\frac{bt}{1+b^2t^2}$$

可找到 4 个独立的积分

$$I^1=a^1-a^3t-\frac{1}{2b^2}\ln(1+b^2t^2)$$

$$I^2=a^2-a^4t-\frac{t}{b}+\frac{1}{b^2}\arctan bt$$

$$I^3=a^3+\frac{1}{b}\arctan bt$$

$$I^4=a^4+\frac{1}{2b}\ln(1+b^2t^2)$$

Hojman 方法的式(15.3.13),(15.3.14)给出

$$R_1=G_1,R_2=G_2,R_3=G_3-tG_1,R_4=G_4-tG_2$$

$$B=-G_1\left(-a^3-\frac{t}{1+b^2t^2}\right)-G_2\left(-a^4-\frac{bt^2}{1+b^2t^2}\right)-$$

$$G_3\left(\frac{1}{1+b^2t^2}\right)-G_4\left(\frac{bt}{1+b^2t^2}\right)$$

取

$$G_1=G_2=0,G_3=I^1,G_4=I^2$$

则有

$$R_1=R_2=0,R_3=a^1-a^3t-\frac{1}{2b^2}\ln(1+b^2t^2),R_4=a^2-a^4t-\frac{t}{b}+\frac{1}{b^2}\arctan bt$$

$$B=-\frac{1}{1+b^2t^2}\left[a^1-a^3t-\frac{1}{2b^2}\ln(1+b^2t^2)\right]-\frac{bt}{1+b^2t^2}\left[a^2-a^4t-\frac{t}{b}+\frac{1}{b^2}\arctan bt\right]$$

这就是相应完整系统运动方程的 Birkhoff 表示。为研究非完整系统的运动,尚需施加非完整约束对初始条件的限制

$$a_0^3+bt_0a_0^4-ba_0^2+t_0=0$$

其中 a_0^ν,t_0 为 a^ν,t 的初值。

15.5.3 约束 Birkhoff 系统

1)带乘子的方程

Pfaff-Birkhoff-d'Alembert 原理为式(15.2.2),即

$$\sum_{\mu=1}^{2n}\left\{\sum_{\nu=1}^{2n}\left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu}\right)\dot{a}^\nu-\frac{\partial B}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu}{\partial t}\right\}\delta a^\mu=0 \tag{15.5.20}$$

如果 δa^μ 彼此独立,则由此可导出 Birkhoff 方程。如果 $a^\mu(\mu=1,2,\cdots,2n)$不是彼此独立的,而是受到约束

$$f_\beta(a^\mu,t)=0 \qquad (\beta=1,2,\cdots,g) \tag{15.5.21}$$

则不能导出 Birkhoff 方程。对式(15.5.21)取等时变分,得

$$\sum_{\mu=1}^{2n}\frac{\partial f_\beta}{\partial a^\mu}\delta a^\mu=0 \qquad (\beta=1,2,\cdots,g) \tag{15.5.22}$$

利用 Lagrange 乘子法，由原理(15.5.20)和式(15.5.22)得到

$$\sum_{\nu=1}^{2n}\left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu}\right)\dot{a}^\nu-\frac{\partial B}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu}{\partial t}=\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial a^\mu}\qquad(\mu=1,2,\cdots,2n)\tag{15.5.23}$$

方程(15.5.23)称为**约束 Birkhoff 系统**的运动方程，其中 λ_β 为约束乘子。由方程(15.5.23)和约束方程(15.5.21)就有可能确定系统的运动。

将约束方程(15.5.21)对时间 t 求导数，得

$$\sum_{\mu=1}^{2n}\frac{\partial f_\beta}{\partial a^\mu}\dot{a}^\mu+\frac{\partial f_\beta}{\partial t}=0\tag{15.5.24}$$

将由方程(15.5.23)求得的 $\dot{a}^\mu$ 代入式(15.5.24)，得到

$$\frac{\partial f_\beta}{\partial t}+\sum_{\mu=1}^{2n}\frac{\partial f_\beta}{\partial a^\mu}\sum_{\nu=1}^{2n}\Omega^{\mu\nu}\left(\frac{\partial B}{\partial a^\nu}+\frac{\partial R_\nu}{\partial t}+\sum_{\gamma=1}^{g}\lambda_\gamma\frac{\partial f_\gamma}{\partial a^\nu}\right)=0$$

其中

$$\Omega^{\mu\nu}\Omega_{\nu\rho}=\delta^\mu_\rho\qquad \Omega^{\nu\rho}=\frac{\partial R_\rho}{\partial a^\nu}-\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\rho}$$

或表示为

$$\sum_{\gamma=1}^{g}D_{\beta\gamma}\lambda_\gamma=F_\beta\qquad(\beta=1,2,\cdots,g)\tag{15.5.25}$$

其中

$$\begin{aligned}D_{\beta\gamma}&=\sum_{\mu=1}^{2n}\sum_{\nu=1}^{2n}\frac{\partial f_\beta}{\partial a^\mu}\Omega^{\mu\nu}\frac{\partial f_\gamma}{\partial a^\nu}\\F_\beta&=-\frac{\partial f_\beta}{\partial t}-\sum_{\mu=1}^{2n}\sum_{\nu=1}^{2n}\frac{\partial f_\beta}{\partial a^\mu}\Omega^{\mu\nu}\left(\frac{\partial B}{\partial a^\nu}+\frac{\partial R_\nu}{\partial t}\right)\end{aligned}\tag{15.5.26}$$

由式(15.2.6)知

$$D_{\beta\gamma}=-D_{\gamma\beta}\tag{15.5.27}$$

令

$$\boldsymbol{D}=(D_{\beta\gamma})$$

则

$$\det\boldsymbol{D}=\det\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}=(-1)^g\det\boldsymbol{D}\tag{15.5.28}$$

因此，当 g 为奇数时，$\det\boldsymbol{D}=0$，此时不能由方程(15.5.21)，(15.5.23)求出乘子 λ_β。这样，在研究约束 Birkhoff 系统时，约束方程数目应选偶数。

2)用独立变量表示的方程

假设约束表示为

$$a^i=\varphi_i(a^k,t)\qquad(i=1,2,\cdots,2m;k=2m+1,\cdots,2n)\tag{15.5.29}$$

取等时变分，得

$$\delta a^i=\sum_{k=2m+1}^{2n}\frac{\partial\varphi_i}{\partial a^k}\delta a^k$$

将其代入原理(15.5.20),并注意到 $\delta a^k(k=2m+1,\cdots,2n)$是彼此独立的,得到

$$\sum_{i=1}^{2m}\left(\sum_{\nu=1}^{2n}\Omega_{i\nu}\dot{a}^{\nu}-\frac{\partial B}{\partial a^i}-\frac{\partial R_i}{\partial t}\right)\frac{\partial\varphi_i}{\partial a^k}+\sum_{\nu=1}^{2n}\Omega_{k\nu}\dot{a}^{\nu}-\frac{\partial B}{\partial a^k}-\frac{\partial R_k}{\partial t}=0$$

$$(k=2m+1,\cdots,2n) \tag{15.5.30}$$

将式(15.5.29)对时间 t 求导数,得

$$\dot{a}^i=\sum_{k=2m+1}^{2n}\frac{\partial\varphi_i}{\partial a^k}\dot{a}_k+\frac{\partial\varphi_i}{\partial t}$$

将其代入方程(15.5.30),得到

$$\sum_{l=2m+1}^{2n}\left\{\sum_{i=1}^{2m}\sum_{j=1}^{2m}\frac{\partial\varphi_i}{\partial a^k}\Omega_{ij}\frac{\partial\varphi_j}{\partial a^l}+\sum_{i=1}^{2m}\left(\Omega_{il}\frac{\partial\varphi_i}{\partial a^k}+\Omega_{ki}\frac{\partial\varphi_i}{\partial a^l}\right)+\Omega_{kl}\right\}\dot{a}^l-\sum_{i=1}^{2m}\frac{\partial B}{\partial a^i}\frac{\partial\varphi_i}{\partial a^k}-$$

$$\frac{\partial B}{\partial a^k}+\sum_{i=1}^{2m}\left(\sum_{j=1}^{2m}\Omega_{ij}\frac{\partial\varphi_j}{\partial t}-\frac{\partial R_i}{\partial t}\right)\frac{\partial\varphi_i}{\partial a^k}+\sum_{i=1}^{2m}\Omega_{ki}\frac{\partial\varphi_i}{\partial t}-\frac{\partial R_k}{\partial t}=0\qquad(k=2m+1,\cdots,2n)$$

$$\tag{15.5.31}$$

令

$$\widetilde{\Omega}_{kl}=\sum_{i=1}^{2m}\sum_{j=1}^{2m}\frac{\partial\varphi_i}{\partial a^k}\Omega_{ij}\frac{\partial\varphi_j}{\partial a^l}+\sum_{i=1}^{2m}\left(\Omega_{il}\frac{\partial\varphi_j}{\partial a^k}+\Omega_{ki}\frac{\partial\varphi_i}{\partial a^l}\right)+\Omega_{kl}$$

$$\widetilde{B}(a^k,t)=B(\varphi_i(a^k,t),a^k,t)$$

$$\tag{15.5.32}$$

则方程(15.5.31)可写成形式

$$\sum_{l=2m+1}^{2n}\widetilde{\Omega}_{kl}\dot{a}^l-\frac{\partial\widetilde{B}}{\partial a^k}-\sum_{i=1}^{2m}\frac{\partial R_i}{\partial t}\frac{\partial\varphi_i}{\partial a^k}-\frac{\partial R_k}{\partial t}+\sum_{i=1}^{2m}\left(\sum_{j=1}^{2m}\Omega_{ji}\frac{\partial\varphi_j}{\partial a^k}+\Omega_{ki}\right)\frac{\partial\varphi_i}{\partial t}=0$$

$$(k=2m+1,\cdots,2n) \tag{15.5.33}$$

这就是用独立变量 a^k 表示的约束 Birkhoff 系统的运动方程。

特别地,对定常约束 Birkhoff 自治系统,有

$$\frac{\partial\varphi_i}{\partial t}=\frac{\partial R_\mu}{\partial t}=\frac{\partial B}{\partial t}=0$$

则方程(15.5.33)有简单形式

$$\sum_{l=2m+1}^{2n}\widetilde{\Omega}_{kl}\dot{a}^l-\frac{\partial\widetilde{B}}{\partial a^k}=0\qquad(k=2m+1,\cdots,2n) \tag{15.5.34}$$

或表示为

$$\dot{a}^k-\sum_{l=2m+1}^{2n}\widetilde{\Omega}^{kl}\frac{\partial\widetilde{B}}{\partial a^l}=0\qquad(k=2m+1,\cdots,2n) \tag{15.5.35}$$

其中

$$\sum_{l=2m+1}^{2n}\widetilde{\Omega}^{kl}\widetilde{\Omega}_{lr}=\delta_r^k$$

15.5.4 平衡稳定性

1)一次近似方程

自治情形 Birkhoff 方程(15.2.15)可表示为

$$\sum_{\nu=1}^{2n}\Omega_{\mu\nu}\dot{a}^{\nu}-\frac{\partial B}{\partial a^{\mu}}=0\qquad(\mu=1,2,\cdots,2n)\tag{15.5.36}$$

设平衡位置为

$$a^{\mu}=a_0^{\mu},\dot{a}^{\mu}=0\qquad(\mu=1,2,\cdots,2n)\tag{15.5.37}$$

则

$$\left.\frac{\partial B}{\partial a^{\mu}}\right|_{a^{\nu}=a_0^{\nu}}=0\qquad(\mu,\nu=1,2,\cdots,2n)\tag{15.5.38}$$

这就是平衡方程。方程(15.5.38)有几个解,则系统就有几个平衡位置。

令

$$a^{\nu}=a_0^{\nu}+\xi^{\nu}\qquad(\nu=1,2,\cdots,2n)\tag{15.5.39}$$

将式(15.5.39)代入方程(15.5.36),得到受扰运动方程

$$\sum_{\nu=1}^{2n}\Omega_{\mu\nu}(a_0^{\rho}+\xi^{\rho})\dot{\xi}^{\nu}-\frac{\partial B}{\partial a^{\mu}}(a_0^{\tau}+\xi^{\tau})=0\qquad(\mu=1,2,\cdots,2n)\tag{15.5.40}$$

在平衡位置 $a^{\mu}=a_0^{\mu}$ 附近展开方程(15.5.40),并注意到式(15.5.38),得到一次近似方程

$$\sum_{\nu=1}^{2n}(\Omega_{\mu\nu})_0\dot{\xi}^{\nu}-\sum_{\nu=1}^{2n}\left(\frac{\partial^2 B}{\partial a^{\mu}\partial a^{\nu}}\right)_0\xi^{\nu}=0\qquad(\mu=1,2,\cdots,2n)\tag{15.5.41}$$

其中下标 0 表示 a^{ν} 用 a_0^{ν} 替代的结果。

2)一次近似理论

令
$$\omega_{\mu\nu}=\frac{\partial^2 B}{\partial a^{\mu}\partial a^{\nu}}$$

则方程(15.5.41)的特征方程为

$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix}-(\omega_{11})_0 & \lambda(\Omega_{12})_0-(\omega_{12})_0 & \cdots & \lambda(\Omega_{12n})_0-(\omega_{12n})_0\\ \lambda(\Omega_{21})_0-(\omega_{21})_0 & -(\omega_{22})_0 & \cdots & \lambda(\Omega_{22n})_0-(\omega_{22n})_0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \lambda(\Omega_{2n1})_0-(\omega_{2n1})_0 & \lambda(\Omega_{2n2})_0-(\omega_{2n2})_0 & \cdots & -(\Omega_{2n2n})_0\end{vmatrix}=0\tag{15.5.42}$$

因 $\Omega_{\mu\nu}$ 反对称,而 $\omega_{\mu\nu}$ 对称,故有

$$\Delta(\lambda)=\Delta(-\lambda)\tag{15.5.43}$$

而特征方程展开成下列形式

$$b_0\lambda^{2n}+b_1\lambda^{2n-2}+\cdots+b_{n-1}\lambda^2+b_n=0\tag{15.5.44}$$

利用 **Ляпунов** 一次近似理论得到

命题 11 如果自治 Birkhoff 系统一次近似的特征方程有实部不为零的根，则平衡是不稳定的。

3)Ляпунов 直接法

对自治形式的 Birkhoff 系统，Birkhoff 函数 B 是积分。如果 Birkhoff 函数能够成为 Ляпунов 函数，那么就可利用 **Ляпунов 直接法**来研究系统的稳定性。有如下结果：

命题 12 如果 $a^\nu = a_0^\nu(\nu=1,2,\cdots,2n)$ 是自治形式 Birkhoff 系统的平衡位置，若 Birkhoff 函数 B 满足 $B(\boldsymbol{a}_0)=0$，且 $B(\boldsymbol{a})$ 在 $a^\nu = a_0^\nu(\nu=1,2,\cdots,2n)$ 的邻域内是定号函数，则系统的平衡位置是稳定的。

4)平衡状态流形的稳定性

上面讨论的自治 Birkhoff 系统的平衡位置是孤立的。但有时，系统的平衡位置不是孤立的，而是组成流形，此时需讨论平衡状态流形的稳定性。

假设自治 Birkhoff 系统有积分

$$g(a^\nu)=C_0$$

组成流形 $\mathscr{L}$

$$\mathscr{L}=\left\{a^\mu \,\middle|\, g(a^\nu)=C_0=\text{const.}\right\} \tag{15.5.45}$$

它是方程(15.5.36)的一个不变集。设平衡位置流形为 $\mathscr{E}$

$$\mathscr{E}=\left\{a^\mu \,\middle|\, \left(\frac{\partial B}{\partial a^\mu}\right)_0=0\right\} \tag{15.5.46}$$

有如下结果：

命题 13 如果 Birkhoff 函数 B 在流形 $\mathscr{L}$ 上相对 $\mathscr{E}$ 为定号的，那么自治 Birkhoff 系统平衡状态流形 $\mathscr{E}$ 在 $\mathscr{L}$ 上是稳定的。

例 3 二阶 Birkhoff 系统为

$$R_1=0, R_2=a^1, B=\frac{1}{2}(a^2)^2+\frac{1}{2}\omega^2(a^1)^2-\frac{\omega^2}{16b^2}(a^1)^4$$

其中 b,ω 为常数，试研究系统的平衡稳定性。

解：Birkhoff 方程给出

$$\dot{a}^2-\omega^2 a^1+\frac{\omega^2}{4b^2}(a^1)^3=0, -\dot{a}^1-a^2=0$$

由此得三个平衡位置

$$(1)\qquad a^1=a^2=0$$

$$(2)\qquad a^1=\pm 2b, a^2=0$$

对应平衡位置(1)的一次近似方程为

$$\dot{\xi}^2-\omega^2\xi^1=0, -\dot{\xi}^1-\xi^2=0$$

其特征方程为

$$\begin{vmatrix} -\omega^2 & \lambda \\ -\lambda & -1 \end{vmatrix}=0$$

由此得到特征根为

$$\lambda=\pm \mathrm{i}\omega$$

这是一对纯虚根的临界情形。对此问题不能用一次近似理论来判断稳定性。由于

$$B(0)=0$$

$$B(\xi^1,\xi^2)=\frac{1}{2}(\xi^2)^2+\frac{1}{2}\omega^2(\xi^1)^2-\frac{\omega^2}{16b^2}(\xi^1)^4$$

当 ξ^1,ξ^2 充分小时，B 对 ξ^1,ξ^2 是正定的。据命题 12 知，平衡位置(1)是稳定的。

对应平衡位置(2)的一次近似方程为

$$\dot{\xi}^2+2\omega^2\xi^1=0,-\dot{\xi}^1-\xi^2=0$$

其特征方程为

$$\begin{vmatrix} 2\omega^2 & \lambda \\ -\lambda & -1 \end{vmatrix}=0$$

由此得特征根

$$\lambda=\pm\sqrt{2}\omega$$

由命题 11 知，平衡位置(2)是不稳定的。

例 4　4 阶 Birkhoff 系统为

$$B=\frac{1}{2}\{b_{11}(a^1+a^2)^2+2b_{12}(a^1+a^2)(a^3+a^4)+b_{22}(a^3+a^4)^2\}$$

$$(\Omega_{\mu\nu})=\begin{pmatrix} 0 & 0 & a^1+1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^1+1 \\ -a^1-1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a^1-1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & b_{22} \end{vmatrix}\neq 0,a^1\neq -1$$

试研究系统的平衡稳定性。

解：平衡方程为

$$b_{11}(a^1+a^2)+b_{12}(a^3+a^4)=0$$

$$b_{12}(a^1+a^2)+b_{22}(a^3+a^4)=0$$

它有解

$$a^1+a^2=0, a^3+a^4=0$$

于是有平衡状态流形

$$\mathscr{E}=\left\{a^\mu \middle| a^1+a^2=0, a^3+a^4=0\right\}$$

函数 B 为正定的充分必要条件为

$$(1)\ b_{11}>0, \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & b_{22} \end{vmatrix}>0$$

函数 B 为负定的充分必要条件为

$$(2)\ -b_{11}>0, \begin{vmatrix} -b_{11} & -b_{12} \\ -b_{12} & -b_{22} \end{vmatrix}>0$$

由命题 13 知，当系数 b_{11}, b_{12}, b_{22} 满足条件(1)或条件(2)时，系统平衡状态流形是稳定的。

Birkhoff 系统力学是分析力学发展的第四阶段。Birkhoff 力学有丰富的内容，本章论述的是其中的基本部分，更详细的论述可参看专著[2～4]。

思考题

15.1 为什么 Van der Pol 方程的 Birkhoff 表示那么困难?

15.2 为什么说 Pfaff-Birkhoff 原理是更一般的一阶积分变分原理?

15.3 广义 Birkhoff 方程(15.2.34)是怎么导出来的?

15.4 广义 Birkhoff 方程(15.2.34)在什么条件下可以成为 Birkhoff 方程?

15.5 Birkhoff 力学有哪些应用?

习题

15.1 二阶 Birkhoff 系统为

$$R_1=0, R_2=-a^1, B=\frac{1}{2}(a^1)^2+\frac{1}{2}(a^2)^2+\frac{1}{4}\varepsilon(a^1)^4$$

其中 ε 为一常数，试列写 Birkhoff 方程，并验证它们满足自伴随条件(15.2.33)。

15.2 Toda 晶格问题的方程为

$$\dot{x}_j = y_j$$
$$\dot{y}_j = \exp(x_{j-1} - x_j) - \exp(x_j - x_{j+1})$$
$$(j=1,2,\cdots,m; m>1; x_0 = x_m, x_{m+1} = x_1)$$

试给出 Birkhoff 表示。

15.3 试研究 Duffing 方程

$$\ddot{y} + y + \varepsilon y^3 = 0$$

的 Birkhoff 化。

15.4 试研究 Whittaker 方程

$$\ddot{q}_1 = q_1, \ddot{q}_2 = \dot{q}_1$$

的 Birkhoff 化。

15.5 已知 4 阶 Birkhoff 自治系统有两个积分

$$I_1 = a^2 \sin t + a^4 \cos t, I_2 = a^1 - a^4 - (a^2 + a^3)t$$

试用 Poisson 方法求另外两个积分。

15.6 试由 Pfaff-Birkhoff-d'Alembert 原理

$$\sum_{\mu=1}^{2n} \left\{ \sum_{\nu=1}^{2n} \left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu} - \frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu} \right) \dot{a}^\nu - \frac{\partial B}{\partial a^\mu} - \frac{\partial R_\mu}{\partial t} \right\} \delta a^\mu = 0$$

以及运动性质

$$I_\rho(a^\mu, t) = C_\rho \qquad (\rho = 1,2,\cdots,m \leqslant 2n)$$

来组建系统的运动方程。

15.7 试证在规范变换

$$R_\mu \to R_\mu^+ = R_\mu + \frac{\partial G}{\partial a^\mu}$$

下,Birkhoff 方程保持不变。

15.8 已知二阶 Birkhoff 系统有一个积分

$$I = a^2$$

以及一个方程

$$\dot{a}^1 = \frac{1}{m}[a^2 + f_1(t)] \qquad (m = \text{const.})$$

试求系统的 Birkhoff 函数 B 和 Birkhoff 函数组 R_1, R_2。

15.9 二阶 Birkhoff 系统为

$$R_1 = 0, R_2 = (a^1)^2, B = \frac{1}{2}(a^1 - k_1)^2 + \frac{1}{2}(a^2 - k_2)^2$$

其中 k_1, k_2 为常数,试研究系统的平衡稳定性。

15.10 4 阶 Birkhoff 系统为

$$B = a^1 a^2 + a^3 a^4$$

$$(\Omega_{\mu\nu})=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

试研究其平衡稳定性。

参考文献

[1] Birkhoff GD. Dynamical Systems [M]. ProvidenceRI: AMS College Publ, 1927.

[2] Santilli RM. Foundations of Theoretical Mechanics Ⅱ [M]. New York: Springer-Verlag, 1983.

[3] 梅凤翔,史荣昌,张永发,吴惠彬. Birkhoff 系统动力学[M]. 北京:北京理工大学出版社,1996.

[4] Галиуллин АС, Гафаров ГГ, Малайшка РП, Хван АМ. Аналитическая Динамика Систем Гельмгольца, Биркгофа, Намбу[M]. Москва: УФН, 1997.

[5] 梅凤翔,张永发,何光等. 广义 Birkhoff 系统动力学的基本框架[J]. 北京理工大学学报,2007,27(12):1035-1038.

[6] Mei FX. The Noether's theory of Birkhoffian systems[J]. Science China, Serie A, 1993, 36(12): 1456-1467.

[7] Zheng GH, Chen XW, Mei FX. First integrals and reduction of the Birkhoffian system[J]. J of Beijing Institute of Technology, 2001, 10(1): 17-22.

16 场积分方法

场积分方法，简称场方法，由南斯拉夫学者 Vujanović于 1984 年提出的一种积分方法[1]。最初称为梯度法[2]。场方法主要用于积分非保守系统的方程，并在单自由度弱非线性系统中得到应用[1-4]。本章讨论各类约束力学系统的场方法，包括求解一般常微分方程的场方法、完整系统的场方法、非完整系统的场方法、Birkhoff 系统的场方法等。

§16.1 求解常微分方程的场方法

本节讨论一般常微分方程组的场方法，包括场方法的基本结果及简单应用。

16.1.1 场方法

研究一阶常微分方程组

$$\dot{x}_s = X_s(t, x_k) \qquad (s,k=1,2,\cdots,n) \tag{16.1.1}$$

将某一变量，例如 x_1，表示为依赖于时间 t 和其余变量 $x_i(i=2,3,\cdots,n)$ 的场函数

$$x_1 = u(t, x_i) \tag{16.1.2}$$

将式(16.1.2)对 t 求导数，并利用方程(16.1.1)后面($n-1$)个方程，则方程(16.1.1)的第一个方程表示为

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=2}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} X_i(t, u, x_j) - X_1(t, u, x_j) = 0 \quad (j=2,3,\cdots,n) \tag{16.1.3}$$

将这个拟线性偏微分方程称为基本偏微分方程[1]。

将方程(16.1.3)的完全积分表示为

$$x_1 = u(t, x_i, C_s) \qquad (i=2,3,\cdots,n; s=1,2,\cdots,n) \tag{16.1.4}$$

其中 C_s 是 n 个任意常数。将式(16.1.4)代入方程(16.1.3)，可使之成为恒等

式。令方程(16.1.1)的初始条件为

$$x_s(0)=x_{s0} \qquad (s=1,2,\cdots,n) \tag{16.1.5}$$

将式(16.1.5)代入式(16.1.4)，可将一个常数 C_1，用 x_{s0} 和 $C_i(i=2,3,\cdots,n)$ 表示出。于是，式(16.1.4)可写成形成

$$x_1=u(t,x_i,x_{s0},C_i) \tag{16.1.6}$$

下面证明，一阶常微分方程组(16.1.1)的初值问题的解可由式(16.1.6)以及$(n-1)$个代数方程

$$\frac{\partial u}{\partial C_i}=0 \qquad (i=2,3,\cdots,n) \tag{16.1.7}$$

来确定。这里要求行列式

$$\det\left(\frac{\partial^2 u}{\partial C_i \partial x_j}\right)$$

在 x_j 和 $C_i(i,j=2,3,\cdots,n)$ 的相关域上处处不为零。

将式(16.1.7)对 t 求导数，得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial C_i \partial t}+\sum_{j=2}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial C_i \partial x_j}\dot{x}_j=0 \tag{16.1.8}$$

将式(16.1.6)代入式(16.1.3)中，便得到一个恒等式。将这个恒等式对 C_i 求偏导数，得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial C_i \partial t}+\sum_{j=2}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial C_i \partial x_j}X_j+\left(\sum_{j=2}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial X_j}{\partial u}-\frac{\partial X_1}{\partial u}\right)\frac{\partial u}{\partial C_i}=0 \tag{16.1.9}$$

因

$$\frac{\partial u}{\partial C_i}=0$$

将式(16.1.8)与式(16.1.9)相减，得

$$\sum_{j=2}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial C_i \partial x_j}(\dot{x}_j-X_j)=0 \tag{16.1.10}$$

由此得

$$\dot{x}_j=X_j \qquad (j=2,3,\cdots,n)$$

这就证明了方程(16.1.1)的后面$(n-1)$个方程对任意常数 C_j 恒满足。

下面证明第一个方程也满足。实际上，将(16.1.6)对时间 t 求导数，并考虑到方程(16.1.1)后面$(n-1)$个方程，得

$$\dot{x}_1=\frac{\partial u}{\partial t}+\sum_{j=2}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_j}X_j \tag{16.1.11}$$

因为式(16.1.6)是基本偏微分方程的完全积分，故有

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\sum_{j=2}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_j}X_j-X_1=0 \tag{16.1.12}$$

将式(16.1.11)代入式(16.1.12)，最终得到

$$\dot{x}_1 = X_1$$

即方程(16.1.1)的第一个方程也满足。

这样,只要能求出基本偏微分方程(16.1.3)的完全积分,便可由式(16.1.7)和式(16.1.6)求出方程(16.1.1)相应的解。

16.1.2 应用

例:考虑 Euler 方程

$$t^2\ddot{x} - (a+b)t\dot{x} + abx = 0$$

$$x(1)=\alpha, \quad \dot{x}(1)=\beta, \quad 1\leqslant t<\infty, \quad a\neq b$$

其中 a,b,α,β 是给定参数。试用场方法求解[1]。

解:取场动量 $p=t\dot{x}$,方程可表示为两个一阶方程

$$t\dot{x}=p, \quad t\dot{p}=p(a+b)-abx$$

令

$$p=u(t,x)$$

基本偏微分方程(16.1.3)给出

$$t\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}-u(a+b)+abx=0$$

令完全积分有形式

$$u=f_1(t)x+f_2(t)$$

将其代入方程,比较含 x 的项和自由项,得到

$$t\dot{f}_1+(f_1-a)(f_1-b)=0, \quad t\dot{f}_2+f_2[f_1-(a+b)]=0$$

由此解得

$$f_1=\frac{Cat^a-bt^b}{Ct^a-t^b}, \quad f_2=\frac{Dt^{a+b}}{Ct^a-t^b}$$

其中 C,D 为任意常数。于是有

$$p=u(t,x)=x\frac{Cat^a-bt^b}{Ct^a-t^b}+\frac{Dt^{a+b}}{Ct^a-t^b}$$

将初始条件 $x(1)=\alpha,\dot{x}(1)=\beta$ 代入上式,将常数 D 表示为 α,β 和 C 的函数,然后代入 p 中,得

$$p=u(t,x)=x\frac{Cat^a-bt^b}{Ct^a-t^b}+\frac{C(\beta-\alpha a)+\alpha b-\beta}{Ct^a-t^b}t^{a+b}$$

式(16.1.7)给出

$$\frac{\partial u}{\partial C}=\frac{t^{a+b}}{(Ct^a-t^b)^2}[x(b-a)-(\beta-\alpha a)t^b-(\alpha b-\beta)t^a]=0$$

由此得

$$x=\frac{(\alpha b-\beta)t^a+(\beta-\alpha a)t^b}{b-a}$$

还可求得 p，有

$$p=\frac{a(\alpha b-\beta)t^a+b(\beta-\alpha a)t^b}{b-a}$$

§16.2 完整系统的场方法

本节讨论完整系统的场方法，包括系统的运动微分方程，以及场方法的应用。

16.2.1 运动微分方程

完整系统的 Lagrange 方程表示为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial T}{\partial q_s}=Q_s \qquad (s=1,2,\cdots,n) \tag{16.2.1}$$

将其表示为显式，得

$$\sum_{k=1}^{n}A_{sk}\ddot{q}_k+\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}[k,m;s]\dot{q}_k\dot{q}_m+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial A_{sk}}{\partial t}\dot{q}_k+\frac{\partial B_s}{\partial t}-\Gamma_s-\frac{\partial T_0}{\partial q_s}=Q_s$$
$$(s=1,2,\cdots,n) \tag{16.2.2}$$

其中

$$A_{sk}=\sum_{i=1}^{N}m_i\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_s}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k},\qquad B_s=\sum_{i=1}^{N}m_i\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_s}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t}$$
$$\Gamma_s=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial B_k}{\partial q_s}-\frac{\partial B_s}{\partial q_k}\right)\dot{q}_k,\qquad T_0=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}m_i\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t}$$
$$[k,m;s]=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial A_{ks}}{\partial q_m}+\frac{\partial A_{ms}}{\partial q_k}-\frac{\partial A_{km}}{\partial q_s}\right) \tag{16.2.3}$$

设系统非奇异，即设

$$\det(A_{sk})\neq 0 \tag{16.2.4}$$

则由方程(16.2.2)可解出所有广义加速度，简记作

$$\ddot{q}_s=g_s(t,q_k,\dot{q}_k) \qquad (s,k=1,2,\cdots,n) \tag{16.2.5}$$

令

$$x_s=q_s,\qquad x_{n+s}=\dot{q}_s \qquad (s=1,2,\cdots,n) \tag{16.2.6}$$

则方程(16.2.5)表示为一阶形式

$$\dot{x}_s=x_{n+s},\qquad \dot{x}_{n+s}=g_s(t,x_k,x_{n+k}) \qquad (s,k=1,2,\cdots,n) \tag{16.2.7}$$

16.2.2 场方法的应用

令

$$x_1=u(t,x_A) \qquad (A=2,3,\cdots,2n) \tag{16.2.8}$$

基本偏微分方程(16.1.3)给出

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\sum_{a=2}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_a}x_{n+a}+\sum_{b=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_{n+b}}g_b(t,u,x_A)-x_{n+1}=0 \tag{16.2.9}$$

方程(16.2.9)的完全积分表示为形式

$$x_1=u(t,x_A,C_\alpha) \qquad (A=2,3,\cdots,2n;\alpha=1,2,\cdots,2n) \tag{16.2.10}$$

令运动的初始条件

$$x_\alpha(0)=x_{\alpha0} \qquad (\alpha=1,2,\cdots,2n) \tag{16.2.11}$$

将式(16.2.11)代入式(16.2.10)中,可将一个常数,例如 C_1,用 $x_{\alpha0}$ 和其余 C_A 表示出。这样,式(16.2.10)可写成

$$x_1=u(t,x_A,x_{\alpha0},C_A) \tag{16.2.12}$$

于是有

$$\frac{\partial u}{\partial C_A}=0 \qquad (A=2,3,\cdots,2n) \tag{16.2.13}$$

这里要求

$$\det\left(\frac{\partial^2 u}{\partial C_A\partial x_B}\right)\neq 0$$

方程的解由式(16.2.13)和式(16.2.12)来确定。

下面研究 Whittaker 方程的场方法。

问题的 Lagrange 函数和广义力分别为

$$L=\frac{1}{2}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2)+\frac{1}{2}q_1^2, \qquad Q_1=0,Q_2=\dot{q}_1 \tag{16.2.14}$$

微分方程为

$$\ddot{q}_1=q_1,\ddot{q}_2=\dot{q}_1$$

令

$$x_1=q_1,x_2=q_2,x_3=\dot{q}_1,x_4=\dot{q}_2$$

则方程表示为 4 个一阶方程

$$\dot{x}_1=x_3,\dot{x}_2=x_4,\dot{x}_3=x_1,\dot{x}_4=x_3$$

令

$$x_2=u(t,x_1,x_3,x_4)$$

则基本偏微分方程(16.1.3)给出

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x_1}x_3+\frac{\partial u}{\partial x_3}x_1+\frac{\partial u}{\partial x_4}x_3-x_4=0$$

令其完全积分有形式

$$x_2=u=f_1(t)+f_2(t)x_1+f_3(t)x_3+f_4(t)x_4$$

将其代入方程,分出自由项,以及含 x_1,x_3 和 x_4 的项,得到

$$\dot{f}_1=0,\dot{f}_2+f_3=0,\dot{f}_3+f_2+f_4=0,\dot{f}_4-1=0$$

积分得

$$f_1=C_1,f_2=C_2\exp t+C_3\exp(-t)-t-C_4$$
$$f_3=-C_2\exp t+C_3\exp(-t)+1,f_4=t+C_4$$

于是有

$$x_2=u=C_1+\{C_2\exp t+C_3\exp(-t)-t-C_4\}x_1+$$
$$\{-C_2\exp t+C_3\exp(-t)+1\}x_3+(t+C_4)x_4$$

令初始条件为

$$t=0,x_s=x_{s0}\qquad(s=1,2,3,4)$$

将其代入 u 中并消去 C_1，得

$$x_2=u=x_{20}-(C_2+C_3-C_4)x_{10}-(-C_2+C_3+1)x_{30}-C_4x_{40}+$$
$$\{C_2\exp t+C_3\exp(-t)-t-C_4\}x_1+$$
$$\{-C_2\exp t+C_3\exp(-t)+1\}x_3+(t+C_4)x_4$$

式(16.1.7)给出

$$0=\frac{\partial u}{\partial C_2}=-x_{10}+x_{30}+x_1\exp t-x_3\exp t$$

$$0=\frac{\partial u}{\partial C_3}=-x_{10}-x_{30}+x_1\exp(-t)+x_3\exp(-t)$$

$$0=\frac{\partial u}{\partial C_4}=x_{10}-x_{40}-x_1+x_4$$

由此解得[5]

$$x_1=\frac{1}{2}\{(x_{10}-x_{30})\exp(-t)+(x_{10}+x_{30})\exp t\}$$

$$x_3=\frac{1}{2}\{(x_{10}+x_{30})\exp t-(x_{10}-x_{30})\exp(-t)\}$$

$$x_4=\frac{1}{2}\{(x_{10}-x_{30})\exp(-t)+(x_{10}+x_{30})\exp t\}+x_{40}-x_{10}$$

将其代入 u 中，得

$$x_2=x_{20}+t(x_{40}-x_{10})-x_{30}+\frac{1}{2}\{(x_{10}+x_{30})\exp t-(x_{10}-x_{30})\exp(-t)\}$$

§ 16.3 非完整系统的场方法

本节讨论非完整力学系统的场方法，包括系统的运动微分方程，以及场方法的应用。

16.3.1 运动微分方程

非完整系统的运动微分方程有多种形式[6]。这里介绍其中的两种，一种是带乘子的 Lagrange 方程，另一种是 Чаплыгин 方程。

首先，将力学系统的运动微分方程表示为带乘子的形式。设力学系统的位形由 n 个广义坐标 $q_s(s=1,2,\cdots,n)$ 来确定，它的运动受有 g 个双面理想 Четаев 型非完整约束

$$f_\beta(t,q_s,\dot{q}_s)=0 \qquad (\beta=1,2,\cdots,g;s=1,2,\cdots,n) \qquad (16.3.1)$$

系统的运动方程可表示为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial T}{\partial q_s}=Q_s+\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s} \qquad (s=1,2,\cdots,n) \qquad (16.3.2)$$

其中 λ_β 为待定乘子，或约束乘子。在运动微分方程积分之前，可由方程(16.3.1)和(16.3.2)解出 λ_β 作为 $t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}$ 的函数[6]。将所得 λ_β 代入方程(16.3.2)，在非奇异假设下，可解出所有广义加速度，简记作

$$\ddot{q}_s=g_s(t,q_k,\dot{q}_k) \qquad (s,k=1,2,\cdots,n) \qquad (16.3.3)$$

将方程(16.3.3)当作某个完整系统，称为与非完整系统(16.3.1)，(16.3.2)相应的完整系统。文献[7]证明，非完整系统的运动可在相应完整系统(16.3.3)的解中找到，只要运动的初始条件满足非完整约束方程(16.3.1)，即满足

$$f_\beta(t_0,q_{s0},\dot{q}_{s0})=0 \qquad (\beta=1,2,\cdots,g;s=1,2,\cdots,n) \qquad (16.3.4)$$

这样，为求非完整系统的解，可先求相应完整系统(16.3.3)的解，再在限制(16.3.4)下找到非完整系统的运动。为应用场方法，需将方程(16.3.3)表示为一阶形式，可有多种办法，例如，令

$$x_s=q_s,x_{n+s}=\dot{q}_s \qquad (s=1,2,\cdots,n) \qquad (16.3.5)$$

则方程(16.3.3)可表示为

$$\dot{x}_s=x_{n+s},\dot{x}_{n+s}=g_s(t,x_k,x_{n+k}) \qquad (16.3.6)$$

这样，就可按场方法的通常步骤来求解。

其次，将运动方程表示为不带乘子的形式。假设非完整约束方程有形式

$$\dot{q}_{\varepsilon+\beta}=\varphi_\beta(t,q_\sigma,\dot{q}_\sigma) \qquad (\beta=1,2,\cdots,g;\varepsilon=n-g;\sigma=1,2,\cdots,\varepsilon) \qquad (16.3.7)$$

并设系统的广义力有势，且动能和势能都不含 $q_{\varepsilon+\beta}(\beta=1,2,\cdots,g)$，则运动方程可表示为 Чаплыгин 形式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\widetilde{L}}{\partial\dot{q}_\sigma}-\frac{\partial\widetilde{L}}{\partial q_\sigma}-\sum_{\beta=1}^{g}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_{\varepsilon+\beta}}\right)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial\dot{q}_\sigma}-\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial q_\sigma}\right)=0 \qquad (\sigma=1,2,\cdots,\varepsilon) \qquad (16.3.8)$$

其中 $\widetilde{L}(t,q_\sigma,\dot{q}_\sigma)=L(t,q_\sigma,\dot{q}_\sigma,\varphi_\beta(t,q_\sigma,\dot{q}_\sigma))$ 为嵌入约束后的 Lagrange 函数，$\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_{\varepsilon+\beta}}\right)$ 为 $\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_{\varepsilon+\beta}}$ 中 $\dot{q}_{\varepsilon+\beta}$ 用式(16.3.7)替代所得表达式。式(16.3.7)，(16.3.8)构成 Чаплыин 系统。由方程(16.3.8)看出，它是关于 $q_\sigma(\sigma=1,2,\cdots,\varepsilon)$ 的二阶微分方程组，不含 $q_{\varepsilon+\beta}$ 和 $\dot{q}_{\varepsilon+\beta}$。因此，可先求出方程(16.3.8)的解 $q_\sigma=q_\sigma(t,q_{\nu 0},\dot{q}_{\nu 0})$，$(\sigma,\nu=1,2,\cdots,\varepsilon)$，然后将其代入式(16.3.7)并积分求得 $q_{\varepsilon+\beta}=q_{\varepsilon+\beta}(t,q_{s0},\dot{q}_{\sigma 0})$，其中有 $(2\varepsilon+g)$ 个任意常数 $q_{\sigma 0},\dot{q}_{\sigma 0},(q_{\varepsilon+\beta})_0$。而 $(\dot{q}_{\varepsilon+\beta})_0$ 应满足约束方程(16.3.7)，即

$$(\dot{q}_{\epsilon+\beta})_0=\varphi_\beta(t_0,q_{\sigma 0},\dot{q}_{\sigma 0}) \tag{16.3.9}$$

设由方程(16.3.8)可解出广义加速度 $\ddot{q}_\sigma$，记作

$$\ddot{q}_\sigma=g_\sigma(t,q_\nu,\dot{q}_\nu) \qquad (\sigma,\nu=1,2,\cdots,\epsilon) \tag{16.3.10}$$

令

$$x_\sigma=q_\sigma,x_{\epsilon+\sigma}=\dot{q}_\sigma \tag{16.3.11}$$

则有

$$\dot{x}_\sigma=x_{\epsilon+\sigma},\dot{x}_{\epsilon+\sigma}=g_\sigma(t,x_\nu,x_{\epsilon+\nu}) \tag{16.3.12}$$

这样，就可利用场方法来求解。

16.3.2 应用举例

例 1 Новосёлов 例。

Новосёлов 给出的非完整系统的例子如下[7]。

系统的 Lagrange 函数为

$$L=\frac{1}{2}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2) \tag{16.3.13}$$

约束方程为

$$f=\dot{q}_1+bt\dot{q}_2-bq_2+t=0 \qquad (b=\text{const.}) \tag{16.3.14}$$

试用场方法求其解。

解：首先，给出相应完整系统的解。方程(16.3.2)给出

$$\ddot{q}_1=\lambda,\ddot{q}_2=\lambda bt$$

容易计算得

$$\lambda=-\frac{1}{1+b^2t^2}$$

相应完整系统的方程为

$$\ddot{q}_1=-\frac{1}{1+b^2t^2},\ddot{q}_2=-\frac{bt}{1+b^2t^2}$$

令

$$x_1=q_1,x_2=q_2,x_3=\dot{q}_1,x_4=\dot{q}_2$$

则有

$$\dot{x}_1=x_3,\dot{x}_2=x_4,\dot{x}_3=-\frac{1}{1+b^2t^2},\dot{x}_4=-\frac{bt}{1+b^2t^2}$$

令

$$x_1=u(t,x_2,x_3,x_4)$$

基本偏微分方程(16.1.3)给出

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x_2}x_4+\frac{\partial u}{\partial x_3}\left(-\frac{1}{1+b^2t^2}\right)+\frac{\partial u}{\partial x_4}\left(-\frac{bt}{1+b^2t^2}\right)-x_3=0$$

令其完全积分有形式

$$x_1=u=f_1(t)+f_2(t)x_2+f_3(t)x_3+f_4(t)x_4$$

将其代入方程,并比较自由项,以及含 x_2,x_3 和 x_4 的项,得到

$$\dot{f}_1-\frac{f_3}{1+b^2t^2}-\frac{btf_4}{1+b^2t^2}=0,\dot{f}_2=0,\dot{f}_3-1=0,\dot{f}_4+f_2=0$$

对其积分,得

$$f_1=C_1+C_2\left(\frac{1}{b^2}\arctan bt-\frac{t}{b}\right)+\frac{C_3}{b}\arctan bt+\frac{C_4}{2b}\ln(1+b^2t^2)+\frac{1}{2b^2}\ln(1+b^2t^2)$$

$$f_2=C_2,f_3=C_3+t,f_4=C_4-C_2t$$

令运动的初始条件为

$$x_\alpha(0)=x_{\alpha 0}\qquad(\alpha=1,2,3,4)$$

将其代入 x_1,并消去常数 C_1 后,有

$$x_1=u=(x_{10}-C_2x_{20}-C_3x_{30}-C_4x_{40})+C_2\left(\frac{1}{b^2}\arctan bt-\frac{t}{b}\right)+$$

$$\frac{C_3}{b}\arctan bt+\frac{C_4}{2b}\ln(1+b^2t^2)+\frac{1}{2b^2}\ln(1+b^2t^2)$$

关系(16.1.7)给出

$$\frac{\partial u}{\partial C_2}=0,\frac{\partial u}{\partial C_3}=0,\frac{\partial u}{\partial C_4}=0$$

即

$$-x_{20}+\frac{1}{b^2}\arctan bt-\frac{t}{b}+x_2-tx_4=0$$

$$-x_{30}+\frac{1}{b}\arctan bt+x_3=0$$

$$-x_{40}+\frac{1}{2b}\ln(1+b^2t^2)+x_4=0$$

由此解得

$$x_2=x_{20}+x_{40}t+\frac{t}{b}-\frac{1}{b^2}\arctan bt-\frac{t}{2b}\ln(1+b^2t^2)$$

$$x_3=x_{30}-\frac{1}{b}\arctan bt$$

$$x_4=x_{40}-\frac{1}{2b}\ln(1+b^2t^2)$$

(16.3.15)

代入 x_1，得

$$x_1=x_{10}+x_{30}t+\frac{1}{2b^2}\ln(1+b^2t^2)-\frac{t}{b}\arctan bt \quad (16.3.16)$$

式(16.3.15)，(16.3.16)就是相应完整系统的解。

其次，求非完整系统的解。非完整约束(16.3.14)对初始条件的限制给出

$$x_{30}-bx_{40}=0 \quad (16.3.17)$$

式(16.3.15)～(16.3.17)是非完整系统的解。

例 6 Appell-Hamel 例。

Appell-Hamel 例的 Lagrange 函数和非完整约束分别为

$$L=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)-mgz,\dot{z}=\frac{b}{a}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{\frac{1}{2}} \quad (16.3.18)$$

试用场方法求解[8]。

解:令

$$q_1=z,q_2=x,q_3=y \quad (16.3.19)$$

则

$$L=\frac{1}{2}m(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2+\dot{q}_3^2)-mgq_1,\dot{q}_3=\left(\frac{a^2}{b^2}\dot{q}_1^2-\dot{q}_2^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

首先，建立 Чаплыгин 方程。方程(16.3.8)给出

$$m\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)\ddot{q}_1+mg-m\left(\frac{a^2}{b^2}\dot{q}_1^2-\dot{q}_2^2\right)^{\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{a^2}{b^2}\dot{q}_1\left(\frac{a^2}{b^2}\dot{q}_1^2-\dot{q}_2^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right]=0$$

$$-m\left(\frac{a^2}{b^2}\dot{q}_1^2-\dot{q}_2^2\right)^{\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[-\dot{q}_2\left(\frac{a^2}{b^2}\dot{q}_1^2-\dot{q}_2^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right]=0$$

由此解得

$$\ddot{q}_1=-\frac{g}{1+\frac{a^2}{b^2}},\ddot{q}_2=-\frac{g\dot{q}_2}{\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)\dot{q}_1}$$

这里设 $\dot{q}_3\neq0$。令

$$x_1=q_1,x_2=q_2,x_3=\dot{q}_1,x_4=\dot{q}_2$$

则方程表示为

$$\dot{x}_1=x_3,\dot{x}_2=x_4,\dot{x}_3=-\frac{g}{1+\frac{a^2}{b^2}},\dot{x}_4=-\frac{gx_4}{\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)x_3}$$

其次，建立基本偏微分方程并求解。令

$$x_3=u(t,x_1,x_2,x_4)$$

基本偏微分方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x_1}u+\frac{\partial u}{\partial x_2}x_4+\frac{\partial u}{\partial x_4}\left[-\frac{gx_4}{\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)x_3}\right]+\frac{g}{1+\frac{a^2}{b^2}}=0$$

注意到

$$x_4=Ax_3,A=\frac{x_{40}}{x_{30}}$$

则有

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}u+\frac{\partial u}{\partial x_2}Au+\frac{\partial u}{\partial x_4}\left(-\frac{gA}{1+\frac{a^2}{b^2}}\right)+\frac{g}{1+\frac{a^2}{b^2}}=0$$

令其完全积分为

$$x_3=u=f_1(t)+f_2(t)x_1+f_3(t)x_2+f_4(t)x_4$$

代入方程,并比较自由项,以及含 x_1,x_2 和 x_4 的项,得到

$$\dot f_1+f_1(f_2+f_3A)+\frac{g}{1+\frac{a^2}{b^2}}(1-f_4A)=0$$

$$\dot f_2+f_2(f_2+f_3A)=0,\dot f_3+f_3(f_2+f_3A)=0$$

$$\dot f_4+f_4(f_2+f_3A)=0$$

积分得

$$f_1=\frac{1}{1+(C_2+C_3A)t}\left\{C_1-\frac{g}{1+\frac{a^2}{b^2}}(1-C_4A)\left[t+\frac{1}{2}(C_2+C_3A)t^2\right]\right\}$$

$$f_2=\frac{C_2}{1+(C_2+C_3A)t},f_3=\frac{C_3}{1+(C_2+C_3A)t},f_4=\frac{C_4}{1+(C_2+C_3A)t}$$

于是有

$$x_3=u=\frac{1}{1+(C_2+C_3A)t}\left\{C_1-\frac{g}{1+\frac{a^2}{b^2}}(1-C_4A)\left[t+\frac{1}{2}(C_2+C_3A)t^2\right]^2+\right.$$

$$\left.C_2x_1+C_3x_2+C_4x_4\right\}$$

令运动的初始条件为 $x_\alpha(0)=x_{\alpha0}(\alpha=1,2,3,4)$,将其代入上式可求出

$$C_1 = x_{30} - C_2 x_{10} - C_3 x_{20} - C_4 x_{40}$$

于是

$$x_3 = u = \frac{1}{1+(C_2+C_3 A)t}\left\{x_{30} - C_2 x_{10} - C_3 x_{20} - C_4 x_{40} - \frac{g}{1+\frac{a^2}{b^2}}(1-C_4 A)\left[t+\frac{1}{2}(C_2+C_3 A)t^2\right] + C_2 x_1 + C_3 x_2 + C_4 x_4\right\} \tag{16.3.20}$$

再次，式(16.1.17)给出

$$\frac{\partial u}{\partial C_A} = 0 \qquad (A=2,3,4)$$

由此解出 x_1, x_2, x_4，并利用初始条件消去常数 C_2, C_3, C_4，知可取 $C_2 = C_3 = C_4 = 0$，得

$$\begin{aligned} x_1 &= x_{10} + x_{30} t - \frac{g t^2}{2\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)} \\ x_2 &= x_{20} + x_{40} t - \frac{g x_{40} t^2}{2\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right) x_{30}} \\ x_4 &= x_{40} - \frac{g x_{40} t}{\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right) x_{30}} \end{aligned} \tag{16.3.21}$$

代入 u，得

$$x_3 = x_{30} - \frac{g t}{1+\frac{a^2}{b^2}} \tag{16.3.22}$$

最后，求 $q_3 = y$，将式(16.3.21)返回到广义坐标并代入约束方程，得

$$\dot{q}_3 = \left(\frac{a^2}{b^2} - \frac{x_{40}^2}{x_{30}^2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(x_{30} - \frac{g t}{1+\frac{a^2}{b^2}}\right)$$

对其积分，得

$$q_3 = q_{30} + \left(\frac{a^2}{b^2} - \frac{x_{40}^2}{x_{30}^2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(x_{30} t - \frac{g t^2}{2\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)}\right) \tag{16.3.23}$$

场方法也可应用于积分高阶非完整系统的运动方程[9]。

§ 16.4 Birkhoff 系统的场方法

本节讨论 Birkhoff 系统以及广义 Birkhoff 系统的场方法，包括运动微分方程，以及场方法的应用。

16.4.1 运动微分方程

Birkhoff 方程表示为

$$\dot{a}^{\mu}=\sum_{\nu=1}^{2n}\Omega^{\mu\nu}\left(\frac{\partial B}{\partial a^{\nu}}+\frac{\partial R_{\nu}}{\partial t}\right)\qquad(\mu=1,2,\cdots,2n)\tag{16.4.1}$$

广义 Birkhoff 方程表示为

$$\dot{a}^{\mu}=\sum_{\nu=1}^{2n}\Omega^{\mu\nu}\left(\frac{\partial B}{\partial a^{\nu}}+\frac{\partial R_{\nu}}{\partial t}-\Lambda_{\nu}\right)\qquad(\mu=1,2,\cdots,2n)\tag{16.4.2}$$

令

$$x_i=a^i\qquad(i=1,2,\cdots,2n)$$

则方程表示为

$$\dot{x}_i=F_i(t,x_j)\qquad(i,j=1,2,\cdots,2n)\tag{16.4.3}$$

对方程(16.4.1)，有

$$F_i(t,x_j)=\sum_{j=1}^{2n}\Omega^{ij}\left(\frac{\partial B}{\partial x_j}+\frac{\partial R_j}{\partial t}\right)\tag{16.4.4}$$

对方程(16.4.2)，有

$$F_i(t,x_j)=\sum_{j=1}^{2n}\Omega^{ij}\left(\frac{\partial B}{\partial x_j}+\frac{\partial R_j}{\partial t}-\Lambda_j\right)\tag{16.4.5}$$

令

$$x_1=u(t,x_A)\qquad(A=2,3,\cdots,2n)\tag{16.4.6}$$

则基本偏微分方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\sum_{A=2}^{2n}\frac{\partial u}{\partial x_A}F_A(t,u,x_B)-F_1(t,u,x_A)=0\tag{16.4.7}$$

这样，就可用场方法来求解了。

16.4.2 应用举例

例 1 广义 Birkhoff 系统为

$$R_1=a^2,R_2=0,B=\frac{1}{2}(a^2)^2,\Lambda_1=t^{-1}a^2,\Lambda_2=0$$

试用场方法求解。

解：微分方程为

$$\dot{a}^1=a^2,\dot{a}^2=t^{-1}a^2$$

令

$$x_1=a^1, x_2=a^2$$

则

$$\dot{x}_1=x_2, \dot{x}_2=t^{-1}x_2$$

令

$$x_1=u=f_0(t)+f_2(t)x_2$$

基本偏微分方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x_2}(t^{-1}x_2)-x_2=0$$

即

$$\dot{f}_0+\dot{f}_2x_2+f_2(t^{-1}x_2)-x_2=0$$

分出自由项、含 x_2 的项,有

$$\dot{f}_0=0, \dot{f}_2+f_2t^{-1}-1=0$$

积分得

$$f_0=C_0, f_2=\frac{1}{2}t-C_2t^{-1}$$

于是

$$x_1=u=C_0+\left(\frac{1}{2}t-C_2t^{-1}\right)x_2$$

令运动初始条件为

$$t=t_0, x_1=x_{10}, x_2=x_{20}$$

则

$$C_0=x_{10}-x_{20}\left(\frac{1}{2}t_0-C_2t_0^{-1}\right)$$

于是有

$$x_1=u=x_{10}-x_{20}\left(\frac{1}{2}t_0-C_2t_0^{-1}\right)+\left(\frac{1}{2}t-C_2t^{-1}\right)x_2$$

$$0=\frac{\partial u}{\partial C_2}=x_{20}t_0^{-1}-x_2t^{-1}$$

因此有

$$x_2=x_{20}t_0^{-1}t$$

代入 u,得

$$x_1=x_{10}-\frac{1}{2}x_{20}t_0+\frac{1}{2}x_{20}t_0^{-1}t^2$$

例 4 广义 Birkhoff 系统为

$$R_1=a^2+a^3,R_2=0,R_3=a^4,R_4=0,B=-\frac{1}{2}(a^4)^2$$
$$\Lambda_1=0,\Lambda_2=-a^3,\Lambda_3=-a^2-a^3,\Lambda_4=0 \tag{16.4.8}$$

试用场方法求解。

解:微分方程为

$$-\dot{a}^2-\dot{a}^3=0,\dot{a}^1=a^3,\dot{a}^1-\dot{a}^4=a^2+a^3,\dot{a}^3=a^4$$

整理得

$$\dot{a}^1=a^3,\dot{a}^2=a^4,\dot{a}^3=-a^4,\dot{a}^4=-a^2$$

令

$$x_i=a^i \qquad (i=1,2,3,4)$$

则有

$$\dot{x}_1=x_3,\dot{x}_2=x_4,\dot{x}_3=-x_4,\dot{x}_4=-x_2$$

令

$$x_1=u(t,x_2,x_3,x_4)$$

则基本偏微分方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x_2}x_4+\frac{\partial u}{\partial x_3}(-x_4)+\frac{\partial u}{\partial x_4}(-x_2)-x_3=0$$

设其完全积分有形式

$$x_1=u=f_0(t)+f_2(t)x_2+f_3(t)x_3+f_4(t)x_4$$

将其代入基本偏微分方程,比较自由项,以及含 x_2,x_3 和 x_4 的项,得到

$$\dot{f}_0=0,\dot{f}_2-f_4=0,\dot{f}_3-1=0,\dot{f}_4+f_2-f_3=0$$

积分得

$$f_0=C_0,f_2=-C_2\cos t+C_4\sin t+t+C_3,f_3=t+C_3$$
$$f_4=C_2\sin t+C_4\cos t+1$$

于是

$$x_1=u=C_0+(-C_2\cos t+C_4\sin t+t+C_3)x_2+(t+C_3)x_3+$$
$$(C_2\sin t+C_4\cos t+1)x_4$$

令运动的初始条件为

$$t=0,x_\alpha=x_{\alpha0} \qquad (\alpha=1,2,3,4)$$

将其代入 u,可求得

$$C_0=x_{10}+C_2x_{20}-C_3x_{20}-C_3x_{30}-(C_4+1)x_{40}$$

这样，u 可写成

$$x_1=u=x_{10}+(C_2-C_3)x_{20}-C_3x_{30}-(C_4+1)x_{40}+$$
$$(-C_2\cos t+C_4\sin t+t+C_3)x_2+(t+C_3)x_3+$$
$$(C_2\sin t+C_4\cos t+1)x_4$$

场方法给出

$$0=\frac{\partial u}{\partial C_2}=x_{20}-x_2\cos t+x_4\sin t$$

$$0=\frac{\partial u}{\partial C_3}=-x_{30}+x_3+x_2-x_{20}$$

$$0=\frac{\partial u}{\partial C_4}=-x_{40}+x_2\sin t+x_4\cos t$$

代入 u 中，得

$$x_1=u=x_4+(x_2+x_3)t-x_{40}+x_{10}$$

本章讨论的场方法，最初是为积分非保守力学系统运动方程提出的，后来被推广到积分一般的常微分方程。场方法的优点有：①通用性：对任何一阶微分方程组都可应用，它没有 Hamilton-Jacobi 方法那样的限制；②灵活性：可选任意场变量，场变量选得好，可使基本偏微分方程更容易求解。场方法的主要困难在于求基本偏微分方程的完全积分。只要能找到完全积分，剩下的就是解代数方程了。

第 16～22 章研究各类约束力学系统的积分方法，包括场方法、势积分方法、Jacobi 乘子法、Noether 对称性方法、Lie 对称性方法、形式不变性方法、Lagrange对称性和 Birkhoff 对称性等。

思考题

16.1 试分析场积分方法的优缺点。

16.2 场积分方法与 Hamilton-Jacobi 方法都是将常微分方程的积分归结为求偏微分方程的完全积分。试比较它们的适用范围、难易程度。

16.3 对广义 Hamilton 系统，能否应用场积分方法？

习题

16.1 单自由度系统为

$$L=\frac{1}{2}\dot{q}^2+\frac{1}{2}bcq^2 \qquad (b>0,c>0)$$

试用场方法求解。

16.2 二自由度系统为

$$L=\frac{1}{2}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2)-\frac{1}{2}q_2^2, Q_1=-\dot{q}_2, Q_2=0$$

试用场方法求解。

16.3 单自由度系统为

$$L=\frac{1}{2}(\dot{q}^2+q^2), Q=\dot{q}$$

试用场方法求解。

16.4 广义 Birkhoff 系统为

$$R_1=a^2, R_2=0, B=\frac{1}{2}(a^2)^2, \Lambda_1=-2a^2+4\exp t, \Lambda_2=0$$

试用场方法求解。

参考文献

[1]Vujanović B. A field method and its application to the theory of vibrations [J]. Int J of Non-Linear Mech. ,1984,19:383-396.

[2]Vujanović B. On a gradient method in nonconservative mechanics[J]. Acta Mech,1979,34:167-179.

[3]Vujanović B. On the integration of the nonconservative Hamilton's dynamical equations[J]. Int. J of Engin Sci,1981,19:1739-1947.

[4]Vujanović B, Strauss AM. Applications of a field method to the theory of vibrations[J]. J of Sound and Vibration,1987,114:375-387.

[5]葛伟宽. Whittaker 方程的场方法[J]. 物理学报,2006,55(1):10-12.

[6]梅凤翔. 非完整系统力学基础[M]. 北京:北京工业学院出版社,1985.

[7]Новосёлов ВС. Вариационные Методы в Механике[M]. Ленинград:ЛГУ,1966.

[8]梅凤翔,刘端,罗勇,高等分析力学[M]. 北京:北京理工大学出版社,1991.

[9]Мэй Фун-сян. Об одном методе интегрирования уравнений движения неголономных систем со связями высшего порядка[J]. ПММ,1991,54:691-695.

17

势积分方法

苏联学者 Аржаных ИС 在 1965 年出版专著《冲量场》[1]，书中第二章标题是**势积分方法**，包括非完整系统、完整系统、势积分方法对非完整保守系统可应用的条件、Hamilton-Jacobi 定理的推广等。最后，Аржаных 给出势积分方法对任意微分方程组的推广。本章讨论各类约束力学系统的势积分方法，包括势积分方法介绍、完整系统的势积分方法、非完整系统的势积分方法、Birkhoff 系统的势积分方法等。

§17.1 势积分方法介绍

本节介绍势积分方法的基本结果及其简单应用。

17.1.1 势积分方法

研究一阶微分方程组

$$\dot{x}_i = F_i(t, x_j) \qquad (i,j=1,2,\cdots,n) \tag{17.1.1}$$

将其解表示为

$$x_i = \frac{\partial \psi}{\partial p_i} \qquad (i=1,2,\cdots,n) \tag{17.1.2}$$

其中 $\psi(t, p_i, a_i)$ 是一阶偏微分方程

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \sum_{j=1}^{n} p_j F_j\left(t, \frac{\partial \psi}{\partial p_i}\right) \tag{17.1.3}$$

的完全积分。为将式(17.1.2)表示为 t 的显式，需用其值代替 p_i，这可由下式找到

$$\frac{\partial \psi}{\partial a_i} = b_i \tag{17.1.4}$$

其中 a_i, b_i 为常数。结果有

$$x_i = f_i(t, C_j) \tag{17.1.5}$$

其中 C_i 由 a_j, b_j 确定

$$C_i=\omega_i(a_j, b_j) \tag{17.1.6}$$

下面给出证明。

方程(17.1.1)的积分 φ 满足条件

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}F_k=0 \tag{17.1.7}$$

将其变换到新变量

$$p_i=\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} \tag{17.1.8}$$

由此得到

$$x_i=\frac{\partial\psi}{\partial p_i}$$
$$\psi=-\varphi+\sum_{k=1}^{n}p_k x_k \tag{17.1.9}$$

因此,方程(17.1.7)过渡到方程(17.1.3),组成对 p_i 的微分方程。由式(17.1.8)得

$$\frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial t\partial x_i}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_k\partial x_i}F_k \tag{17.1.10}$$

将式(17.1.7)对 x_i 求偏导数,得

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial t}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial x_k}F_k=-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F_k}{\partial x_i}p_i \tag{17.1.11}$$

比较式(17.1.10)与式(17.1.11),得

$$\frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t}=-\sum_{k=1}^{n}p_k\frac{\partial F_k}{\partial x_i} \tag{17.1.12}$$

然后计算

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\psi}{\partial p_i}=\frac{\partial^2\psi}{\partial t\partial p_i}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2\psi}{\partial p_k\partial p_i}\frac{\mathrm{d}p_k}{\mathrm{d}t}\\&=\frac{\partial^2\psi}{\partial t\partial p_i}-\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2\psi}{\partial q_k\partial p_i}p_j\frac{\partial F_j}{\partial x_k}\end{aligned} \tag{17.1.13}$$

将方程(17.1.3)对 p_i 求偏导数,得

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial p_i\partial t}=F_i+\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}p_k\frac{\partial F_k}{\partial x_j}\frac{\partial^2\psi}{\partial p_i\partial p_j}$$

将其代入式(17.1.13),便得

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}=F_i \tag{17.1.14}$$

即方程(17.1.1)成立。最后,证明式(17.1.4)成立。做计算,有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\psi}{\partial a_i}=\frac{\partial^2\psi}{\partial t\partial a_i}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2\psi}{\partial p_k\partial a_i}\frac{\mathrm{d}p_k}{\mathrm{d}t}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial a_i} - \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 \psi}{\partial p_k \partial a_i} p_j \frac{\partial F_j}{\partial x_k} \\
&= \frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial a_i} - \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial F_j}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial a_i} \\
&= -\frac{\partial}{\partial a^i} \left(-\frac{\partial \psi}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} p_j F_j \right) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{17.1.15}
$$

积分得

$$\frac{\partial \psi}{\partial a_i} = b_i$$

由此确定 p_i，并将其代入式(17.1.2)，可得到依赖于 n 个任意常数的通解。这表明，式(17.1.4)成立[1]。

上述势积分方法的基本思想是将常微分方程的求解问题归结为求一个偏微分方程的完全积分。求解步骤是：首先，按式(17.1.3)组成偏微分方程；其次，求此偏微分方程的完全积分；最后，按式(17.1.4)解出 p_i 并代入式(17.1.2)。应用势积分方法的主要困难在于求方程(17.1.3)的完全积分。

17.1.2 势积分方法的简单应用

文献[1]给出一个简单例子来说明势积分方法的应用步骤。

研究一阶方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x$$

按式(17.1.3)组成偏微分方程

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = p \frac{\partial \psi}{\partial p}$$

可找到它的完全积分

$$\psi = at + a \ln p$$

式(17.1.4)给出

$$b \frac{\partial \psi}{\partial a} = t + \ln p$$

由此解出 p，有

$$p = \exp b \exp(-t)$$

式(17.1.2)给出

$$x = \frac{\partial \psi}{\partial p} = \frac{a}{p} = \frac{a}{\exp b \exp(-t)} = c \exp t$$

其中

$$c = a \exp(-b)$$

§ 17.2 完整系统的势积分方法

本节讨论完整力学系统的势积分方法，包括系统的运动微分方程，以及势积分方法的应用。

17.2.1 系统的运动微分方程

一般完整力学系统的运动方程有形式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial T}{\partial q_s}=Q_s \qquad (s=1,2,\cdots,n) \tag{17.2.1}$$

假设系统非奇异，即设

$$\det\left(\frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_s \partial \dot{q}_k}\right)\neq 0 \tag{17.2.2}$$

则由方程(17.2.1)可求出所有广义加速度，记作

$$\ddot{q}_s=f_s(t,q_k,\dot{q}_k) \qquad (s,k=1,2,\cdots,n) \tag{17.2.3}$$

为应用势积分方法，需将方程化为一阶形式。为此，令

$$x_s=q_s,x_{n+s}=\dot{q}_s \qquad (s=1,2,\cdots,n) \tag{17.2.4}$$

则方程(17.2.3)可化为一阶方程

$$\dot{x}_i=F_i(t,x_j) \qquad (i,j=1,2,\cdots,2n) \tag{17.2.5}$$

其中

$$F_s=x_{n+s},F_{n+s}=f_s(t,x_k,x_{n+k}) \tag{17.2.6}$$

按势积分方法，首先对方程(17.2.5)组建偏微分方程(17.1.3)，有

$$\frac{\partial \psi}{\partial t}=\sum_{j=1}^{2n} p_j F_j\left(t,\frac{\partial \psi}{\partial p_i}\right) \tag{17.2.7}$$

然后求其完全积分，最后，按式(17.1.4)和(17.1.2)得到问题的解。

17.2.2 应用举例

例 1 单自由度系统的 Lagrange 函数为

$$L=\frac{1}{2}\dot{q}^2+\frac{1}{2}bcq^2 \qquad (b>0,c>0)$$

试用势积分方法求解。

解：微分方程为

$$\ddot{q}=bcq$$

令

$$x_1=-bcq,x_2=c\dot{q}$$

则方程化为两个一阶方程

$$\dot{x}_1=-bx_2,\dot{x}_2=-cx_1$$

偏微分方程(17.1.3)给出

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}=p_1\left(-b\frac{\partial\psi}{\partial p_2}\right)+p_2\left(-c\frac{\partial\psi}{\partial p_1}\right)$$

其特征方程为

$$\frac{\mathrm{d}t}{1}=\frac{\mathrm{d}p_1}{cp_2}=\frac{\mathrm{d}p_2}{bp_1}$$

由此可找到一个积分

$$cp_2^2-bp_1^2=h$$

又

$$\mathrm{d}p_1=cp_2\mathrm{d}t=c\sqrt{\frac{h+bp_1^2}{c}}\mathrm{d}t$$

积分得

$$\frac{1}{\sqrt{b}}\ln(\sqrt{h+bp_1^2}+\sqrt{b}p_1)=\sqrt{c}\,t+k$$

其中 k 为任意常数。这个积分还可表示为

$$\frac{1}{\sqrt{b}}\ln(\sqrt{b}p_1+\sqrt{c}p_2)-\sqrt{c}\,t=k$$

有了这两个积分,则完全积分有形式

$$\psi=a_1(cp_2^2-bp_1^2)+a_2\left\{\frac{1}{\sqrt{b}}\ln(\sqrt{b}p_1+\sqrt{c}p_2)-\sqrt{c}\,t\right\}$$

其中 a_1,a_2 为任意常数。式(17.1.4)给出

$$b_1=\frac{\partial\psi}{\partial a_1}=cp_2^2-bp_1^2$$

$$b_2=\frac{\partial\psi}{\partial a_2}=\frac{1}{\sqrt{b}}\ln(\sqrt{b}p_1+\sqrt{c}p_2)-\sqrt{c}\,t$$

由此解出 p_1,p_2,有

$$p_1=\frac{1}{2\sqrt{b}}\exp\{\sqrt{b}(b_2+\sqrt{c}\,t)\}-\frac{b_1}{2\sqrt{b}}\exp\{-\sqrt{b}(b_2+\sqrt{c}\,t)\}$$

$$p_2=\frac{1}{2\sqrt{c}}\exp\{\sqrt{b}(b_2+\sqrt{c}\,t)\}+\frac{b_1}{2\sqrt{c}}\exp\{-\sqrt{b}(b_2+\sqrt{c}\,t)\}$$

由(17.1.2)给出

$$x_1=\frac{\partial\psi}{\partial p_1}=-2a_1bp_1+\frac{a_2}{\sqrt{b}p_1+\sqrt{c}p_2}$$

$$x_2=\frac{\partial\psi}{\partial p_2}=2a_1cp_2+\frac{\sqrt{c}a_2}{\sqrt{b}p_1+\sqrt{c}p_2}$$

代入 p_1,p_2 的值,得到

$$x_1=-A\sqrt{b}\exp(\sqrt{bc}\,t)+B\sqrt{b}\exp(-\sqrt{bc}\,t)$$

$$x_2=A\sqrt{c}\exp(\sqrt{bc}\,t)+B\sqrt{c}\exp(-\sqrt{bc}\,t)$$

其中

$$A=a_1\exp(\sqrt{b}\,b_2)$$

$$B=a_1\sqrt{b}\,b_1\exp(-\sqrt{b}\,b_2)+a_2\exp(-\sqrt{b}\,b_2)$$

例 2 试用势积分方法求 Whittaker 方程[2]

$$\ddot{q}_1=q_1,\ddot{q}_2=\dot{q}_1$$

的解。

解:Whittaker 方程是一个完整力学系统,其动能和广义力分别为

$$T=\frac{1}{2}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2),Q_1=q_1,Q_2=\dot{q}_1$$

令

$$x_1=q_1,x_2=q_2,x_3=\dot{q}_1,x_4=\dot{q}_2$$

则方程表示为 4 个一阶方程

$$\dot{x}_1=x_3,\dot{x}_2=x_4,\dot{x}_3=x_1,\dot{x}_4=x_3$$

偏微分方程(17.1.3)给出

$$-\frac{\partial\psi}{\partial t}+p_1\frac{\partial\psi}{\partial p_3}+p_2\frac{\partial\psi}{\partial p_4}+p_3\frac{\partial\psi}{\partial p_1}+p_4\frac{\partial\psi}{\partial p_3}=0$$

组成特征方程

$$\frac{\mathrm{d}t}{-1}=\frac{\mathrm{d}p_1}{p_3}=\frac{\mathrm{d}p_2}{0}=\frac{\mathrm{d}p_3}{p_1+p_4}=\frac{\mathrm{d}p_4}{p_2}$$

下面来求它的 4 个积分。

因 $$\mathrm{d}p_2=0$$

故有积分

$$p_2=c_2$$

又

$$\mathrm{d}p_4=-p_2\mathrm{d}t=-c_2\mathrm{d}t$$

积分得

$$p_4+p_2t=c_4$$

又

$$\frac{\mathrm{d}p_3}{\mathrm{d}t}=-p_1-p_4$$

$$\frac{\mathrm{d}p_1}{\mathrm{d}t}=-p_3$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 p_1}{\mathrm{d}t^2}=p_1+p_4=p_1+c_4-c_2 t$$

积分得

$$p_1=c_2 t-c_4+c_1\exp t+c_3\exp(-t)$$

即

$$p_1+p_4=c_1\exp t+c_3\exp(-t)$$

又

$$p_3=-\dot{p}_1=-c_2-c_1\exp t+c_3\exp(-t)$$

即

$$p_2+p_3=-c_1\exp t+c_3\exp(-t)$$

解出 c_1，c_3，有

$$(-p_1+p_2+p_3-p_4)\exp(-t)=2c_1$$

$$(p_1+p_2+p_3+p_4)\exp t=2c_3$$

于是完全积分有形式

$$\psi=a_1(-p_1+p_2+p_3-p_4)\exp(-t)+a_2 p_2+a_3(p_1+p_2+p_3+p_4)\exp t+q_4(p_4+p_2 t)$$

式(17.1.2)给出

$$x_1=\frac{\partial\psi}{\partial p_1}=-a_1\exp(-t)+a_3\exp t$$

$$x_2=\frac{\partial\psi}{\partial p_2}=a_1\exp(-t)+a_3\exp t+a_2+a_4 t$$

$$x_3=\frac{\partial\psi}{\partial p_3}=a_1\exp(-t)+a_3\exp t$$

$$x_4=\frac{\partial\psi}{\partial p_4}=-a_1\exp(-t)+a_3\exp t+a_4$$

其中前两个就是方程的解。

为解此题，亦可先研究如下两个方程

$$\dot{x}_1=x_3,\dot{x}_3=x_1$$

的积分。此时，方程(17.1.3)给出

$$-\frac{\partial\psi}{\partial t}+p_1\frac{\partial\psi}{\partial p_3}+p_3\frac{\partial\psi}{\partial p_1}=0$$

可找到它的完全积分

$$\psi=a_1(p_1^2-p_3^2)+a_2(p_1+p_3)\exp t$$

式(17.1.4)给出

$$b_1=\frac{\partial\psi}{\partial a_1}=p_1^2-p_3^2,b_2=\frac{\partial\psi}{\partial a_2}=(p_1+p_3)\exp t$$

由此解得

$$p_1=\frac{b_1}{2b_2}\exp t+\frac{1}{2}b_2\exp(-t)$$

$$p_3=-\frac{b_1}{2b_2}\exp t+\frac{1}{2}b_2\exp(-t)$$

式(17.1.2)给出

$$x_1=\frac{\partial\psi}{\partial p_1}=2a_1p_1+a_2\exp t=\left(\frac{a_1b_1}{2b_2}+a_2\right)\exp t+a_1b_2\exp(-t)$$

$$x_3=\frac{\partial\psi}{\partial p_3}=-2a_1p_3+a_2\exp t=\left(\frac{a_1b_1}{2b_2}+a_2\right)\exp t-a_1b_2\exp(-t)$$

令

$$c_1=\frac{a_1b_1}{2b_2},c_2=a_1b_2$$

则

$$x_1=c_1\exp t+c_2\exp(-t)$$

$$x_3=c_1\exp t-c_2\exp(-t)$$

将其代入另两个方程

$$\dot{x}_2=x_4,\dot{x}_4=x_3$$

并积分,得

$$x_4=c_1\exp t+c_2\exp(-t)+c_4$$

$$x_2=c_1\exp t-c_2\exp(-t)+c_4t+c_3$$

§17.3 非完整系统的势积分方法

本节讨论非完整力学系统的势积分方法,包括系统的运动微分方程,以及势积分方法的应用。

17.3.1 系统的运动微分方程

设系统的位形由 n 个广义坐标 $q_s(s=1,2,\cdots,n)$ 来确定,它的运动受有 g

个双面理想 Четаев 型非完整约束

$$f_\beta(t,q_s,\dot{q}_s)=0 \qquad (\beta=1,2,\cdots,g) \tag{17.3.1}$$

系统的运动方程可表示为形式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial T}{\partial q_s}=Q_s+\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s} \qquad (s=1,2,\cdots,n) \tag{17.3.2}$$

在运动微分方程积分之前，可由方程(17.3.1)和(17.3.2)求出待定乘子[3]

$$\lambda_\beta=\lambda_\beta(t,q_s,\dot{q}_s)$$

将其代入方程(17.3.2)，并解出所有广义加速度，记作

$$\ddot{q}_s=g_s(t,q_k,\dot{q}_k) \qquad (s,k=1,2,\cdots,n) \tag{17.3.3}$$

称方程(17.3.3)为与非完整系统(17.3.1)，(17.3.2)相应的完整系统的方程。非完整系统的运动可在完整系统(17.3.3)的解中找到，只要加上非完整约束对初始条件的限制[3,4]

$$f_\beta(0,q_{so},\dot{q}_{so})=0 \qquad (\beta=1,2,\cdots,g) \tag{17.3.4}$$

因此，可先研究系统(17.3.3)的积分，再利用条件(17.3.4)来求得非完整系统的运动。

为利用势积分方法，需将方程(17.3.3)表示为一阶形式。可令

$$x_s=q_s,x_{n+s}=\dot{q}_s \qquad (s=1,2,\cdots,n) \tag{17.3.5}$$

则方程(17.3.3)可表示为

$$\dot{x}_i=F_i(t,x_j) \qquad (i,j=1,2,\cdots,2n) \tag{17.3.6}$$

其中

$$F_s=x_{n+s},F_{n+s}=g_s(t,x_k,x_{n+k}) \tag{17.3.7}$$

按势积分方法，首先，由方程(17.3.6)组建偏微分方程(17.1.3)，有

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}=\sum_{j=1}^{2n}p_jF_j\left(t,\frac{\partial\psi}{\partial p_i}\right) \tag{17.3.8}$$

然后，求其完全积分。最后，按式(17.1.4)和式(17.1.2)得到问题的解。

17.3.2 应用举例

例 1 Новосёлов 例[4]。

设力学系统的位形由两个广义坐标 q_1,q_2 来确定，动能和势能分别为

$$T=\frac{1}{2}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2),V=\text{const.}$$

所受非完整约束为

$$f=\dot{q}_1+bt\dot{q}_2-bq_2+t=0$$

试用势积分方法求解。

解：首先，建立运动微分方程。方程(17.3.2)给出

$$\ddot{q}_1=\lambda,\ \ddot{q}_2=\lambda bt$$

由此及约束方程求得

$$\lambda=-\frac{1}{1+b^2t^2}$$

相应完整系统的方程为

$$\ddot{q}_1=-\frac{1}{1+b^2t^2},\ \ddot{q}_2=-\frac{bt}{1+b^2t^2}$$

令

$$x_1=q_1,x_2=q_2,x_3=\dot{q}_1,x_4=\dot{q}_2$$

则方程化为一阶形式

$$\dot{x}_1=x_3,\dot{x}_2=x_4,\dot{x}_3=-\frac{1}{1+b^2t^2},\dot{x}_4=-\frac{bt}{1+b^2t^2}$$

其次，利用势积分方法解第一、第三两个方程。方程(17.3.8)给出

$$-\frac{\partial\psi}{\partial t}+p_1\frac{\partial\psi}{\partial p_3}-p_3\frac{1}{1+b^2t^2}=0$$

其特征方程为

$$\frac{\mathrm{d}t}{-1}=\frac{\mathrm{d}p_1}{0}=\frac{\mathrm{d}p_3}{p_1}=\frac{\mathrm{d}\psi}{p_3\dfrac{1}{1+b^2t^2}}$$

它有积分

$$p_1=c_1,p_3+p_1t=c_3$$

注意到

$$\mathrm{d}\psi=-p_3\frac{1}{1+b^2t^2}\mathrm{d}t=-\frac{c_3-c_1t}{1+b^2t^2}\mathrm{d}t$$

积分得

$$\begin{aligned}\psi&=-c_3\left[\frac{1}{b}\arctan(bt)+a_2\right]+c_1\left[\frac{1}{2b^2}\ln(1+b^2t^2)+a_1\right]\\&=-(p_3+p_1t)\left[\frac{1}{b}\arctan(bt)+a_2\right]+p_1\left[\frac{1}{2b^2}\ln(1+b^2t^2)+a_1\right]\end{aligned}$$

式(17.1.2)给出

$$x_1=\frac{\partial\psi}{\partial p_1}=-t\left[\frac{1}{b}\arctan(bt)+a_2\right]+\frac{1}{2b^2}\ln(1+b^2t^2)+a_1$$

$$x_3=\frac{\partial\psi}{\partial p_3}=-\frac{1}{b}\arctan(bt)-a_2$$

类似地，对第二、第四两个方程，可求得完全积分

$$\psi=-(p_4+p_2t)\left[\frac{1}{2b}\ln(1+b^2t^2)+a_3\right]+p_2\left[\frac{t}{b}-\frac{1}{b^2}\arctan(bt)+a_4\right]$$

式(17.1.2)给出

$$x_2=\frac{\partial\psi}{\partial p_2}=\frac{t}{b}-\frac{1}{b^2}\arctan(bt)+a_4-t\left[\frac{1}{2b}\ln(1+b^2t^2)+a_3\right]$$

$$x_4=\frac{\partial\psi}{\partial p_4}=-\frac{1}{2b}\ln(1+b^2t^2)-a_3$$

返回到广义坐标,得到相应完整系统的解

$$q_1=-\frac{t}{b}\arctan(bt)+\frac{1}{2b^2}\ln(1+b^2t^2)+t\dot{q}_{10}+q_{10}$$

$$q_2=\frac{t}{b}-\frac{1}{b^2}\arctan(bt)-\frac{t}{2b}\ln(1+b^2t^2)+t\dot{q}_{20}+q_{20}$$

对非完整系统的运动,尚需施加非完整约束对初始条件的限制

$$\dot{q}_{10}-bq_{20}=0$$

§17.4 Birkhoff 系统的势积分方法

本节讨论 Birkhoff 系统和广义 Birkhoff 系统的势积分方法,包括系统的运动微分方程,以及势积分方法的应用。

17.4.1 系统的运动微分方程

Birkhoff 方程有形式[2,5,6]

$$\dot{a}^{\mu}=\sum_{\nu=1}^{2n}\Omega^{\mu\nu}\left(\frac{\partial B}{\partial a^{\nu}}+\frac{\partial R_{\nu}}{\partial t}\right)\qquad(\mu=1,2,\cdots,2n)\tag{17.4.1}$$

其中

$$\sum_{\rho=1}^{2n}\Omega^{\mu\rho}\Omega_{\rho\nu}=\delta_{\nu}^{\mu}$$

$$(\Omega_{\mu\nu})=\left(\frac{\partial R_{\nu}}{\partial a^{\mu}}-\frac{\partial R_{\mu}}{\partial a^{\nu}}\right)$$

令

$$F_{\mu}=\sum_{\nu=1}^{2n}\Omega^{\mu\nu}\left(\frac{\partial B}{\partial a^{\nu}}+\frac{\partial R_{\nu}}{\partial t}\right)\tag{17.4.2}$$

则方程(17.4.1)成为

$$\dot{a}^{\mu}=F_{\mu}(t,\boldsymbol{a})\tag{17.4.3}$$

再令

$$x_i=a^2\qquad(i=1,2,\cdots,2n)$$

则有

$$\dot{x}_i=F_i(t,x_j)\qquad(i,j=1,2,\cdots,2n)\tag{17.4.4}$$

广义 Birkhoff 方程有形式[7]

$$\dot{a}^{\mu}=\sum_{\nu=1}^{2n}\Omega^{\mu\nu}\left(\frac{\partial B}{\partial a^{\nu}}+\frac{\partial R_{\nu}}{\partial t}-\Lambda_{\nu}\right)\qquad(\mu=1,2,\cdots,2n)\tag{17.4.5}$$

若令

$$F_{\mu}=\sum_{\nu=1}^{2n}\Omega^{\mu\nu}\left(\frac{\partial B}{\partial a^{\nu}}+\frac{\partial R_{\nu}}{\partial t}-\Lambda_{\nu}\right)\tag{17.4.6}$$

则方程仍有形式(17.4.4)。

对方程(17.4.4),按方程(17.1.3)列写偏微分方程,有

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}=\sum_{j=1}^{2n}p_jF_j\left(t,\frac{\partial\psi}{\partial p_i}\right)\tag{17.4.7}$$

求其完全积分,然后按式(17.1.4),(17.1.2)求问题的积分。

17.4.2 应用举例

例1 广义 Birkhoff 系统为

$$R_1=0,R_2=a^1,B=-\frac{1}{2}(a^2)^2,\Lambda_1=\frac{4}{t}a^2+\frac{2}{t^2}a^1,\Lambda_2=0$$

试用势积分方法求解。

解:广义 Birkhoff 方程(17.4.5)给出

$$\dot{a}^2=-\frac{4}{t}a^2-\frac{2}{t^2}a^1,-\dot{a}^1=-a^2$$

令

$$x_i=a^i\qquad(i=1,2)$$

则

$$\dot{x}_1=x_2,\dot{x}_2=-\frac{4}{t}x_2-\frac{2}{t^2}x_1$$

偏微分方程(17.1.3)给出

$$-\frac{\partial\psi}{\partial t}+p_1\frac{\partial\psi}{\partial p_2}-p_2\left(\frac{4}{t}\frac{\partial\psi}{\partial p_2}+\frac{2}{t^2}\frac{\partial\psi}{\partial p_1}\right)=0$$

其特征方程为

$$\frac{\mathrm{d}t}{-1}=\frac{\mathrm{d}p_1}{-\dfrac{2p_2}{t^2}}=\frac{\mathrm{d}p_2}{p_1-\dfrac{4p_2}{t}}$$

于是有

$$\mathrm{d}p_1=\frac{2p_2}{t^2}\mathrm{d}t,\mathrm{d}p_2=-p_1\mathrm{d}t+\frac{4p_2}{t}\mathrm{d}t$$

$$\mathrm{d}(p_1t^{-1}-p_2t^{-2})=0$$

$$\mathrm{d}(-p_1t^{-2}+2p_2t^{-3})=0$$

完全积分表示为

$$\psi=a_1(p_1t^{-1}-p_2t^{-2})+a_2(-p_1t^{-2}+2p_2t^{-3})$$

式(17.1.2)给出

$$x_1=\frac{\partial\psi}{\partial p_1}=a_1t^{-1}-a_2t^{-2}$$

$$x_2=\frac{\partial\psi}{\partial p_2}=-a_1t^{-2}+2a_2t^{-3}$$

其中 a_1,a_2 为积分常数。

例 2 广义 Birkhoff 系统为

$$R_1=a^2,R_2=0,B=\frac{1}{2}(a^2)^2,\Lambda_1=-2a^2+4\exp t,\Lambda_2=0$$

试用势积分方法求其解。

解:广义 Birkhoff 方程(17.4.5)给出

$$-\dot{a}^2=2a^2+4\exp t,\dot{a}^1=a^2$$

令

$$x_i=a^i\qquad(i=1,2)$$

则

$$\dot{x}_1=x_2,\dot{x}_2=-2x_2+4\exp t$$

先用势积分方法解第二个方程。令

$$x_3=x_2-\frac{4}{3}\exp t$$

则第二个方程表示为

$$\dot{x}_3=-2x_3$$

偏微分方程(17.1.3)给出

$$-\frac{\partial\psi}{\partial t}-2p\frac{\partial\psi}{\partial p}=0$$

其完全积分为

$$\psi=at-\frac{1}{2}a\ln p$$

式(17.1.4)给出

$$b=\frac{\partial\psi}{\partial a}=t-\frac{1}{2}\ln p$$

由此解出 p,有

$$p=\exp(2t-2b)$$

式(17.1.2)给出

$$x_3=\frac{\partial\psi}{\partial p}=-\frac{a}{2p}=c_1\exp(-2t)$$

其中

$$c_1=-\frac{1}{2}a\exp(2b)$$

于是

$$x_2=x_3+\frac{4}{3}\exp t=c_1\exp(-2t)+\frac{4}{3}\exp t$$

然后,代入方程$\dot{x}_1=x_2$,并积分得

$$x_1=-\frac{1}{2}c_1\exp(-2t)+\frac{4}{3}\exp t+c_2$$

其中 c_1,c_2 为积分常数。

势积分方法的基本思想是将常微分方程组的求积分问题化成求偏微分方程的完全积分问题。求出完全积分后,再用求偏导数的方法得到问题的解。在具体应用时,也可将方程组拆成若干个组合,分别用势积分方法求解,如 Новосёлов 例。应用势积分方法的主要困难在于求偏微分方程的完全积分。

思考题

17.1 势积分方法与 Hamilton-Jacobi 方法都是将常微分方程的积分问题化成求偏微分方程的完全积分问题。试比较它们的适用范围、难易程度。

17.2 势积分方法与场积分方法都是将常微分方程的积分问题化成求偏微分方程的完全积分问题。试比较它们的适用范围、难易程度。

17.3 对广义 Hamilton 系统,能否应用势积分方法?

习题

17.1 完整系统为

$$L=\frac{1}{2}(\dot{q}^2-q^2),Q=-2\dot{q}$$

试用势积分方法求解。

答: $$q=-a_1\exp(-t)+a_2t\exp(-t)$$

17.2 完整系统为

$$L=\frac{1}{2}\dot{q}^2,Q=-2\dot{q}+\exp t$$

试用势积分方法求解。

答：

$$q=-\frac{1}{2}c_1\exp(-2t)+\frac{1}{3}\exp t+c_2$$

17.3 试对 Новосёлов 例的 4 个方程用势积分方法求解。

17.4 Birkhoff 系统为

$$R_1=a^2+a^3, R_2=0, R_3=a^4, R_4=0$$

$$B=\frac{1}{2}\{(a^3)^2+2a^2a^3-(a^4)^2\}$$

试用势积分方法求解。

参考文献

[1]Аржаных ИС. Поле Импульсов[M]. Ташкент: Наука, 1965.

[2] Santilli RM. Foundations of Theoretical Mechanics Ⅱ [M]. NewYork: Springer-Verlag, 1983.

[3]梅凤翔. 非完整系统力学基础[M]. 北京:北京工业学院出版社，1985.

[4]Новосёлов ВС. Вариационные Методы в Механике[M]. Ленинград: ЛГУ, 1966.

[5]梅凤翔，史荣昌，张永发，吴惠彬. Birkhoff 系统动力学[M]. 北京:北京理工大学出版社，1996.

[6]Галиуллин АС, Гафаров ГГ, Малайшка РП, Хван АМ. Аналитическая Динамика Систем Гельмгольца, Биркгофа, Намбу[M]. Москва: РЖУФН, 1997.

[7]Mei FX. The Noether's theory of Birkhoffian systems[J]. Science in China, Serie A, 1993, 36(12): 1456-1467.

18

Jacobi 最终乘子法

Jacobi 最终乘子法是微分方程的一种积分方法。本章研究一般微分方程组的最终乘子、Hamilton 系统的最终乘子、广义 Hamilton 系统的最终乘子、Birkhoff 系统的最终乘子等。

§18.1 一般微分方程组的 Jacobi 最终乘子

本节讨论一般微分方程组的 Jacobi 最终乘子，包括最终乘子、由两个最终乘子导出积分，以及最终乘子对 Lagrange 力学逆问题的应用等。

18.1.1 最终乘子

令

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{X_1}=\frac{\mathrm{d}x_2}{X_2}=\cdots=\frac{\mathrm{d}x_n}{X_n}=\frac{\mathrm{d}x}{X} \tag{18.1.1}$$

为一给定方程组。其中，$X_1,X_2,\cdots,X_n,X$ 是变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n,x$ 的函数。假设已知方程(18.1.1)的$(n-1)$个积分。

$$f_r(x_1,x_2,\cdots,x_n,x)=C_r \qquad (r=1,2,\cdots,n-1) \tag{18.1.2}$$

并设由式(18.1.2)可将 $x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}$ 表示为 x_n 和 x 的函数，那么方程组(18.1.1)成为

$$\frac{\mathrm{d}x_n}{X'_n}=\frac{\mathrm{d}x}{X'} \tag{18.1.3}$$

其中“′”表示 X_n 和 X 中的 $x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}$ 用 x_n 和 x 表示。可以证明如下结论[1]：

方程组(18.1.1)的积分是

$$\int\frac{M'}{\Delta'}(X'\mathrm{d}x_n-X'_n\mathrm{d}x)=\mathrm{const.} \tag{18.1.4}$$

其中 M 表示偏微分方程

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_s}(MX_s)+\frac{\partial}{\partial x}(MX)=0 \tag{18.1.5}$$

的任意解，而 Δ 是 Jacobi 行列式

$$\Delta=\frac{\partial(f_1,f_2,\cdots,f_{n-1})}{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1})} \tag{18.1.6}$$

上述结论中的函数 M 称为微分方程组(18.1.1)的最终乘子，或称为 **Jacobi 最终乘子**。结果表明，若已知$(n-1)$个积分，利用最终乘子可找到最终解。寻求方程组的最终乘子问题，归为求解偏微分方程(18.1.5)的问题。

18.1.2 由两个乘子导出积分

假设已找到最终乘子的偏微分方程(18.1.5)的两个解 M 和 N，即有

$$\sum_{s=1}^{n}\left(X_s\frac{\partial}{\partial x_s}\right)\ln M+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial X_k}{\partial x_k}+\frac{\partial X}{\partial x}=0$$

$$\sum_{s=1}^{n}\left(X_s\frac{\partial}{\partial x_s}\right)\ln N+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial X_k}{\partial x_k}+\frac{\partial X}{\partial x}=0$$

两式相减，得

$$\sum_{s=1}^{n}\left(X_s\frac{\partial}{\partial x_s}\right)\ln\frac{M}{N}=0$$

由此得积分

$$\ln\frac{M}{N}=\text{const.}$$

这表明，微分方程组两个最终乘子的商是方程组的一个积分[1]。因此，如果 $M=1$是最终乘子，那么其他的最终乘子都是方程组的积分。

18.1.3 对 Lagrange 力学逆问题的应用

提出如下逆问题：在什么条件下一个二阶方程

$$\ddot{q}=f(t,q,\dot{q}) \tag{18.1.7}$$

等价于 Lagrange 方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}}-\frac{\partial L}{\partial q}=0 \tag{18.1.8}$$

为解此问题，将方程(18.1.8)展开，得

$$\frac{\partial^2 L}{\partial\dot{q}^2}f+\frac{\partial^2 L}{\partial\dot{q}\partial q}\dot{q}+\frac{\partial^2 L}{\partial\dot{q}\partial t}-\frac{\partial L}{\partial q}=0$$

由此得

$$-\frac{\partial}{\partial\dot{q}}\left(\frac{\partial^2 L}{\partial\dot{q}^2}f\right)=\frac{\partial}{\partial\dot{q}}\left(\frac{\partial^2 L}{\partial\dot{q}\partial q}\dot{q}+\frac{\partial^2 L}{\partial\dot{q}\partial t}-\frac{\partial L}{\partial q}\right)$$
$$=\frac{\partial^3 L}{\partial\dot{q}^2\partial q}\dot{q}+\frac{\partial^3 L}{\partial\dot{q}^2\partial t}$$

令

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^2}=M$$

则函数 M 满足方程

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}}(Mf)+\frac{\partial}{\partial q}(M\dot{q})+\frac{\partial M}{\partial t}=0 \tag{18.1.9}$$

而这就是为确定方程

$$\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}q}{\dot{q}}=\frac{\mathrm{d}\dot{q}}{f(t,q,\dot{q})}$$

的最终乘子 M 的方程。因此,有如下结论[1]:

对于一个二阶方程确定函数 L 的问题,归结为确定最终乘子的问题。

18.1.4 应用举例

例 1 偏微分方程为

$$\dot{x}_1=x_2,\qquad \dot{x}_2=t^{-1}x_2$$

试用最终乘子法求解。

解: 偏微分方程(18.1.5)给出

$$\frac{\partial M}{\partial t}+\frac{\partial M}{\partial x_1}x_2+\frac{\partial M}{\partial x_2}t^{-1}x_2+Mt^{-1}=0$$

可找到它的解

$$M=x_2^{-1}$$

可找到方程的一个积分

$$f_1=x_1-\frac{1}{2}tx_2=c_1$$

式(18.1.4)给出

$$\int\frac{x_2^{-1}}{1}\{\mathrm{d}x_2-t^{-1}x_2\mathrm{d}t\}=c_2$$

积分得

$$\ln x_2-\ln t=c_2$$

或

$$\frac{x_2}{t}=c_2'$$

例 2 Whittaker 方程为

$$\ddot{q}_1=q_1,\qquad \ddot{q}_2=\dot{q}_1$$

试用最终乘子法求解。

解: 令

$$x_1=q_1,x_2=q_2,x_3=\dot{q}_1,x_4=\dot{q}_2$$

则方程表示为

$$\dot{x}_1=x_3,\dot{x}_2=x_4,\dot{x}_3=x_1,\dot{x}_4=x_3$$

偏微分方程(18.1.5)给出

$$\frac{\partial M}{\partial t}+\frac{\partial M}{\partial x_1}x_3+\frac{\partial M}{\partial x_2}x_4+\frac{\partial M}{\partial x_3}x_1+\frac{\partial M}{\partial x_4}x_3=0$$

可找到如下最终乘子

$$M=1$$
$$M=x_4-x_1$$
$$M=(x_1+x_3)\exp(-t)$$
$$M=(x_1-x_3)\exp t$$
$$M=x_2-x_3-(x_4-x_1)t$$

这后面 4 个乘子都是问题的积分。

§ 18.2 Hamilton 系统的最终乘子

本节讨论 Hamilton 系统的最终乘子，包括最终乘子对系统，特别是二自由度情形的应用。

18.2.1 最终乘子对 Hamilton 系统的应用

Hamilton 方程表示为

$$\frac{\mathrm{d}q_1}{\frac{\partial H}{\partial p_1}}=\frac{\mathrm{d}q_2}{\frac{\partial H}{\partial p_2}}=\cdots=\frac{\mathrm{d}q_n}{\frac{\partial H}{\partial p_n}}=\frac{\mathrm{d}p_1}{-\frac{\partial H}{\partial q_1}}=\frac{\mathrm{d}p_2}{-\frac{\partial H}{\partial q_2}}=\cdots=\frac{\mathrm{d}p_n}{-\frac{\partial H}{\partial q_n}}=\frac{\mathrm{d}t}{1} \tag{18.2.1}$$

令

$$x_s=q_s,x_{n+s}=p_s \qquad (s=1,2,\cdots,n) \tag{18.2.2}$$

则方程(18.2.1)表示为

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{X_1}=\frac{\mathrm{d}x_2}{X_2}=\cdots=\frac{\mathrm{d}x_{2n}}{X_{2n}}=\frac{\mathrm{d}t}{1} \tag{18.2.3}$$

其中

$$X_s=\frac{\partial H}{\partial x_{n+s}},X_{n+s}=-\frac{\partial H}{\partial x_s} \qquad (s=1,2,\cdots,n) \tag{18.2.4}$$

方程(18.1.5)给出

$$\frac{\partial M}{\partial t}+\sum_{i=1}^{2n}\frac{\partial M}{\partial x_i}X_i+M\sum_{i=1}^{2n}\frac{\partial X_i}{\partial x_i}=0 \tag{18.2.5}$$

由式(18.2.4)知

$$\sum_{i=1}^{2n}\frac{\partial X_i}{\partial x_i}=0$$

于是，式(18.2.5)成为

$$\frac{\partial M}{\partial t}+\sum_{i=1}^{2n}\frac{\partial M}{\partial x_i}X_i=0$$

由此知，$M=1$ 是 Hamilton 方程的最终乘子。

对于非保守力不依赖于广义动量的 Hamilton 系统

$$\frac{\mathrm{d}q_1}{\dfrac{\partial H}{\partial p_1}}=\frac{\mathrm{d}q_2}{\dfrac{\partial H}{\partial p_2}}=\cdots=\frac{\mathrm{d}q_n}{\dfrac{\partial H}{\partial p_n}}=\frac{\mathrm{d}p_1}{-\dfrac{\partial H}{\partial q_1}+Q_1}=\frac{\mathrm{d}p_2}{-\dfrac{\partial H}{\partial q_2}+Q_2}=\cdots=\frac{\mathrm{d}p_n}{-\dfrac{\partial H}{\partial q_n}+Q_n}=\frac{\mathrm{d}t}{1}\tag{18.2.6}$$

其中

$$Q_s=Q_s(q_k,t)\qquad(s,k=1,2,\cdots,n)\tag{18.2.7}$$

仍然有

$$\sum_{i=1}^{2n}\frac{\partial X_i}{\partial x_i}=0$$

因此，$M=1$ 也是系统(18.2.6)的最终乘子[2]。

这样，对于 Hamilton 系统(18.2.1)以及系统(18.2.6)，(18.2.7)，只要找到$(2n-1)$个积分，那么问题可归为一个求积分。进而，如果动能和力不显含时间 t，那么方程(18.2.1)和方程(18.2.6)最后一个可去掉，此时只需$(2n-2)$个积分。如果存在力函数不依赖于时间，而有能量积分，此时只需$(2n-3)$个积分。再者，如某个变量，例如 q_n，不明显出现于 H 中，此时有

$$\frac{\partial H}{\partial q_n}=0$$

即

$$\frac{\mathrm{d}p_n}{\mathrm{d}t}=0$$

而

$$p_n=\text{const.}$$

此时只需$(2n-4)$个积分。

对§10.2 中所论重刚体绕固定点运动问题，Euler-Poisson 方程是 6 个一阶方程，已知 3 个经典积分，方程不含时间 t，$M=1$ 是最终乘子，因此问题归结为寻求第四个积分。

18.2.2 二自由度情形

对二自由度完整保守系统，在除能量积分外还已知一个积分的情形下，可以完全积分[1]。

设系统为

$$\frac{\mathrm{d}q_1}{\frac{\partial H}{\partial p_1}}=\frac{\mathrm{d}q_2}{\frac{\partial H}{\partial p_2}}=\frac{\mathrm{d}p_1}{-\frac{\partial H}{\partial q_1}}=\frac{\mathrm{d}p_2}{-\frac{\partial H}{\partial q_2}}=\mathrm{d}t \tag{18.2.8}$$

它有能量积分

$$H\ (q_1,q_2,p_1,p_2)=h \tag{18.2.9}$$

令另一积分为

$$V(q_1,q_2,p_1,p_2)=c \tag{18.2.10}$$

式(18.1.4)给出

$$\int \frac{1}{\frac{\partial(V,H)}{\partial(p_1,p_2)}}\left\{\frac{\partial H}{\partial p_2}\mathrm{d}q_1-\frac{\partial H}{\partial p_2}\mathrm{d}q_2\right\}=\text{const.} \tag{18.2.11}$$

其中 p_1,p_2 用由已知积分 H 和 V 所得到的 q_1 和 q_2 的值表示，即

$$\begin{aligned}p_1&=f_1(q_1,q_2,h,c)\\ p_2&=f_2(q_1,q_2,h,c)\end{aligned} \tag{18.2.12}$$

将式(18.2.12)代入式(18.2.9)和式(18.2.10)，使其成为恒等式，并分别对 c 求偏导数，得

$$\frac{\partial H}{\partial p_1}\frac{\partial f_1}{\partial c}+\frac{\partial H}{\partial p_2}\frac{\partial f_2}{\partial c}=0$$

$$\frac{\partial V}{\partial p_1}\frac{\partial f_1}{\partial c}+\frac{\partial V}{\partial p_2}\frac{\partial f_2}{\partial c}=1$$

由此解得

$$\frac{\partial f_1}{\partial c}=\frac{\frac{\partial H}{\partial p_2}}{\frac{\partial(V,H)}{\partial(p_1,p_2)}},\ \frac{\partial f_2}{\partial c}=-\frac{\frac{\partial H}{\partial p_1}}{\frac{\partial(V,H)}{\partial(p_1,p_2)}}$$

将其代入式(18.2.11)，得知

$$\int\left(\frac{\partial f_1}{\partial c}\mathrm{d}q_1+\frac{\partial f_2}{\partial c}\mathrm{d}q_2\right) \tag{18.2.13}$$

是一个积分。于是有下述结论[1]：

如果在 Hamilton 系统

$$\dot{q}_r=\frac{\partial H}{\partial p_r},\ \dot{p}_r=-\frac{\partial H}{\partial q_r}\qquad (r=1,2) \tag{18.2.14}$$

中能量积分是 $H(q_1,q_2,p_1,p_2)=h$，而 $V(q_1,q_2,p_1,p_2)=c$ 是不含时间的另一个积分，那么表达式 $p_1\mathrm{d}q_1+p_2\mathrm{d}q_2$，其中 p_1 和 p_2 用式(18.2.12)表示，将是某函数 $\theta(q_1,q_2,h,c)$ 的恰当微分，而系统余下的积分是

$$\frac{\partial\theta}{\partial c}=\text{const.},\ \frac{\partial\theta}{\partial h}=t+\text{const.} \tag{18.2.15}$$

18.2.3 应用举例

例 1 Hamilton 函数为

$$H=\frac{1}{2}(p_1^2+p_2^2+q_1^2+q_2^2)$$

试用最终乘子法求解。

解:系统有能量积分

$$\frac{1}{2}(p_1^2+p_2^2+q_1^2+q_2^2)=h$$

还有一个局部能量积分

$$p_1^2+q_1^2=c$$

由以上两个积分解出 p_1 和 p_2,有

$$p_1=\pm(c-q_1^2)^{\frac{1}{2}}=f_1$$

$$p_2=\pm(2h-c-q_2^2)^{\frac{1}{2}}=f_2$$

又

$$p_1\mathrm{d}q_1+p_2\mathrm{d}q_2=\pm(c-q_1^2)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}q_1\pm(2h-c-q_2^2)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}q_2=\mathrm{d}\theta$$

$$\theta=\int\pm(c-q_1^2)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}q_1+\int\pm(2h-c-q_2^2)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}q_2$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial c}=\int\pm\frac{1}{2}(c-q_1^2)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}q_1+\int\mp\frac{1}{2}(2h-c-q_2^2)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}q_2$$

$$=\pm\frac{1}{2}\arcsin\frac{q_1}{\sqrt{c}}\mp\frac{1}{2}\arcsin\frac{q_2}{\sqrt{2h-c}}$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial h}=\int\pm(2h-c-q_2^2)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}q_2$$

$$=\pm\arcsin\frac{q_2}{\sqrt{2h-c}}$$

式(18.2.15)给出

$$\pm\frac{1}{2}\arcsin\frac{q_1}{\sqrt{c}}\mp\frac{1}{2}\arcsin\frac{q_2}{\sqrt{2h-c}}=c_1$$

$$\pm\arcsin\frac{q_2}{\sqrt{2h-c}}=t+c_2$$

由此解得

$$q_1=\pm\sqrt{c}\,\sin(2c_1+c_2+t)$$

$$q_2=\pm\sqrt{2h-c}\,\sin(c_2+t)$$

这就是问题的解。

例 2 Hamilton 函数为

$$H=q_1p_1-q_2p_2-aq_1^2+bq_2^2$$

其中 a,b 为常数,试用最终乘子法求积分。

解:系统有两个积分

$$H=q_1p_1-q_2p_2-aq_1^2+bq_2^2=h$$

$$V=\frac{p_2-bq_2}{q_1}=c$$

由此解出 p_1,p_2,有

$$p_1=aq_1+cq_2+\frac{h}{q_1},\ p_2=cq_1+bq_2$$

计算得

$$p_1\mathrm{d}q_1+p_2\mathrm{d}q_2=\left(aq_1+cq_2+\frac{h}{q_1}\right)\mathrm{d}q_1+(cq_1+bq_2)\mathrm{d}q_2=\mathrm{d}\theta$$

$$\theta=cq_1q_2+\frac{1}{2}aq_1^2+\frac{1}{2}bq_2^2+h\ln q_1$$

式(18.2.15)给出

$$\frac{\partial\theta}{\partial c}=q_1q_2=\text{const.}$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial h}=\ln q_1=t+\text{const.}$$

§18.3 广义 Hamilton 系统的最终乘子

本节讨论**广义 Hamilton 系统**的最终乘子,包括系统最终乘子的偏微分方程,以及最终乘子法的应用。

18.3.1 系统的最终乘子

广义 Hamilton 方程有形式[3]

$$\dot{x}_i=\sum_{j=1}^{m}J_{ij}\frac{\partial H}{\partial x_j}\quad(i=1,2,\cdots,m)\tag{18.3.1}$$

其中 $J_{ij}=J_{ij}(\boldsymbol{x})$ 满足

$$J_{ij}=-J_{ji}\tag{18.3.2}$$

$$\sum_{l=1}^{m}\left(J_{il}\frac{\partial J_{jk}}{\partial x_l}+J_{jl}\frac{\partial J_{ki}}{\partial x_l}+J_{kl}\frac{\partial J_{ij}}{\partial x_l}\right)=0\qquad(i,j,k=1,2,\cdots,m)$$

令

$$f_i=\sum_{j=1}^{m}J_{ij}\frac{\partial H}{\partial x_j}\tag{18.3.3}$$

则广义 Hamilton 系统最终乘子的方程有形式

$$XM+M\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial f_i}{\partial x_i}=0 \tag{18.3.4}$$

其中

$$X=\frac{\partial}{\partial t}+\sum_{i=1}^{m}f_i\frac{\partial}{\partial x_i} \tag{18.3.5}$$

由式(18.3.4)得到如下结果：

1)如果函数 f_i 满足条件

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial f_i}{\partial x_i}=0 \tag{18.3.6}$$

则 $M=1$ 是系统的最终乘子

2)如果 M 和 N 是广义 Hamilton 系统的两个最终乘子，则它们的商是系统的积分。

3)已知广义 Hamilton 系统的 $(m-1)$ 个积分

$$F_r(x_i,t)=c_r \qquad (r=1,2,\cdots,m-1) \tag{18.3.7}$$

则方程的积分为

$$\int\frac{M'}{\Delta'}(\mathrm{d}x_m-f_m\mathrm{d}t)=c_m \tag{18.3.8}$$

其中

$$\Delta=\frac{\partial(F_1,F_2,\cdots,F_{m-1})}{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_{m-1})} \tag{18.3.9}$$

而式(18.3.8)中带′的项表示借助式(18.3.7)消去 $x_1,x_2,\cdots,x_{m-1}$ 而表示为 x_m，t 的表达式。

18.3.2 应用举例

例 1 三维广义 Hamilton 系统为

$$H=\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)$$

$$(J_{ij})=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2x_2\\ -1 & 0 & 2x_1\\ -2x_2 & -2x_1 & 0\end{pmatrix}$$

试求系统的积分。

解：微分方程有形式

$$\dot{x}_1=x_2,\dot{x}_2=-x_1,\dot{x}_3=-4x_1x_2$$

偏微分方程(18.3.4)给出

$$\frac{\partial M}{\partial t}+\frac{\partial M}{\partial x_1}x_2+\frac{\partial M}{\partial x_2}(-x_1)+\frac{\partial M}{\partial x_3}(-4x_1x_2)=0$$

它有如下解

$$M=1$$

$$M=\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)$$

$$M=\frac{1}{2}(x_1^2-x_2^2+x_3)$$

后两个最终乘子是系统的积分。有了这两个积分

$$F_1=\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)=c_1$$

$$F_2=\frac{1}{2}(x_1^2-x_2^2+x_3)=c_2$$

便可利用最终乘子法找到第三个积分。做计算

$$\Delta=\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(x_1,x_2)}=\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1 & -x_2 \end{vmatrix}=-2x_1x_2$$

由两个积分解出 x_1, x_2，有

$$x_1=(c_1+c_2-\frac{1}{2}x_3)^{\frac{1}{2}}$$

$$x_2=(c_1-c_2+\frac{1}{2}x_3)^{\frac{1}{2}}$$

于是

$$\Delta'=-2(c_1^2-c_2^2-\frac{1}{4}x_3^2+c_2x_3)^{\frac{1}{2}}$$

式(18.3.8)给出

$$\int\frac{1}{-2\left(c_1^2-c_2^2-\frac{1}{4}x_3^2+c_2x_3\right)^{\frac{1}{2}}}\left\{\mathrm{d}x_3+4\left(c_1^2-c_2^2-\frac{1}{4}x_3^2+c_2x_3\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}t\right\}=c_3$$

积分得

$$-\frac{1}{2}\left[2\arcsin\left(\frac{\frac{1}{2}x_3-c_2}{c_1}\right)\right]-2t=c_3$$

即

$$x_3=2c_2-2c_1\sin(c_3+2t)$$

例 2 三维广义 Hamilton 系统为

$$H=\frac{1}{2A}(x_1^2+x_2^2)+\frac{1}{2C}x_3^2$$

$$(J_{ij})=\begin{pmatrix}0 & -x_3 & x_2\\ x_3 & 0 & -x_1\\ -x_2 & x_1 & 0\end{pmatrix}$$

其中 A,C 为常数,试研究系统的积分。

解:系统的微分方程有形式

$$\dot{x}_1=\frac{A-C}{AC}x_2x_3,\ \dot{x}_2=\frac{C-A}{CA}x_3x_1,\ \dot{x}_3=0$$

偏微分方程(18.3.4)给出

$$\frac{\partial M}{\partial t}+\frac{\partial M}{\partial x_1}\left(\frac{A-C}{AC}x_2x_3\right)+\frac{\partial M}{\partial x_2}\left(\frac{C-A}{CA}x_3x_1\right)=0$$

它有如下解

$$M=1$$

$$M=\frac{1}{2A}(x_1^2+x_2^2)+\frac{1}{2C}x_3^2$$

$$M=x_3$$

后两个 M 是积分,表示为

$$F_1=\frac{1}{2A}(x_1^2+x_2^2)+\frac{1}{2C}x_3^2=c_1$$

$$F_2=x_3=c_2$$

由此解得

$$x_2=(2Ac_1-\frac{A}{C}c_2^2-x_1^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$x_3=c_2$$

做计算,有

$$\Delta=\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(x_2,x_3)}=\begin{vmatrix}\frac{1}{A}x_2 & \frac{1}{C}x_3\\ 0 & 1\end{vmatrix}=\frac{1}{A}x_2$$

$$\Delta'=\frac{1}{A}\left(2Ac_1-\frac{A}{C}c_2^2-x_1^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

式(18.3.8)给出

$$\int\frac{1}{\frac{1}{A}\left(2Ac_1-\frac{A}{C}c_2^2-x_1^2\right)^{\frac{1}{2}}}\left\{\mathrm{d}x_1-\frac{A-C}{C}\left(2Ac_1-\frac{A}{C}c_2^2-x_1^2\right)^{\frac{1}{2}}c_2\mathrm{d}t\right\}=c_3$$

积分得

$$x_1=\sqrt{2AC-\frac{A}{C}c_2^2}\ \sin\left(\frac{c_3}{A}+\frac{A-C}{C}c_2t\right)$$

§ 18.4 Birkhoff 系统的最终乘子

本节讨论 Birkhoff 系统的最终乘子，包括 Birkhoff 方程的最终乘子、广义 Birkhoff 方程的最终乘子，以及应用等。

18.4.1 系统的最终乘子

Birkhoff 方程有形式[4-6]

$$\dot{a}^\mu=\sum_{\nu=1}^{2n}\Omega^{\mu\nu}\left(\frac{\partial B}{\partial a^\nu}+\frac{\partial R_\nu}{\partial t}\right)\qquad(\mu=1,2,\cdots,2n)\tag{18.4.1}$$

其中

$$\sum_{\rho=1}^{2n}\Omega^{\mu\rho}\Omega_{\rho\nu}=\delta_\nu^\mu$$

$$(\Omega_{\mu\nu})=\left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu}\right)$$

令

$$f_\mu=\sum_{\nu=1}^{2n}\Omega^{\mu\nu}\left(\frac{\partial B}{\partial a^\nu}+\frac{\partial R_\nu}{\partial t}\right)\tag{18.4.2}$$

则方程(18.4.1)简记作

$$\dot{a}^\mu=f_\mu(t,\boldsymbol{a})\qquad(\mu=1,2,\cdots,2n)\tag{18.4.3}$$

对方程(18.4.3)，最终乘子的偏微分方程(18.1.5)给出

$$\frac{\partial M}{\partial t}+\sum_{\mu=1}^{2n}\frac{\partial(Mf_\mu)}{\partial a^\mu}=0\tag{18.4.4}$$

或表示为

$$XM+M\sum_{\mu=1}^{2n}\frac{\partial f_\mu}{\partial a^\mu}=0\tag{18.4.5}$$

其中

$$X=\frac{\partial}{\partial t}+\sum_{\mu=1}^{2n}f_\mu\frac{\partial}{\partial a^\mu}\tag{18.4.6}$$

为全导数算子。

下面导出 Birkhoff 方程的最终乘子。

文献[6]给出如下关系

$$\sum_{\mu=1}^{2n} \frac{\partial f_\mu}{\partial a^\mu} = -X\ln\sqrt{|\det\Omega|} \tag{18.4.7}$$

其中

$$\det\Omega = \det\left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu} - \frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu}\right) \tag{18.4.8}$$

下面证明式(18.4.7)。令

$$\Gamma_\mu = \frac{\partial B}{\partial a^\mu} + \frac{\partial R_\mu}{\partial t} \tag{18.4.9}$$

做计算,有

$$\sum_{\mu=1}^{2n} \frac{\partial f_\mu}{\partial a^\mu} = \sum_{\mu=1}^{2n} \frac{\partial}{\partial a^\mu}\left(\sum_{\nu=1}^{2n} \Omega^{\mu\nu}\Gamma_\nu\right) = \sum_{\mu=1}^{2n}\left(\sum_{\nu=1}^{2n} \frac{\partial \Omega^{\mu\nu}}{\partial a^\mu}\Gamma_\nu + \sum_{\nu=1}^{2n} \Omega^{\mu\nu}\frac{\partial \Gamma_\nu}{\partial a^\mu}\right) \tag{18.4.10}$$

有如下关系[6]

$$\frac{\partial \Omega^{im}}{\partial a^l} = -\sum_{j=1}^{2n}\sum_{k=1}^{2n} \Omega^{ij}\frac{\partial \Omega_{jk}}{\partial a^l}\Omega^{km} \tag{18.4.11}$$

$$\sum_{i=1}^{2n}\sum_{j=1}^{2n} \Omega^{ij}\frac{\partial \Omega_{ij}}{\partial a^k} = -\frac{\partial}{\partial a^k}\ln|\det\Omega| \tag{18.4.12}$$

$$\sum_{i=1}^{2n}\sum_{j=1}^{2n} \Omega^{ij}\frac{\partial \Omega_{ij}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}\ln|\det\Omega| \tag{18.4.13}$$

将式(18.4.11)代入式(18.4.10),得

$$\begin{aligned}
\sum_{\mu=1}^{2n} \frac{\partial f_\mu}{\partial a^\mu} &= -\sum_{\mu=1}^{2n}\sum_{m=1}^{2n}\sum_{j=1}^{2n}\sum_{\nu=1}^{2n} \Omega^{\mu m}\frac{\partial \Omega_{mj}}{\partial a^\mu}\Omega^{j\nu}\Gamma_\nu + \sum_{\mu=1}^{2n}\sum_{\nu=1}^{2n} \Omega_{\mu\nu}\frac{\partial \Gamma_\nu}{\partial a^\mu} \\
&= -\frac{1}{2}\sum_{\mu=1}^{2n}\sum_{\nu=1}^{2n}\sum_{j=1}^{2n}\sum_{k=1}^{2n}\left(\Omega^{\mu\nu}\frac{\partial \Omega_{\nu j}}{\partial a^\mu} - \Omega^{\nu\mu}\frac{\partial \Omega_{\nu j}}{\partial a^\mu}\right)\Omega^{jk}\Gamma_k + \frac{1}{2}\sum_{\mu=1}^{2n}\sum_{\nu=1}^{2n} \Omega^{\mu\nu}\left(\frac{\partial \Gamma_\nu}{\partial a^\mu} - \frac{\partial \Gamma_\mu}{\partial a^\nu}\right) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{\mu=1}^{2n}\sum_{\nu=1}^{2n}\sum_{j=1}^{2n}\sum_{k=1}^{2n} \Omega^{\mu\nu}\left(\frac{\partial \Omega_{j\nu}}{\partial a^\mu} + \frac{\partial \Omega_{\mu j}}{\partial a^\nu}\right)\Omega^{jk}\Gamma_k + \frac{1}{2}\sum_{\mu=1}^{2n}\sum_{v=1}^{2n} \Omega^{\mu\nu}\left(\frac{\partial \Gamma_\nu}{\partial a^\mu} - \frac{\partial \Gamma_\mu}{\partial a^\nu}\right) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{\mu=1}^{2n}\sum_{\nu=1}^{2n}\sum_{j=1}^{2n}\sum_{k=1}^{2n} \Omega^{\mu\nu}\frac{\partial \Omega_{\mu\nu}}{\partial a^j}\Omega^{jk}\Gamma_k + \frac{1}{2}\sum_{\mu=1}^{2n}\sum_{\nu=1}^{2n} \Omega^{\mu\nu}\frac{\partial \Omega_{\mu\nu}}{\partial t}
\end{aligned} \tag{18.4.14}$$

将式(18.4.12),(18.4.13)代入式(18.4.14),得到

$$\sum_{\mu=1}^{2n} \frac{\partial f_\mu}{\partial a^\mu} = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2n} f_k\frac{\partial}{\partial a^k}\{\ln|\det\Omega|\} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\{\ln|\det\Omega|\} = -X\ln\sqrt{|\det\Omega|} \tag{18.4.15}$$

这就证明了式(18.4.7)。

将式(18.4.15)代入方程(18.4.5),得到

$$XM - MX\ln\sqrt{|\det\Omega|} = 0 \tag{18.4.16}$$

或写成

$$X(\ln|M|-\ln\sqrt{|\det\Omega|})=0 \tag{18.4.17}$$

于是得到最终乘子

$$M=C\sqrt{|\det\Omega|} \tag{18.4.18}$$

这样，如果已知 Birkhoff 方程的$(2n-1)$个积分

$$\omega_\rho(t,a)=c_\rho \qquad (\rho=1,2,\cdots,2n-1) \tag{18.4.19}$$

那么，积分(18.1.4)可写成形式

$$\int\frac{C\sqrt{|\det\Omega'|}}{\Delta'}(\mathrm{d}a^{2n}-f'_{2n}\mathrm{d}t)=c_{2n} \tag{18.4.20}$$

其中

$$\Delta=\frac{\partial(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_{2n-1})}{\partial(a^1,a^2,\cdots,a^{2n-1})} \tag{18.4.21}$$

而“′”表示在函数 f_{2n}，$\det\Omega$ 和 Δ 中变量 $a^\rho(\rho=1,2,\cdots,2n-1)$借助式(18.4.19)用 a^{2n}和 t 替代。于是，问题可得到最终解。

18.4.2 广义 Birkhoff 方程的最终乘子

广义 Birkhoff 方程有形式[7]

$$\dot{a}^\mu=\sum_{\nu=1}^{2n}\Omega^{\mu\nu}\left(\frac{\partial B}{\partial a^\nu}+\frac{\partial R_\nu}{\partial t}-\Lambda_\nu\right) \qquad (\mu=1,2,\cdots,2n) \tag{18.4.22}$$

令

$$f_\mu=\sum_{\nu=1}^{2n}\Omega^{\mu\nu}\left(\frac{\partial B}{\partial a^\nu}+\frac{\partial R_\nu}{\partial t}-\Lambda_\nu\right) \tag{18.4.23}$$

最终乘子的偏微分方程有形式(18.4.5)。

下面看广义 Birkhoff 方程在怎样的条件下有最终乘子式(18.4.18)。令

$$\Gamma_\mu=\frac{\partial B}{\partial a^\mu}+\frac{\partial R_\mu}{\partial t}-\Lambda_\mu \tag{18.4.24}$$

做计算，有

$$\frac{1}{2}\sum_{\mu=1}^{2n}\sum_{\nu=1}^{2n}\Omega^{\mu\nu}\left(\frac{\partial\Gamma_\nu}{\partial a^\mu}-\frac{\partial\Gamma_\mu}{\partial a^\nu}\right)=\frac{1}{2}\sum_{\mu=1}^{2n}\sum_{\nu=1}^{2n}\Omega^{\mu\nu}\left(\frac{\partial\Omega_{\mu\nu}}{\partial t}-\frac{\partial\Lambda_\nu}{\partial a^\mu}+\frac{\partial\Lambda_\mu}{\partial a^\nu}\right) \tag{18.4.25}$$

因此，当

$$\sum_{\mu=1}^{2n}\sum_{\nu=1}^{2n}\Omega^{\mu\nu}\left(\frac{\partial\Lambda_\mu}{\partial a^\nu}-\frac{\partial\Lambda_\nu}{\partial a^\mu}\right)=0 \tag{18.4.26}$$

时，式(18.4.14)才成立。此时，广义 Birkhoff 方程的最终乘子有与 Birkhoff 方程同样的形式(18.4.18)。条件(18.4.26)是对附加项 Λ_μ 的限制。特别地，当

$$\frac{\partial\Lambda_\mu}{\partial a^\nu}-\frac{\partial\Lambda_\nu}{\partial a^\mu}=0 \qquad (\mu,\nu=1,2,\cdots,2n) \tag{18.4.27}$$

时，条件(18.4.26)成立。

18.4.3 应用举例

例 1 Birkhoff 系统为

$$R_1=0, R_2=a^1(a^2)^{-n}, B=-ka^1-\frac{(a^2)^{2-n}}{2-n} \qquad (n\neq 2)$$

其中 k,n 为常数,试用最终乘子法求解。

解:Birkhoff 方程给出

$$\dot{a}^1=a^2, \dot{a}^2=-k(a^2)^n$$

方程是自洽的,Birkhoff 函数是系统的一个积分

$$\omega_1=-ka^1-\frac{1}{2-n}(a^2)^{2-n}=c_1$$

又

$$(\Omega_{\mu\nu})=\begin{pmatrix} 0 & (a^2)^{-n} \\ -(a^2)^{-n} & 0 \end{pmatrix}$$

故

$$\det\Omega=(a^2)^{-2n}$$

最终乘子式(18.4.18)给出

$$M=C\sqrt{|\det\Omega|}=C(a^2)^{-n}$$

又

$$\Delta=\frac{\partial\omega_1}{\partial a^1}=-k$$

式(18.4.20)给出

$$\int\frac{C(a^2)^{-n}}{-k}\{\mathrm{d}a^2+k(a^2)^n\mathrm{d}t\}=c_2$$

即

$$-\frac{c}{k}\frac{(a^2)^{-n+1}}{(-n+1)}-ct=c_2$$

或写成

$$(a^2)^{1-n}+k(1-n)t=c_2'$$

例 2 Birkhoff 系统为

$$R_1=a^3, R_2=a^4, R_3=R_4=0$$

$$B=\frac{1}{2}\left(a^3-\frac{1}{b}\arctan bt\right)^2+\frac{1}{2}\left\{a^4-\frac{1}{2b}\ln(1+b^2t^2)\right\}^2$$

试用最终乘子法求解。

解:Birkhoff 方程给出

$$\dot{a}^1=a^3-\frac{1}{b}\arctan bt$$

$$\dot{a}^2=a^4-\frac{1}{2b}\ln(1+b^2t^2)$$

$$\dot{a}^3=0$$

$$\dot{a}^4=0$$

可找到系统的三个积分

$$\omega_1=a^3=c_1$$

$$\omega_2=a^1-a^3t+\frac{1}{b}\int\arctan bt\mathrm{d}t=c_2$$

$$\omega_3=a^2-a^4t+\frac{1}{2b}\int\ln(1+b^2t^2)\mathrm{d}t=c_3$$

由此求得

$$\Delta=\frac{\partial(\omega_1,\omega_2,\omega_3)}{\partial(a^1,a^2,a^3)}=\begin{vmatrix}0&0&1\\1&0&-t\\0&1&0\end{vmatrix}=1$$

又

$$\det\Omega=\begin{vmatrix}0&0&-1&0\\0&0&0&-1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{vmatrix}=1$$

式(18.4.20)给出

$$\int c\mathrm{d}a^4=c_4$$

即

$$a^4=c_4'$$

例 3 Hojman-Urrutia 方程为

$$\ddot{x}+\dot{y}=0,\ddot{y}+y=0$$

试将其化为 Birkhoff 方程，并用最终乘子法求解。

解：令

$$a^1=x,a^2=y,a^3=\dot{x},a^4=\dot{y}$$

则方程表示为

$$\dot{a}^1=a^3,\dot{a}^2=a^4,\dot{a}^3=-a^4,\dot{a}^4=-a^2$$

它可表示为 Birkhoff 方程，有[4]

$$R_1=a^2+a^3,R_2=0,R_3=a^4,R_4=0$$

$$B=\frac{1}{2}\{(a^3)^2+2a^2a^3-(a^4)^2\}$$

于是有

$$(\Omega_{\mu\nu})=\begin{pmatrix}0 & -1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$\det\Omega=1$$

最终乘子为

$$M=C\sqrt{|\det\Omega|}=C$$

可找到方程的三个积分

$$\omega_1=a^2\cos t-a^4\sin t=c_1$$
$$\omega_2=a^2\sin t+a^4\cos t=c_2$$
$$\omega_3=a^2+a^3=c_3$$

于是有

$$\Delta=\frac{\partial(\omega_1,\omega_2,\omega_3)}{\partial(a^2,a^3,a^4)}=\begin{vmatrix}\cos t & 0 & -\sin t\\ \sin t & 0 & \cos t\\ 1 & 1 & 0\end{vmatrix}=-1$$

式(18.4.20)给出

$$\int\frac{c}{-1}(\mathrm{d}a^1-a^3\mathrm{d}t)=c_4$$

其中 a^3 可由三个积分表示为

$$a^3=c_3-c_1\cos t-c_2\sin t$$

代入积分式，得

$$a^1+c_1\sin t-c_2\cos t-c_3t=c_4'$$

即

$$a^1-a^4-(a^2+a^3)t=c_4'$$

为求系统的积分，亦可由最终乘子的偏微分方程出发。方程(18.4.5)给出

$$\frac{\partial M}{\partial t}+\frac{\partial M}{\partial a^1}a^3+\frac{\partial M}{\partial a^2}a^4+\frac{\partial M}{\partial a^3}(-a^4)+\frac{\partial M}{\partial a^4}(-a^2)=0$$

它有如下解

$$M=1$$
$$M=a^2\cos t-a^4\sin t$$
$$M=a^2\sin t+a^4\cos t$$
$$M=a^2+a^3$$

后三个乘子就是系统的积分。

例 4 广义 Birkhoff 系统为

$$R_1=-\frac{1}{2a^2},R_2=-\frac{a^1}{2(a^2)^2},B=0,\Lambda_1=-k,\Lambda_2=-\frac{1}{a^2}$$

试用最终乘子法求解。

解:广义 Birkhoff 方程给出

$$\dot{a}^1=a^2,\dot{a}^2=-k(a^2)^2$$

系统有积分

$$\omega_1=ka^1+\ln a^2=c_1$$

而

$$\Delta=\frac{\partial\omega_1}{\partial a^1}=k$$

又

$$(\Omega_{\mu\nu})=\begin{pmatrix}0 & -\frac{1}{(a^2)^2}\\ \frac{1}{(a^2)^2} & 0\end{pmatrix}\qquad(a^2\neq0)$$

$$\det\Omega=(a^2)^{-4}$$

式(18.4.18)给出

$$M=C\sqrt{|\det\Omega|}=C(a^2)^{-2}$$

式(18.4.20)给出

$$\int\frac{C(a^2)^{-2}}{k}\{\mathrm{d}a^2+k(a^2)^2\mathrm{d}t\}=c_2$$

由此解得

$$a^2=\frac{\tilde{c}_2}{(\tilde{c}_2t-1)k}$$

其中

$$\tilde{c}=\frac{c}{c_2}$$

方程(18.4.5)给出

$$\frac{\partial M}{\partial t}+\frac{\partial M}{\partial a^1}a^2+\frac{\partial M}{\partial a^2}[-k(a^2)^2]+M(-2ka^2)=0$$

它有解

$$M=(a^2)^{-2}$$

$$M=(ka^1+\ln a^2)(a^2)^{-2}$$

两乘子之商为

$$\omega_1 = ka^1 + \ln a^2$$

是系统的积分。

Jacobi 最终乘子法是常微分方程的一种积分方法。这种方法可用来研究各类约束力学系统的积分。对 $2n$ 个一阶方程，如果已知 $(2n-1)$ 个积分，就可利用最终乘子法找到最后一个积分。同时，由最终乘子的偏微分方程求出最终乘子，也可找到积分。特别是，当最终乘子 $M=1$ 时，所有最终乘子都是积分。

思考题

18.1 当最终乘子 $M=1$ 时，不论方程如何，所有最终乘子都是积分。这个结论对否?

18.2 Birkhoff 系统的最终乘子为 $M=C\sqrt{|\det\Omega|}$，广义 Birkhoff 系统的最终乘子也是 $M=C\sqrt{|\det\Omega|}$。对否?

18.3 研究微分方程

$$\ddot{q} = -q$$

的 Jacobi 最终乘子，有如下方法：

(1)化成一阶方程，用一般微分方程组方法。

(2)化成 Hamilton 方程。

(3)化成 Birkhoff 方程。问哪种方法好?

习题

18.1 两个一阶方程为

$$\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = -x_1$$

试研究其最终乘子。

18.2 微分方程为

$$\dot{x}_1 = x_3, \dot{x}_2 = x_4, \dot{x}_3 = x_1 - 2x_4, \dot{x}_4 = x_2 + 2x_3$$

试研究其最终乘子。

18.3 二自由度系统的 Lagrange 函数为

$$L = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - q_2$$

试将其化成 Hamilton 系统，并用最终乘子法求其积分。

18.4 微分方程为

$$\dot{a}^1=a^2,\dot{a}^2=t^{-1}a^2$$

试将其化成 Birkhoff 系统,并用最终乘子法求其积分。

参考文献

[1] Whittaker ET. A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies[M]. 9th ed. New York: Macmillan Co., 1944.

[2] Appell P. Traité de Mécanique Rationnelle[M]. Tome Ⅱ, Sixième Éd. Paris: Gauthier-Villars, 1953.

[3] 李继彬,赵晓华,刘正荣. 广义哈密顿系统理论及其应用[M]. 北京:科学出版社,1994.

[4] Santilli RM. Foundations of Theoretical Mechanics Ⅱ[M]. New York: Springer-Verlag, 1983.

[5] 梅凤翔,史荣昌,张永发,吴惠彬. Birkhoff 系统动力学[M]. 北京:北京理工大学出版社,1996.

[6] Галиуллин АС, ГафаровГГ, МалайшкаРП, Хван АМ. Аналитическая Динамика Систем Гельмгольца, Биркгофа, Намбу[M]. Москва: РЖУФН, 1997.

[7] Mei FX. The Noether's theory of Birkhoffian systems[J]. Science in China, Serie A, 1993, 36(12): 1456-1467.

19

Noether 对称性方法

1918 年德国数学家 Noether AE(1882—1935)的著名论文《不变变分问题》揭示了力学系统的守恒量与其内在动力学对称性之间的关系。文献[2]指出，力学的变分原理的应用和物理意义的基础是两个定理：Hilbert 独立性定理和 Noether 定理。第一个定理给出变分原理的数学论据，第二个定理揭示了它的物理意义。九十多年来，Noether 理论被推广到非保守系统[3]、非完整系统[4-7]、Birkhoff 系统[8]等各类约束力学系统[9-12]。

§19.1 Lagrange 系统

对 **Lagrange 系统**，Noether 对称性是 Hamilton 作用量在无限小变换下的不变性，由 Noether 对称性可直接导出系统的守恒量。

19.1.1 运动微分方程

Lagrange 系统的运动微分方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial L}{\partial q_s}=0 \qquad (s=1,2,\cdots,n) \tag{19.1.1}$$

其中 $L=L(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$。

Lagrange 系统可分为三类：完整保守系统、广义力有广义势的完整系统，以及 Lagrange 力学逆问题系统。

对于完整保守系统，方程(19.1.1)中的 $L=T-V$ 为 Lagrange 函数，或动势，其中 T 为动能，V 为势能。对广义力有广义势 U 的完整系统，广义力表示为

$$Q_s=\frac{\partial U}{\partial q_s}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_s} \qquad (s=1,2,\cdots,n) \tag{19.1.2}$$

其中

$$U=\sum_{s=1}^{n}A_s(t,\boldsymbol{q})\dot{q}_s+A(t,\boldsymbol{q}) \tag{19.1.3}$$

而 $L=T+U$。有些完整非保守系统，在一定条件下也可用方程(19.1.1)来描述。这就是所谓 Lagrange 力学逆问题，已在 §11.4 中讨论过。

19.1.2 Noether 对称性

取时间和坐标的无限小变换

$$t^*=t+\Delta t,q_s^*(t^*)=q_s(t)+\Delta q_s \qquad (s=1,2,\cdots,n) \tag{19.1.4}$$

或其展开式

$$\begin{aligned}t^*&=t+\varepsilon\xi_0(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\\ q_s^*(t^*)&=q_s(t)+\varepsilon\xi_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\end{aligned} \tag{19.1.5}$$

其中 ε 为一无限小参数；ξ_0，ξ_s 为无限小生成元。

Hamilton 作用量为

$$S(\gamma)=\int_{t_0}^{t_1}L(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\mathrm{d}t \tag{19.1.6}$$

在变换(19.1.4)下，曲线 γ 变换为曲线 γ^*，相应的 Hamilton 作用量变换为

$$S(\gamma^*)=\int_{t_0^*}^{t_1^*}L\left(t^*,\boldsymbol{q}^*,\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}^*}{\mathrm{d}t^*}\right)\mathrm{d}t^* \tag{19.1.7}$$

作用量 S 的变分 ΔS 为差 $S(\gamma^*)-S(\gamma)$ 的相对 ε 的主线性部分，有

$$\Delta S=\delta S+\dot{S}\Delta t \tag{19.1.8}$$

以及

$$\Delta S=\int_{t_0}^{t_1}[\Delta L+L(\Delta t)^{\cdot}]\mathrm{d}t \tag{19.1.9}$$

于是有

$$\Delta S=\int_{t_0}^{t_1}\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial q_s}\delta q_s+\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_s}\delta\dot{q}_s\right)\mathrm{d}t+L\Delta t \tag{19.1.10}$$

以及

$$\Delta S=\int_{t_0}^{t_1}\left\{L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Delta t)+\frac{\partial L}{\partial t}\Delta t+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial q_s}\Delta q_s+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_s}\Delta\dot{q}_s\right\}\mathrm{d}t \tag{19.1.11}$$

将式(19.1.5)代入式(19.1.10)，并注意到

$$\delta q_s=\Delta q_s-\dot{q}_s\Delta t=\varepsilon(\xi_s-\dot{q}_s\xi_0) \tag{19.1.12}$$

得到

$$\Delta S=\int_{t_0}^{t_1}\varepsilon\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[L\xi_0+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_s}(\xi_s-\dot{q}_s\xi_0)\right]+\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial q_s}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_s}\right)(\xi_s-\dot{q}_s\xi_0)\right\}\mathrm{d}t \tag{19.1.13}$$

如果

$$\Delta S=0 \tag{19.1.14}$$

成立，则称无限小变换(19.1.4)为 Noether 意义下的**对称变换**。此时由式(19.1.11)得

$$L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Delta t+\frac{\partial L}{\partial t}\Delta t+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial q_s}\Delta q_s+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\Delta \dot{q}_s=0 \tag{19.1.15}$$

或者表示为

$$\frac{\partial L}{\partial t}\xi_0+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial q_s}\xi_s+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{\xi}_s+\left(L-\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s\right)\dot{\xi}_0=0 \tag{19.1.16}$$

或者表示为

$$L\dot{\xi}_0+\mathrm{X}^{(1)}(L)=0 \tag{19.1.17}$$

其中

$$\mathrm{X}^{(1)}=\xi_0\frac{\partial}{\partial t}+\sum_{k=1}^{n}\xi_k\frac{\partial}{\partial q_k}+\sum_{s=1}^{n}(\dot{\xi}_s-\dot{q}_s\dot{\xi}_0)\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s} \tag{19.1.18}$$

式(19.1.15),(19.1.16),(19.1.17)称为 **Noether 等式**。

如果成立

$$\Delta S=-\int_{t_0}^{t_1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Delta G)\mathrm{d}t \tag{19.1.19}$$

其中 $G=G(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$，则称变换(19.1.4)为 Noether 意义下的**准对称变换**。此时，由式(19.1.11)得到

$$L\dot{\xi}_0+\mathrm{X}^{(1)}(L)+\dot{G}_N=0 \tag{19.1.20}$$

其中

$$\Delta G=\varepsilon G_N$$

而 G_N 称为规范函数。

在对称变换下，解 Noether 等式(19.1.17)，可找到无限小生成元 ξ_0,ξ_s。判断 Noether 对称性的另一方法是 **Killing 方程**有解。Killing 方程表示为

$$\frac{\partial L}{\partial t}\xi_0+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial q_s}\xi_s+\left(L-\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s\right)\left(\frac{\partial \xi_0}{\partial t}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial \xi_0}{\partial q_k}\dot{q}_k\right)+$$
$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\left(\frac{\partial \xi_s}{\partial t}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial \xi_s}{\partial q_k}\dot{q}_k\right)=0 \tag{19.1.21}$$

$$\left(L-\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s\right)\frac{\partial \xi_0}{\partial \dot{q}_k}+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\frac{\partial \xi_s}{\partial \dot{q}_k}=0 \qquad (k=1,2,\cdots,n)$$

在准对称变换下，解 Noether 等式(19.1.20)，可找到无限小生成元 ξ_0,ξ_s 和规范函数 G_N。相应的 Killing 方程为

$$\frac{\partial L}{\partial t}\xi_0+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial q_s}\xi_s+\left(L-\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s\right)\left(\frac{\partial \xi_0}{\partial t}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial \xi_0}{\partial q_k}\dot{q}_k\right)+$$

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\left(\frac{\partial \xi_s}{\partial t}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial \xi_s}{\partial q_k}\dot{q}_k\right)+\frac{\partial G_N}{\partial t}+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial G_N}{\partial q_s}\dot{q}_s=0 \qquad (19.1.22)$$

$$\left(L-\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s\right)\frac{\partial \xi_0}{\partial \dot{q}_k}+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\frac{\partial \xi_s}{\partial \dot{q}_k}+\frac{\partial G_N}{\partial \dot{q}_k}=0 \qquad (k=1,2,\cdots,n)$$

19.1.3 Noether 守恒量

在对称变换下，由式(19.1.13)得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[L\xi_0+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}(\xi_s-\dot{q}_s\xi_0)\right]+\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial q_s}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\right)(\xi_s-\dot{q}_s\xi_0)=0$$

将式(19.1.1)代入上式，得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[L\xi_0+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}(\xi_s-\dot{q}_s\xi_0)\right]=0$$

积分得 Noether 守恒量

$$I_N=L\xi_0+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}(\xi_s-\dot{q}_s\xi_0)=\text{const.} \qquad (19.1.23)$$

在准对称变换下，有 Noether 守恒量

$$I_N=L\xi_0+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}(\xi_s-\dot{q}_s\xi_0)+G_N=\text{const.} \qquad (19.1.24)$$

于是有

命题 1 如果无限小变换的生成元 ξ_0，ξ_s 满足 Noether 等式(19.1.17)，或满足 Killing 方程(19.1.21)，则 Lagrange 系统有 Noether 守恒量式(19.1.23)。

命题 2 如果无限小变换的生成元 ξ_0，ξ_s 和规范函数 G_N 满足 Noether 等式(19.1.20)，或满足 Killing 方程(19.1.22)，则 Lagrange 系统有 Noether 守恒量式(19.1.24)。

19.1.4 应用举例

例 1 试利用 Noether 定理导出力学中的基本守恒定律。

解：当

$$\frac{\partial L}{\partial t}=0$$

时，可取无限小生成元为

$$\xi_0=-1,\xi_s=0 \qquad (s=1,2,\cdots,n)$$

它满足 Noether 等式(19.1.16)，是 Lagrange 系统的 Noether 对称性。由命题 1 得到

$$I_N=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s-L=\text{const.}$$

这就是广义能量积分。当 $T=T_2$ 时，它是机械能守恒律。可见，当时间平移变换为对称变换时，系统存在能量积分，即时间的均匀性导致系统的能量守恒。

当

$$\frac{\partial L}{\partial q_1}=0$$

时，可取无限小生成元为

$$\xi_0=0,\xi_1=1,\xi_r=0 \qquad (r=2,3,\cdots,n)$$

它满足 Noether 等式(19.1.16)，是 Lagrange 系统的 Noether 对称性。命题 1 给出

$$I_N=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}=\text{const.}$$

这就是循环积分，它代表广义动量守恒。当 q_1 为平移时是动量守恒，反映了空间的均匀性；当 q_1 为转角时是动量矩守恒，反映了空间的各向同性。

例 2 气体质量，在其界面常压下，在质点相互引力作用下的平衡问题。平衡方程表示为

$$\ddot{q}+\frac{2}{t}\dot{q}+q^5=0$$

称为 Emden 方程。试用 Noether 定理研究它的守恒量。

解： Emden 方程可表示为 Lagrange 系统，其 Lagrange 函数为

$$L=t^2\left(\frac{1}{2}\dot{q}^2-\frac{1}{6}q^6\right)$$

Noether 等式(19.1.20)给出

$$t^2\left(\frac{1}{2}\dot{q}^2-\frac{1}{6}q^6\right)\dot{\xi}_0+2t\xi_0\left(\frac{1}{2}\dot{q}^2-\frac{1}{6}q^6\right)+t^2\dot{q}(\dot{\xi}-\dot{q}\dot{\xi}_0)-$$

$$t^2q^5\xi+\dot{G}_N=0$$

它有解

$$\xi_0=-2t,\xi=q,G_N=0$$

守恒量式(19.1.24)给出

$$\begin{aligned}I_N&=t^2\left(\frac{1}{2}\dot{q}^2-\frac{1}{6}q^6\right)(-2t)+t^2\dot{q}(q+2\dot{q}t)\\&=t^3\dot{q}^2+t^2q\dot{q}+\frac{1}{3}t^3q^6=\text{const.}\end{aligned}$$

例 3 二自由度系统的 Lagrange 函数为

$$L=\frac{1}{2}m(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2)-\frac{1}{2}k(q_1^2+q_2^2)$$

其中 k,m 为常数，试研究其 Noether 对称性与守恒量。

解： Noether 等式(19.1.20)给出

$$\left\{\frac{1}{2}m(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2)-\frac{1}{2}k(q_1^2+q_2^2)\right\}\dot{\xi}_0+m\dot{q}_1(\dot{\xi}_1-\dot{q}_1\dot{\xi}_0)+$$

$$m\dot{q}_2(\dot{\xi}_2-\dot{q}_2\dot{\xi}_0)-kq_1\xi_1-kq_2\xi_2+\dot{G}_N=0$$

它有如下解[12]

$$\xi_0=-1,\xi_1=\xi_2=0,G_N=0$$

$$\xi_0=0,\xi_1=-q_2,\xi_2=q_1,G_N=0$$

$$\xi_0=-1,\xi_1=0,\xi_2=-\dot{q}_2,G_N=\frac{1}{2}m\dot{q}_2^2-\frac{1}{2}kq_2^2$$

$$\xi_0=-1,\xi_1=-\dot{q}_1,\xi_2=0,G_N=\frac{1}{2}m\dot{q}_1^2-\frac{1}{2}kq_1^2$$

$$\xi_0=0,\xi_1=\dot{q}_1+\frac{1}{2}\dot{q}_2,\xi_2=\frac{1}{2}\dot{q}_1+\dot{q}_2,G_N=-L+\frac{1}{2}kq_1q_2-\frac{1}{2}m\dot{q}_1\dot{q}_2$$

Noether 守恒量式(19.1.24)分别给出

$$I_{N_1}=\frac{1}{2}m(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2)+\frac{1}{2}k(q_1^2+q_2^2)=\text{const.}$$

$$I_{N_2}=m(q_1\dot{q}_2-q_2\dot{q}_1)=\text{const.}$$

$$I_{N_3}=\frac{1}{2}m\dot{q}_1^2+\frac{1}{2}kq_1^2=\text{const.}$$

$$I_{N_4}=\frac{1}{2}m\dot{q}_2^2+\frac{1}{2}kq_2^2=\text{const.}$$

$$I_{N_5}=\frac{1}{2}m\dot{q}_1\dot{q}_2+\frac{1}{2}kq_1q_2=\text{const.}$$

这里 I_{N_1} 为机械能守恒，I_{N_2} 为动量矩守恒，I_{N_3} 和 I_{N_4} 为局部能量守恒。5 个守恒量不是彼此独立的，因为有如下关系

$$I_{N_1}=I_{N_3}+I_{N_4}$$

$$I_{N_2}=2\left\{\frac{m}{k}(I_{N_3}I_{N_4}-I_{N_5}^2)\right\}^{\frac{1}{2}}$$

§ 19.2 Hamilton 系统

对 Hamilton 系统，Noether 对称性是正则坐标下 Hamilton 作用量在无限小变换下的不变性，由 Noether 对称性可直接导出系统的守恒量。

19.2.1 运动微分方程

Hamilton 方程有形式

$$\dot{q}_s=\frac{\partial H}{\partial p_s},\dot{p}_s=-\frac{\partial H}{\partial q_s}\qquad (s=1,2,\cdots,n)\tag{19.2.1}$$

其中 q_s,p_s 为正则变量。

§19.1 中所述三类 Lagrange 系统，都可化成 Hamilton 系统。

19.2.2 Noether 对称性

Hamilton 作用量在相空间中表示为

$$S=\int_{t_0}^{t_1}\Big[\sum_{s=1}^{n}p_s\dot{q}_s-H(t,\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})\Big]\mathrm{d}t\tag{19.2.2}$$

取无限小变换

$$t^*=t+\Delta t,q_s^*(t^*)=q_s(t)+\Delta q_s,p_s^*(t^*)=p_s(t)+\Delta p_s\tag{19.2.3}$$

或其展开式

$$\begin{aligned}t^*&=t+\varepsilon\xi_0(t,\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})\\ q_s^*(t^*)&=q_s(t)+\varepsilon\xi_s(t,\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})\\ p_s^*(t^*)&=p_s(t)+\varepsilon\eta_s(t,\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})\end{aligned}\tag{19.2.4}$$

Hamilton 作用量(19.2.2)的变分为

$$\begin{aligned}\Delta S&=\delta S+\dot{S}\Delta t\\ &=\int_{t_0}^{t_1}\Big\{\sum_{s=1}^{n}(p_s\delta\dot{q}_s+\dot{q}_s\delta q_s)-\sum_{s=1}^{n}\Big(\frac{\partial H}{\partial q_s}\delta q_s+\frac{\partial H}{\partial p_s}\delta p_s\Big)\Big\}\mathrm{d}t+\Big(\sum_{s=1}^{n}p_s\dot{q}_s-H\Big)\Delta t\\ &=\int_{t_0}^{t_1}\Big\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[\sum_{s=1}^{n}p_s\delta q_s+\Big(\sum_{s=1}^{n}p_s\dot{q}_s-H\Big)\Delta t\Big]+\sum_{s=1}^{n}\Big(-\dot{p}_s-\frac{\partial H}{\partial q_s}\Big)\delta q_s+\\ &\qquad\sum_{s=1}^{n}\Big(\dot{q}_s-\frac{\partial H}{\partial p_s}\Big)\delta p_s\Big\}\mathrm{d}t\end{aligned}\tag{19.2.5}$$

以及

$$\begin{aligned}\Delta S&=\int_{t_0}^{t_1}\Big\{\Delta\Big(\sum_{s=1}^{n}p_s\dot{q}_s-H\Big)+\Big(\sum_{s=1}^{n}p_s\dot{q}_s-H\Big)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Delta t)\Big\}\mathrm{d}t\\ &=\int_{t_0}^{t_1}\Big\{\sum_{s=1}^{n}(p_s\Delta\dot{q}_s+\dot{q}_s\Delta p_s)-\frac{\partial H}{\partial t}\Delta t-\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial q_s}\Delta q_s-\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial p_s}\Delta p_s+\\ &\qquad\Big(\sum_{s=1}^{n}p_s\dot{q}_s-H\Big)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Delta t)\Big\}\mathrm{d}t\end{aligned}\tag{19.2.6}$$

如果成立

$$\Delta S=0\tag{19.2.7}$$

则称无限小变换(19.2.3)为 Noether 意义下的对称变换。此时由式(19.2.6)得

$$\sum_{s=1}^{n} p_s \Delta\dot{q}_s + \sum_{s=1}^{n} \dot{q}_s \Delta p_s - \frac{\partial H}{\partial t}\Delta t - \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial q_s}\Delta q_s - \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_s}\Delta p_s + \left(\sum_{s=1}^{n} p_s \dot{q}_s - H\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Delta t) = 0 \tag{19.2.8}$$

利用

$$\dot{q}_s = \frac{\partial H}{\partial p_s}$$

消去第二、第五项,得到 Noether 等式

$$\sum_{s=1}^{n} p_s \dot{q}_s - \frac{\partial H}{\partial t}\xi_0 - \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial q_s}\xi_s - H\dot{\xi}_0 = 0 \tag{19.2.9}$$

如果成立

$$\Delta S = -\int_{t_0}^{t_1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Delta G)\mathrm{d}t \tag{19.2.10}$$

其中 $G=G(t,\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})$,则称无限小变换(19.2.3)为 Noether 意义下的准对称变换。此时,由式(19.2.6)得

$$\sum_{s=1}^{n} p_s \Delta\dot{q}_s + \sum_{s=1}^{n} \dot{q}_s \Delta p_s - \frac{\partial H}{\partial t}\Delta t - \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial q_s}\Delta q_s - \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_s}\Delta p_s + \left(\sum_{s=1}^{n} p_s \dot{q}_s - H\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Delta t) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Delta G) = 0 \tag{19.2.11}$$

或表示为 Noether 等式

$$\sum_{s=1}^{n} p_s \dot{\xi}_s - \frac{\partial H}{\partial t}\xi_0 - \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial q_s}\xi_s - H\dot{\xi}_0 + \dot{G}_N = 0 \tag{19.2.12}$$

其中 $G_N=G_N(t,\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})$称为规范函数。

与 Noether 等式(19.2.9)和(19.2.12)相应的 Killing 方程分别为

$$\sum_{s=1}^{n} p_s \frac{\partial \xi_s}{\partial p_k} - H\frac{\partial \xi_0}{\partial p_k} = 0 \qquad (k=1,2,\cdots,n)$$

$$\sum_{s=1}^{n} p_s \frac{\partial \xi_s}{\partial t} + \sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} p_s \frac{\partial \xi_s}{\partial q_k}\frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial H}{\partial t}\xi_0 - \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial q_s}\xi_s - H\frac{\partial \xi_0}{\partial t} - H\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \xi_0}{\partial q_k}\frac{\partial H}{\partial p_k} = 0 \tag{19.2.13}$$

和

$$\sum_{s=1}^{n} p_s \frac{\partial \xi_s}{\partial p_k} - H\frac{\partial \xi_0}{\partial p_k} + \frac{\partial G_N}{\partial p_k} = 0 \qquad (k=1,2,\cdots,n)$$

$$\sum_{s=1}^{n} p_s \frac{\partial \xi_s}{\partial t} + \sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} p_s \frac{\partial \xi_s}{\partial q_k}\frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial H}{\partial t}\xi_0 - \sum_{s=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial q_s}\xi_s - H\frac{\partial \xi_0}{\partial t} - H\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial \xi_0}{\partial q_k}\frac{\partial H}{\partial p_k} + \frac{\partial G_N}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial G_N}{\partial q_k}\frac{\partial H}{\partial p_k} = 0 \qquad (19.2.14)$$

19.2.3 Noether 守恒量

在对称变换下,由式(19.2.5)得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[\sum_{s=1}^{n} p_s\delta q_s + \Big(\sum_{s=1}^{n} p_s\dot{q}_s - H\Big)\Delta t\Big] + \sum_{s=1}^{n}\Big(-\dot{p}_s - \frac{\partial H}{\partial q_s}\Big)\delta q_s + \sum_{s=1}^{n}\Big(\dot{q}_s - \frac{\partial H}{\partial p_s}\Big)\delta p_s = 0$$

代入正则方程,并积分得到 Noether 守恒量

$$I_N = \sum_{s=1}^{n} p_s\xi_s - H\xi_0 = \text{const.} \qquad (19.2.15)$$

在准对称变换下,有

$$I_N = \sum_{s=1}^{n} p_s\xi_s - H\xi_0 + G_N = \text{const.} \qquad (19.2.16)$$

于是有

命题 1 如果无限小变换的生成元 ξ_0,ξ_s 满足 Noether 等式(19.2.9),或满足 Killing 方程(19.2.13),则 Hamilton 系统存在守恒量式(19.2.15)。

命题 2 如果无限小生成元 ξ_0,ξ_s 和规范函数 G_N 满足 Noether 等式(19.2.12),或满足 Killing 方程(19.2.14),则 Hamilton 系统存在守恒量式(19.2.16)。

注意到,在 Noether 等式和 Killing 方程中不出现生成元 η_s。实际上,η_s 可由 ξ_0,ξ_k 表示,因为

$$\Delta p_s = \varepsilon\eta_s$$

$$\begin{aligned}\Delta p_s &= \frac{\partial p_s}{\partial t}\Delta t + \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial p_s}{\partial q_k}\Delta q_k + \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial p_s}{\partial \dot{q}_k}\Delta\dot{q}_k \\ &= \varepsilon\Big[\frac{\partial p_s}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial p_s}{\partial q_k}\xi_k + \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial p_s}{\partial \dot{q}_k}(\dot{\xi}_k - \dot{q}_k\dot{\xi}_0)\Big]\end{aligned}$$

故有

$$\eta_s = \frac{\partial p_s}{\partial t}\xi_0 + \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial p_s}{\partial q_k}\xi_k + \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial p_s}{\partial \dot{q}_k}(\dot{\xi}_k - \dot{q}_k\dot{\xi}_0) \qquad (19.2.17)$$

19.2.4 应用举例

例 1 单自由度系统的 Hamilton 函数为

$$H=\frac{1}{2}\frac{p^2}{t^2}+\frac{1}{6}t^2q^6$$

试求 Noether 守恒量。

解：Killing 方程(19.2.13)给出

$$p\frac{\partial\xi}{\partial p}-H\frac{\partial\xi_0}{\partial p}=0$$

$$p\frac{\partial\xi}{\partial t}+p\frac{\partial\xi}{\partial q}\left(\frac{p}{t^2}\right)-\left(-\frac{p^2}{t^3}+\frac{1}{3}tq^6\right)\xi_0-t^2q^5\xi-H\frac{\partial\xi_0}{\partial t}-H\frac{\partial\xi_0}{\partial q}\left(\frac{p}{t^2}\right)=0$$

假设生成元为

$$\xi_0=\xi_0(t),\xi=\xi(q)$$

则 Killing 方程成为

$$\frac{p^2}{t^2}\frac{\partial\xi}{\partial q}-\left(-\frac{p^2}{t^3}+\frac{1}{3}tq^6\right)\xi_0-t^2q^5\xi-H\frac{\partial\xi_0}{\partial t}=0$$

即

$$\frac{p^2}{t^3}\left(t\frac{\partial\xi}{\partial q}+\xi_0-\frac{1}{2}t\frac{\partial\xi_0}{\partial t}\right)-\frac{1}{6}tq^5\left(2q\xi_0+6t\xi+tq\frac{\partial\xi_0}{\partial t}\right)=0$$

它可归为如下方程

$$t\frac{\partial\xi}{\partial q}+\xi_0-\frac{1}{2}t\frac{\partial\xi_0}{\partial t}=0$$

$$2q\xi_0+6t\xi+tq\frac{\partial\xi_0}{\partial t}=0$$

由第一个方程知

$$\frac{\partial\xi}{\partial q}=\frac{1}{2}\frac{\partial\xi_0}{\partial t}-\frac{\xi_0}{t}=c_1$$

由此得

$$\xi=c_1q,\xi_0=-2c_1t$$

而第二个方程亦满足。于是求得生成元为

$$\xi_0=-2t,\xi=q$$

将其代入式(19.2.15)，得到守恒量

$$I_N=pq+2t\left(\frac{1}{2}\frac{p^2}{t^2}+\frac{1}{6}t^2q^6\right)=\frac{p^2}{t}+pq+\frac{1}{3}t^3q^6=\text{const.}$$

例 2 Lotka 生化振子的微分方程为

$$\dot{x}_1=\alpha_1+\beta_1\exp x_2,\dot{x}_2=\alpha_2+\beta_2\exp x_1$$

其中 $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2$ 为常数，试将其化成 Hamilton 系统，并研究守恒量。

解:令

$$x_1=q, x_2=p$$

方程可 Hamilton 化,其 Hamilton 函数为

$$H=\alpha_1 p-\alpha_2 q+\beta_1 \exp p-\beta_2 \exp q$$

Noether 等式(19.2.12)给出

$$p\,\dot{\xi}-[-\alpha_2-\beta_2 \exp q]\xi-H\,\dot{\xi}_0+\dot{G}_N=0$$

它有解

$$\xi_0=-1, \xi=0, G_N=0$$

守恒量式(19.2.15)给出

$$I_N=H=\text{const.}$$

§ 19.3 一般完整系统

一般完整系统的 Noether 对称性是 Hamilton 作用量在无限小变换的广义准不变性,由 Noether 对称性可直接导出系统的 Noether 守恒量。

19.3.1 运动微分方程

一般完整系统的运动方程表示为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial L}{\partial q_s}=Q_s \qquad (s=1,2,\cdots,n) \tag{19.3.1}$$

其中 $Q_s=Q_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 为非势广义力。

19.3.2 Noether 对称性

如果成立

$$\Delta S=-\int_{t_0}^{t_1}\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Delta G)+\sum_{s=1}^{n}Q_s\delta q_s\right\}\mathrm{d}t \tag{19.3.2}$$

则变换(19.1.4)称为**广义准对称变换**。此时,有 Noether 等式

$$\frac{\partial L}{\partial t}\xi_0+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial q_s}\xi_s+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{\xi}_s+\left(L-\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s\right)\dot{\xi}_0+\sum_{s=1}^{n}Q_s(\xi_s-\dot{q}_s\xi_0)+\dot{G}_N=0 \tag{19.3.3}$$

或者表示为

$$L\,\dot{\xi}_0+X^{(1)}(L)+\sum_{s=1}^{n}Q_s(\xi_s-\dot{q}_s\xi_0)+\dot{G}_N=0 \tag{19.3.4}$$

与 Noether 等式(19.3.3)相应的 Killing 方程为

$$\frac{\partial L}{\partial t}\xi_0+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial q_s}\xi_s+\left(L-\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k\right)\left(\frac{\partial \xi_0}{\partial t}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial \xi_0}{\partial q_k}\dot{q}_k\right)+$$

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\left(\frac{\partial \xi_s}{\partial t}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial \xi_s}{\partial q_k}\dot{q}_k\right)+\sum_{s=1}^{n}Q_s(\xi_s-\dot{q}_s\xi_0)+\frac{\partial G_N}{\partial t}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial G_N}{\partial q_k}\dot{q}_k=0$$

(19.3.5)

$$\left(L-\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s\right)\frac{\partial \xi_0}{\partial \dot{q}_k}+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\frac{\partial \xi_s}{\partial \dot{q}_k}+\frac{\partial G_N}{\partial \dot{q}_k}=0 \qquad (k=1,2,\cdots,n)$$

19.3.3 Noether 守恒量

由 Noether 对称性可直接找到 Noether 守恒量，有如下结果：

命题 1 对一般完整力学系统，如果无限小生成元 ξ_0,ξ_s 和规范函数 G_N 满足 Noether 等式(19.3.4)，或满足 Killing 方程(19.3.5)，则系统存在 Noether 守恒量式(19.1.24)。

19.3.4 应用举例

例 1 外环轴铅垂时 Cardan 架上的陀螺。

陀螺的动能为[13]

$$T=\frac{1}{2}(a_1+b\cos^2 q_2)\dot{q}_1^2+\frac{1}{2}a_2\dot{q}_2^2+\frac{1}{2}C_3(\dot{q}_3+\dot{q}_1\sin q_2)^2$$

势能为

$$V=mgh\sin q_2$$

其中

$$a_1=A_1+C_2,a_2=B_2+mh^2+A_3,b=A_2+mh^2+A_3-C_2$$

这里 m 为转子轴上固联的质点质量；h 为质点到轴交点的距离；A_1 为外环对铅垂轴的惯性矩；q_1 为外环转角；A_2,B_2,C_2 为内环惯性矩；q_2 为内环转角；C_3 为转子对其转轴的惯性矩；q_3 为转子转角。现施加广义力

$$Q_1=-k\dot{q}_2,Q_2=k\dot{q}_1,Q_3=0$$

试研究系统的 Noether 对称性与守恒量。

解：Noether 等式(19.3.4)给出

$$-b\xi_2\dot{q}_1^2\sin q_2\cos q_2+C_3(\dot{q}_3+\dot{q}_1\sin q_2)\xi_2\dot{q}_1\cos q_2-mgh\xi_2\cos q_2+$$
$$(a_1+b\cos^2 q_2)\dot{q}_1(\dot{\xi}_1-\dot{q}_1\dot{\xi}_0)+a_2\dot{q}_2(\dot{\xi}_2-\dot{q}_2\dot{\xi}_0)+$$
$$C_3(\dot{q}_3+\dot{q}_1\sin q_2)[\dot{\xi}_3-\dot{q}_3\dot{\xi}_0+(\dot{\xi}_1-\dot{q}_1\dot{\xi}_0)\sin q_2]+(T-V)\dot{\xi}_0-$$
$$k\dot{q}_2(\xi_1-\dot{q}_1\xi_0)+k\dot{q}_1(\xi_2-\dot{q}_2\xi_0)+\dot{G}_N=0$$

可找到如下解

$$\xi_0=-1,\xi_1=\xi_2=\xi_3=0,G_N=0$$
$$\xi_0=0,\xi_1=1,\xi_2=\xi_3=0,G_N=kq_2$$
$$\xi_0=0,\xi_1=\xi_2=0,\xi_3=1,G_N=0$$

相应的 Noether 守恒量式(19.1.24)分别给出

$$I_{N_1}=\frac{1}{2}(a_1+b\cos^2 q_2)\dot{q}_1^2+\frac{1}{2}a_2\dot{q}_2^2+\frac{1}{2}C_3(\dot{q}_3+\dot{q}_1\sin q_2)^2+mgh\sin q_2=C_1$$

$$I_{N_2}=(a_1+b\cos^2 q_2)\dot{q}_1+C_3(\dot{q}_3+\dot{q}_1\sin q_2)\sin q_2+kq_2=C_2$$

$$I_{N_3}=C_3(\dot{q}_3+\dot{q}_1\sin q_2)=C_3$$

其中,I_{N_1} 为能量积分;I_{N_3} 为广义动量积分。

例 2 单自由度系统为

$$L=\frac{1}{2}\dot{q}^2+\frac{1}{2}\sin^2 q_2,Q=2\dot{q}^2\cot q$$

试研究 Noether 对称性与守恒量。

解:Noether 等式(19.3.4)给出

$$L\dot{\xi}_0+\xi\sin q\cos q+\dot{q}(\dot{\xi}-\dot{q}\dot{\xi}_0)+2\dot{q}^2\cot q(\xi-\dot{q}\xi_0)+\dot{G}_N=0$$

可找到如下解

$$\xi_0=0,\xi=-\cos t\sin^{-2}q,G_N=\sin t\cot q$$
$$\xi_0=0,\xi=\sin t\sin^{-2}q,G_N=\cos t\cot q$$

Noether 守恒量式(19.1.24)分别给出

$$I_{N_1}=-\dot{q}\cos t\sin^{-2}q+\sin t\cot q=C_1$$
$$I_{N_2}=\dot{q}\sin t\sin^{-2}q+\cos t\cot q=C_2$$

由此得

$$\dot{q}\sin^{-2}q=C_2\sin t-C_1\cos t$$

积分得

$$q=\operatorname{arccot}(C_1\sin t+C_2\cos t)$$

§ 19.4 Четаев 型非完整系统

Четаев 型非完整系统的 Noether 对称性是 Hamilton 作用量在无限小数变换下的广义准不变性以及非完整约束方程的不变性,由 Noether 对称性可直接导出系统的 Noether 守恒量。

19.4.1 运动微分方程

假设力学系统的位形由 n 个广义坐标 $q_s(s=1,2,\cdots,n)$ 来确定,它的运动

受有 g 个双面理想 Четаев 型非完整约束

$$f_\beta(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})=0 \qquad (\beta=1,2,\cdots,g) \tag{19.4.1}$$

并设约束是彼此相容且独立的。约束(19.4.1)加在虚位移上的限制为

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\delta q_s=0 \qquad (\beta=1,2,\cdots,g) \tag{19.4.2}$$

系统的运动微分方程表示为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial L}{\partial q_s}=Q_s+\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s} \qquad (s=1,2,\cdots,n) \tag{19.4.3}$$

假设系统非奇异,即设

$$\det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_s\partial \dot{q}_k}\right)\neq 0 \tag{19.4.4}$$

则由方程(19.4.1)和(19.4.3)在微分方程积分之前可求出 λ_β 作为 $t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}$ 的函数。于是,方程(19.4.3)可写成形式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial L}{\partial q_s}=Q_s+\Lambda_s \qquad (s=1,2,\cdots,n) \tag{19.4.5}$$

其中

$$\Lambda_s=\Lambda_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})=\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s} \tag{19.4.6}$$

为广义非完整约束力,已表示为 $t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}$ 的函数。称方程(19.4.5)为与非完整系统(19.4.1),(19.4.3)相应的完整系统的方程。非完整系统的运动可在相应完整系统的解中找到,只要施加非完整约束对初始条件的限制[14,15]。

19.4.2 Noether 对称性

相应完整系统(19.4.5)的 Noether 等式为

$$L\dot{\xi}_0+X^{(1)}(L)+\sum_{s=1}^{n}(Q_s+\Lambda_s)(\xi_s-\dot{q}_s\xi_0)+\dot{G}_N=0 \tag{19.4.7}$$

非完整系统(19.4.1),(19.4.3)的 Noether 对称性,除满足式(19.4.7)以外,还需满足 Четаев 条件(19.4.2)的限制

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}(\xi_s-\dot{q}_s\xi_0)=0 \qquad (\beta=1,2,\cdots,g) \tag{19.4.8}$$

与等式(19.4.7)相应的 Killing 方程表示为

$$\frac{\partial L}{\partial t}\xi_0+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial q_s}\xi_s+\left(L-\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k\right)\left(\frac{\partial \xi_0}{\partial t}+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial \xi_0}{\partial q_s}\dot{q}_s\right)+$$
$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\left(\frac{\partial \xi_s}{\partial t}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial \xi_s}{\partial q_k}\dot{q}_k\right)+\sum_{s=1}^{n}(Q_s+\Lambda_s)(\xi_s-\dot{q}_s\xi_0)+\frac{\partial G_N}{\partial t}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial G_N}{\partial q_k}\dot{q}_k=0 \tag{19.4.9}$$

$$\left(L-\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s\right)\frac{\partial \xi_0}{\partial \dot{q}_k}+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\frac{\partial \xi_s}{\partial \dot{q}_k}+\frac{\partial G_N}{\partial \dot{q}_k}=0 \qquad (k=1,2,\cdots,n)$$

19.4.3 Noether 守恒量

Четаев 型非完整系统的 Noether 对称性可直接导致 Noether 守恒量,有如下结果。

命题 1 如果无限小生成元 ξ_0,ξ_s 和规范函数 G_N 满足 Noether 等式(19.4.7),或满足 Killing 方程(19.4.9),则相应完整系统(19.4.5)存在 Noether 守恒量

$$I_N=L\xi_0+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}(\xi_s-\dot{q}_s\xi_0)+G_N=\text{const.} \tag{19.4.10}$$

命题 2 如果无限小生成元 ξ_0,ξ_s 和规范函数 G_N 满足 Noether 等式(19.4.7),或满足 Killing 方程(19.4.9),并且满足限制方程(19.4.8),则非完整系统(19.4.1),(19.4.3)存在 Noether 守恒量式(19.4.10)。

19.4.4 应用举例

例 1 Appell-Hamel 例。

问题的 Lagrange 函数为

$$L=\frac{1}{2}m(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2+\dot{q}_3^2)-mgq_3$$

非完整约束为

$$f=\dot{q}_3-(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2)^{\frac{1}{2}}=0$$

试研究系统的 Noether 对称性与守恒量。

解:Killing 方程(19.4.9)给出

$$-mg\xi_3-\left[-mgq_3-\frac{1}{2}m(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2+\dot{q}_3^2)\right]\left(\frac{\partial\xi_0}{\partial t}+\frac{\partial\xi_0}{\partial q_1}\dot{q}_1+\frac{\partial\xi_0}{\partial q_2}\dot{q}_2+\frac{\partial\xi_0}{\partial q_3}\dot{q}_3\right)+$$
$$m\dot{q}_1\left(\frac{\partial\xi_1}{\partial t}+\frac{\partial\xi_1}{\partial q_1}\dot{q}_1+\frac{\partial\xi_1}{\partial q_2}\dot{q}_2+\frac{\partial\xi_1}{\partial q_3}\dot{q}_3\right)+m\dot{q}_2\left(\frac{\partial\xi_2}{\partial t}+\frac{\partial\xi_2}{\partial q_1}\dot{q}_1+\frac{\partial\xi_2}{\partial q_2}\dot{q}_2+\frac{\partial\xi_2}{\partial q_3}\dot{q}_3\right)+$$
$$m\dot{q}_3\left(\frac{\partial\xi_3}{\partial t}+\frac{\partial\xi_3}{\partial q_1}\dot{q}_1+\frac{\partial\xi_3}{\partial q_2}\dot{q}_2+\frac{\partial\xi_3}{\partial q_3}\dot{q}_3\right)+\frac{\partial G_N}{\partial t}+\frac{\partial G_N}{\partial q_1}\dot{q}_1+\frac{\partial G_N}{\partial q_2}\dot{q}_2+\frac{\partial G_N}{\partial q_3}\dot{q}_3=0$$

$$\left[-mgq_3-\frac{1}{2}m(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2+\dot{q}_3^2)\right]\frac{\partial\xi_0}{\partial\dot{q}_k}+m\dot{q}_1\frac{\partial\xi_1}{\partial\dot{q}_k}+m\dot{q}_2\frac{\partial\xi_2}{\partial\dot{q}_k}+$$
$$m\dot{q}_3\frac{\partial\xi_3}{\partial\dot{q}_k}+\frac{\partial G_N}{\partial\dot{q}_k}=0 \qquad (k=1,2,3)$$

限制方程(19.4.8)给出

$$\xi_3-\dot{q}_3\xi_0-(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2)^{-\frac{1}{2}}[\dot{q}_1(\xi_1-\dot{q}_1\xi_0)+\dot{q}_2(\xi_2-\dot{q}_2\xi_0)]=0$$

可找到满足上述方程的如下解

$$\xi_0=-1,\xi_1=\xi_2=\xi_3=0,G_N=0$$

$$\xi_0=0,\xi_1=-\frac{1}{\dot{q}_2},\xi_2=\frac{\dot{q}_1}{\dot{q}_2},\xi_3=0,G_N=-m\frac{\dot{q}_1}{\dot{q}_2}$$

$$\xi_0=0,\xi_1=0,\xi_2=\dot{q}_3,\xi_3=\dot{q}_2,G_N=mgq_2-m\dot{q}_2\dot{q}_3$$

$$\xi_0=0,\xi_1=\dot{q}_3,\xi_2=0,\xi_3=\dot{q}_1,G_N=mgq_1-m\dot{q}_1\dot{q}_3$$

它们都对应非完整系统的 Noether 对称性。

利用命题 2 可找到如下 Noether 守恒量：

$$I_{N_1}=\frac{1}{2}m(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2+\dot{q}_3^2)+mgq_3=C_1$$

$$I_{N_2}=\frac{\dot{q}_1}{\dot{q}_2}=C_2$$

$$I_{N_3}=m\dot{q}_2\dot{q}_3+mgq_2=C_3$$

$$I_{N_4}=m\dot{q}_1\dot{q}_3+mgq_1=C_4$$

例 2 半径为 a 的匀质圆球在完全粗糙水平面上的纯滚动问题。令

$$q_1=\psi,q_2=\theta,q_3=\varphi,q_4=x,q_5=y$$

分别为 Euler 角和球心坐标，系统的 Lagrange 函数为

$$L=\frac{1}{2}m(\dot{q}_4^2+\dot{q}_5^2)+\frac{1}{2}\frac{2}{5}ma^2(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2+\dot{q}_3^2+2\dot{q}_1\dot{q}_3\cos q_2)$$

表示球在平面上做纯滚动的非完整约束方程为

$$f_1=\dot{q}_4+a(\dot{q}_3\sin q_2\cos q_1-\dot{q}_2\sin q_1)=0$$

$$f_2=\dot{q}_5+a(\dot{q}_3\sin q_2\sin q_1+\dot{q}_2\cos q_1)=0$$

试研究问题的 Noether 对称性与守恒量。

解：方程(19.4.3)给出

$$\frac{2}{5}ma^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{q}_1+\dot{q}_3\cos q_2)=0$$

$$\frac{2}{5}ma^2(\ddot{q}_2+\dot{q}_1\dot{q}_3\sin q_2)=-\lambda_1 a\sin q_1+\lambda_2 a\cos q_1$$

$$\frac{2}{5}ma^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{q}_3+\dot{q}_1\cos q_2)=\lambda_1 a\sin q_2\cos q_1+\lambda_2 a\sin q_2\sin q_1$$

$$m\ddot{q}_4=\lambda_1$$

$$m\ddot{q}_5=\lambda_2$$

由此和约束方程求得

$$\lambda_1=\lambda_2=0$$

于是有

$$Q_s+\Lambda_s=0 \qquad (s=1,2,3,4,5)$$

Noether 等式(19.4.7)给出

$$L\dot{\xi}_0+m\dot{q}_4(\dot{\xi}_4-\dot{q}_4\dot{\xi}_0)+m\dot{q}_5(\dot{\xi}_5-\dot{q}_5\dot{\xi}_0)+$$

$$\frac{2}{5}ma^2(\dot{q}_1+\dot{q}_3\cos q_2)(\dot{\xi}_1-\dot{q}_1\dot{\xi}_0)+$$

$$\frac{2}{5}ma^2\dot{q}_2(\dot{\xi}_2-\dot{q}_2\dot{\xi}_0)+\frac{2}{5}ma^2(\dot{q}_3+\dot{q}_1\cos q_2)(\dot{\xi}_3-\dot{q}_3\dot{\xi}_0)+\frac{2}{5}ma^2\dot{q}_1\dot{q}_3\xi_2(-\sin q_2)+\dot{G}_N=0$$

可找到如下解

$$\xi_0=-1,\xi_s=0(s=1,2,\cdots,5),G_N=0$$

$$\xi_1=1,\xi_0=\xi_2=\xi_3=\xi_4=\xi_5=0,G_N=0$$

$$\xi_3=1,\xi_0=\xi_1=\xi_2=\xi_4=\xi_5=0,G_N=0$$

$$\xi_4=1,\xi_0=\xi_1=\xi_2=\xi_3=\xi_5=0,G_N=0$$

$$\xi_5=1,\xi_0=\xi_1=\xi_2=\xi_3=\xi_4=0,G_N=0$$

它们对应相应完整系统的 Noether 对称性。

限制方程(19.4.8)给出

$$\xi_4-\dot{q}_4\xi_0+a\{(\xi_3-\dot{q}_3\xi_0)\sin q_2\cos q_1-(\xi_2-\dot{q}_2\xi_0)\sin q_1\}=0$$

$$\xi_5-\dot{q}_5\xi_0+a\{(\xi_3-\dot{q}_3\xi_0)\sin q_2\sin q_1+(\xi_2-\dot{q}_2\xi_0)\cos q_1\}=0$$

前两个对称性满足这些限制,因此它们对应非完整系统的 Noether 对称性。

Noether 对称性导致的守恒量式(19.4.10)分别给出

$$I_{N_1}=\frac{1}{2}m(\dot{q}_4^2+\dot{q}_5^2)+\frac{1}{2}\frac{2}{5}ma^2(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2+\dot{q}_3^2+2\dot{q}_1\dot{q}_3\cos q_2)=C_1$$

$$I_{N_2}=\frac{2}{5}ma^2(\dot{q}_1+\dot{q}_3\cos q_2)=C_2$$

$$I_{N_3}=\frac{2}{5}ma^2(\dot{q}_3+\dot{q}_1\cos q_2)=C_3$$

$$I_{N_4}=m\dot{q}_4=C_4$$

$$I_{N_5}=m\dot{q}_5=C_5$$

例 3 Новосёлов 例[14]。

非完整系统的动能和势能分别为

$$T=\frac{1}{2}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2),V=\text{const.}$$

约束方程为

$$f=\dot{q}_1+bt\dot{q}_2-bq_2+t=0$$

其中 b 为常数,试研究问题的 Noether 对称性与守恒量。

解:方程(19.4.3)给出

$$\ddot{q}_1=\lambda,\ddot{q}_2=\lambda bt$$

由此和约束方程求得约束乘子

$$\lambda=-\frac{1}{1+b^2t^2}$$

广义非完整约束力为

$$\Lambda_1=-\frac{1}{1+b^2t^2},\Lambda_2=-\frac{bt}{1+b^2t^2}$$

Noether 等式(19.4.7)给出

$$L\dot{\xi}_0+\dot{q}_1(\dot{\xi}_1-\dot{q}_1\dot{\xi}_0)+\dot{q}_2(\dot{\xi}_2-\dot{q}_2\dot{\xi}_0)-\frac{1}{1+b^2t^2}(\xi_1-\dot{q}_1\xi_0)-$$

$$\frac{bt}{1+b^2t^2}(\xi_2-\dot{q}_2\xi_0)+\dot{G}_N=0$$

限制方程(19.4.8)给出

$$\xi_1-\dot{q}_1\xi_0+bt(\xi_2-\dot{q}_2\xi_0)=0$$

以上两式有解

$$\xi_0=0,\xi_1=-bt,\xi_2=1,G_N=bq_1$$

它对应非完整系统的 Noether 对称性。守恒量式(19.4.10)给出

$$I_N=\dot{q}_2-bt\dot{q}_1+bq_1=C$$

§19.5 Birkhoff 系统

Birkhoff 系统的 Noether 对称性是 Pfaff 作用量在无限小变换下的不变性,由 Noether 对称性可直接导出系统的守恒量。

19.5.1 运动微分方程

Birkhoff 方程有形式[16,17]

$$\sum_{\nu=1}^{2n}\Omega_{\mu\nu}\dot{a}^{\nu}-\frac{\partial B}{\partial a^{\mu}}-\frac{\partial R_{\mu}}{\partial t}=0\qquad(\mu=1,2,\cdots,2n)\tag{19.5.1}$$

其中

$$\Omega_{\mu\nu}=\frac{\partial R_{\nu}}{\partial a^{\mu}}-\frac{\partial R_{\mu}}{\partial a^{\nu}}\tag{19.5.2}$$

为 Birkhoff 张量。

19.5.2 Noether 对称性

取无限小变换

$$t^* = t + \Delta t, a^{\mu *} = a^\mu + \Delta a^\mu \qquad (\mu = 1, 2, \cdots, 2n) \tag{19.5.3}$$

或其展开式

$$t^* = t + \varepsilon \xi_0(t, \boldsymbol{a}), a^{\mu *} = a^\mu + \varepsilon \xi_\mu(t, \boldsymbol{a}) \tag{19.5.4}$$

Pfaff 作用量

$$A(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} \Big(\sum_{\mu=1}^{2n} R_\mu \mathrm{d}a^\mu - B\mathrm{d}t \Big) \tag{19.5.5}$$

经过变换(19.5.3)后,成为

$$A(\gamma^*) = \int_{t_0^*}^{t_1^*} \Big\{ \sum_{\mu=1}^{2n} R_\mu(t^*, a^*)\mathrm{d}a^{\mu *} - B(t^*, a^*)\mathrm{d}t^* \Big\} \tag{19.5.6}$$

作用量 A 的变分 ΔA 为差 $A(\gamma^*) - A(\gamma)$ 相对 ε 的主线性部分。根据全变分 Δ 与等时变分 δ 之间的关系,有

$$\Delta A = \delta A + \dot{A} \Delta t \tag{19.5.7}$$

于是有

$$\Delta A = \int_{t_0}^{t_1} \Big\{ \Big(\sum_{\mu=1}^{2n} R_\mu \dot{a}^\mu - B \Big) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Delta t) + \Big(\sum_{\mu=1}^{2n} \frac{\partial R_\mu}{\partial t} \dot{a}^\mu - \frac{\partial B}{\partial t} \Big) \Delta t + \sum_{\mu=1}^{2n} \Big(\sum_{\nu=1}^{2n} \frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu} \dot{a}^\nu - \frac{\partial B}{\partial a^\mu} \Big) \Delta a^\mu + \sum_{\mu=1}^{2n} R_\mu \Delta \dot{a}^\mu \Big\} \mathrm{d}t \tag{19.5.8}$$

以及

$$\Delta A = \int_{t_0}^{t_1} \Big\{ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \Big[\Big(\sum_{\mu=1}^{2n} R_\mu \dot{a}^\mu - B \Big) \Delta t + \sum_{\mu=1}^{2n} R_\mu \delta a^\mu \Big] + \sum_{\mu=1}^{2n} \Big[\sum_{\nu=1}^{2n} \Big(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu} - \frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu} \Big) \dot{a}^\nu - \frac{\partial B}{\partial a^\mu} - \frac{\partial R_\mu}{\partial t} \Big] \delta a^\mu \Big\} \mathrm{d}t \tag{19.5.9}$$

如果成立

$$\Delta A = 0 \tag{19.5.10}$$

则称无限小变换(19.5.3)是 Noether 意义下的对称变换。此时由式(19.5.8)得到

$$\Big(\sum_{\mu=1}^{2n} R_\mu \dot{a}^\mu - B \Big) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Delta t) + \Big(\sum_{\mu=1}^{2n} \frac{\partial R_\mu}{\partial t} \dot{a}^\mu - \frac{\partial B}{\partial t} \Big) \Delta t + \sum_{\mu=1}^{2n} \Big(\sum_{\nu=1}^{2n} \frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu} \dot{a}^\nu - \frac{\partial B}{\partial a^\mu} \Big) \Delta a^\mu + \sum_{\mu=1}^{2n} R_\mu \Delta \dot{a}^\mu = 0 \tag{19.5.11}$$

或者表示为如下 Noether 等式

$$\Big(\sum_{\mu=1}^{2n} \frac{\partial R_\mu}{\partial t} \dot{a}^\mu - \frac{\partial B}{\partial t} \Big) \xi_0 + \sum_{\mu=1}^{2n} \Big(\sum_{\nu=1}^{2n} \frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu} \dot{a}^\nu - \frac{\partial B}{\partial a^\mu} \Big) \xi_\mu - B \dot{\xi}_0 + \sum_{\mu=1}^{2n} R_\mu \dot{\xi}_\mu = 0 \tag{19.5.12}$$

如果成立

$$\Delta A = -\int_{t_0}^{t_1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Delta G)\mathrm{d}t \tag{19.5.13}$$

则称无限小变换(19.5.3)是 Noether 意义下的准对称变换。此时 Noether 等式为

$$\left(\sum_{\mu=1}^{2n} \frac{\partial R_\mu}{\partial t}\dot{a}^\mu - \frac{\partial B}{\partial t}\right)\xi_0 + \sum_{\mu=1}^{2n}\left(\sum_{\nu=1}^{2n} \frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu}\dot{a}^\nu - \frac{\partial B}{\partial a^\mu}\right)\xi_\mu - B\dot{\xi}_0 + \sum_{\mu=1}^{2n} R_\mu \dot{\xi}_\mu + \dot{G}_N = 0 \tag{19.5.14}$$

如果成立

$$\Delta A = -\int_{t_0}^{t_1}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Delta G) + \sum_{\mu=1}^{2n} \Lambda_\mu \delta a^\mu\right]\mathrm{d}t \tag{19.5.15}$$

其中 $\Lambda_\mu = \Lambda_\mu(t, \boldsymbol{a})$，则称无限小变换(19.5.3)为 Noether 意义下的广义准对称变换[8]。此时，Noether 等式有形式

$$\left(\sum_{\mu=1}^{2n} \frac{\partial R_\mu}{\partial t}\dot{a}^\mu - \frac{\partial B}{\partial t}\right)\xi_0 + \sum_{\mu=1}^{2n}\left(\sum_{\nu=1}^{2n} \frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu}\dot{a}^\nu - \frac{\partial B}{\partial a^\mu}\right)\xi_\mu - B\dot{\xi}_0 + \sum_{\mu=1}^{2n} R_\mu \dot{\xi}_\mu + \sum_{\mu=1}^{2n} \Lambda_\mu(\xi_\mu - \dot{a}^\mu \xi_0) + \dot{G}_N = 0 \tag{19.5.16}$$

与 Noether 等式(19.5.12)相应的 Killing 方程为

$$\sum_{\mu=1}^{2n} R_\mu \frac{\partial \xi_\mu}{\partial a^\nu} + \sum_{\mu=1}^{2n} \frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu}\xi_\mu + \frac{\partial R_\nu}{\partial t}\xi_0 - B\frac{\partial \xi_0}{\partial a^\nu} = 0 \quad (\nu = 1, 2, \cdots, 2n) \tag{19.5.17}$$

$$\frac{\partial B}{\partial t}\xi_0 + B\frac{\partial \xi_0}{\partial t} + \sum_{\mu=1}^{2n} \frac{\partial B}{\partial a^\mu}\xi_\mu - \sum_{\mu=1}^{2n} R_\mu \frac{\partial \xi_\mu}{\partial t} = 0$$

与 Noether 等式(19.5.14)相应的 Killing 方程为

$$\sum_{\mu=1}^{2n} R_\mu \frac{\partial \xi_\mu}{\partial a^\nu} + \sum_{\mu=1}^{2n} \frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu}\xi_\mu + \frac{\partial R_\nu}{\partial t}\xi_0 - B\frac{\partial \xi_0}{\partial a^\nu} + \frac{\partial G_N}{\partial a^\nu} = 0 \quad (\nu = 1, 2, \cdots, 2n) \tag{19.5.18}$$

$$\frac{\partial B}{\partial t}\xi_0 + B\frac{\partial \xi_0}{\partial t} + \sum_{\mu=1}^{2n} \frac{\partial B}{\partial a^\mu}\xi_\mu - \sum_{\mu=1}^{2n} R_\mu \frac{\partial \xi_\mu}{\partial t} - \frac{\partial G_N}{\partial t} = 0$$

与 Noether 等式(19.5.16)相应的 Killing 方程为

$$\sum_{\mu=1}^{2n} R_\mu \frac{\partial \xi_\mu}{\partial a^\nu} + \sum_{\mu=1}^{2n} \frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu}\xi_\mu + \frac{\partial R_\nu}{\partial t}\xi_0 - B\frac{\partial \xi_0}{\partial a^\nu} - \Lambda_\nu \xi_0 + \frac{\partial G_N}{\partial a^\nu} = 0 \quad (\nu = 1, 2, \cdots, 2n) \tag{19.5.19}$$

$$\frac{\partial B}{\partial t}\xi_0 + B\frac{\partial \xi_0}{\partial t} + \sum_{\mu=1}^{2n} \frac{\partial B}{\partial a^\mu}\xi_\mu - \sum_{\mu=1}^{2n} R_\mu \frac{\partial \xi_\mu}{\partial t} - \sum_{\mu=1}^{2n} \Lambda_\mu \xi_\mu - \frac{\partial G_N}{\partial t} = 0$$

19.5.3 Noether 守恒量

对于对称变换，将 Birkhoff 方程(19.5.1)代入式(19.5.9)，由积分区间的任意性，得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[\Big(\sum_{\mu=1}^{2n}R_\mu\dot{a}^\mu-B\Big)\Delta t+\sum_{\mu=1}^{2n}R_\mu\delta a^\mu\Big]=0$$

积分得

$$\Big(\sum_{\mu=1}^{2n}R_\mu\dot{a}^\mu-B\Big)\Delta t+\sum_{\mu=1}^{2n}R_\mu\delta a^\mu=\text{const.}$$

它可表示为

$$I_N=\sum_{\mu=1}^{2n}R_\mu\xi_\mu-B\xi_0=\text{const.} \tag{19.5.20}$$

对于准对称变换，有守恒量

$$I_N=\sum_{\mu=1}^{2n}R_\mu\xi_\mu-B\xi_0+G_N=\text{const.} \tag{19.5.21}$$

于是有如下结果：

命题 1 如果无限小生成元 ξ_0,ξ_μ 满足 Noether 等式(19.5.12)，或满足 Killing 方程(19.5.17)，则 Birkhoff 系统存在 Noether 守恒量式(19.5.20)。

命题 2 如果无限小生成元 ξ_0,ξ_μ 和规范函数 $G_N=G_N(t,\boldsymbol{a})$ 满足 Noether 等式(19.5.14)，或满足 Killing 方程(19.5.18)，则 Birkhoff 系统存在 Noether 守恒量式(19.5.21)。

对于广义 Birkhoff 方程

$$\sum_{\nu=1}^{2n}\Big(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu}\Big)\dot{a}^\nu-\frac{\partial B}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu}{\partial t}+\Lambda_\mu=0\qquad(\mu=1,2,\cdots,2n) \tag{19.5.22}$$

有

命题 3 如果无限小生成元 ξ_0,ξ_μ 和规范函数 $G_N=G_N(t,\boldsymbol{a})$ 满足 Noether 等式(19.5.16)，或满足 Killing 方程(19.5.19)，则广义 Birkhoff 方程(19.5.22)存在 Noether 守恒量式(19.5.21)。

19.5.4 应用举例

例 1 Hojman-Urrutia 例的 Birkhoff 表示为[16]

$$R_1=a^2+a^3,R_2=0,R_3=a^4,R_4=0$$

$$B=\frac{1}{2}[(a^3)^2+2a^2a^3-(a^4)^2]$$

试研究其 Noether 对称性与守恒量。

解：Noether 等式(19.5.14)给出

$$(\dot{a}^1-a^3)\xi_2+(\dot{a}^1-a^2-a^3)\xi_3+(\dot{a}^3+a^4)\xi_4-B\dot{\xi}_0+(a^2+a^3)\dot{\xi}_1+a^4\dot{\xi}_3+\dot{G}_N=0$$

它有如下解

$$\xi_0=0,\xi_1=\xi_4=\cos t,\xi_2=-\xi_3=\sin t,G_N=-a^3\cos t$$

$$\xi_0=0,\xi_1=\xi_4=\sin t,\xi_2=-\xi_3=-\cos t,G_N=-a^3\sin t$$

$$\xi_0=0,\xi_1=1,\xi_2=\xi_3=\xi_4=0,G_N=0$$

$$\xi_0=0,\xi_1=-t,\xi_2=\xi_4=0,\xi_3=-1,G_N=a^1$$

守恒量式(19.5.21)分别给出

$$I_{N_1}=a^2\cos t-a^4\sin t=C_1$$

$$I_{N_2}=a^2\sin t+a^4\cos t=C_2$$

$$I_{N_3}=a^2+a^3=C_3$$

$$I_{N_4}=a^1-a^4-(a^2+a^3)t=C_4$$

例 2 已知 Birkhoff 系统为

$$R_1=a^2,R_2=0,B=\frac{1}{6}t^2(a^1)^6+\frac{1}{2}\frac{(a^2)^2}{t^2}$$

试研究其 Noether 对称性与守恒量。

解:Noether 等式(19.5.14)给出

$$-\left[\frac{1}{3}t(a^1)^6-\frac{(a^2)^2}{t^3}\right]\xi_0+\dot{a}^1\xi_2-t^2(a^1)^5\xi_1-\frac{a^2}{t^2}\xi_2-$$

$$\left[\frac{1}{6}t^2(a^1)^6+\frac{1}{2}\frac{(a^2)^2}{t^2}\right]\dot{\xi}_0+a^2\dot{\xi}_1+\dot{G}_N=0$$

它有解

$$\xi_0=-t,\xi_1=\frac{1}{2}a^1,\xi_2=-\frac{1}{2}a^2,G_N=0$$

守恒量式(19.5.21)给出

$$I_N=\frac{1}{2}a^1a^2+\frac{1}{6}t^3(a^1)^6+\frac{(a^2)^2}{2t}=C$$

例 3 广义 Birkhoff 系统为

$$R_1=a^3,R_2=a^4,R_3=R_4=0,B=\frac{1}{2}(a^3)^2+\frac{1}{2}(a^4)^2$$

$$\Lambda_1=-\frac{1}{1+b^2t^2},\Lambda_2=-\frac{bt}{1+b^2t^2},\Lambda_3=\Lambda_4=0$$

其中 b 为常数,试研究其 Noether 对称性与守恒量。

解:Noether 等式(19.5.16)给出

$$(\dot{a}^1-a^3)\xi_3+(\dot{a}^2-a^4)\xi_4-B\dot{\xi}_0+a^3\dot{\xi}_1+a^4\dot{\xi}_2-\frac{1}{1+b^2t^2}(\xi_1-\dot{a}^1\xi_0)-$$

$$\frac{bt}{1+b^2t^2}(\xi_2-\dot{a}^2\xi_0)+\dot{G}_N=0$$

它有如下解

$$\xi_0=0,\xi_1=1,\xi_2=\xi_3=\xi_4=0,G_N=\frac{1}{b}\arctan bt$$

$$\xi_0=0,\xi_1=0,\xi_2=1,\xi_3=\xi_4=0,G_N=\frac{1}{2b}\ln(1+b^2t^2)$$

$$\xi_0=0,\xi_1=-t,\xi_2=0,\xi_3=-1,\xi_4=0,G_N=a^1-\frac{1}{2b^2}\ln(1+b^2t^2)$$

$$\xi_0=0,\xi_1=0,\xi_2=-t,\xi_3=0,\xi_4=-1,G_N=a^2-\frac{t}{b}+\frac{1}{b^2}\arctan bt$$

Noether 守恒量式(19.5.21)分别给出

$$I_{N_1}=a^3+\frac{1}{b}\arctan bt=C_1$$

$$I_{N_2}=a^4+\frac{1}{2b}\ln(1+b^2t^2)=C_2$$

$$I_{N_3}=-a^3t+a^1-\frac{1}{2b^2}\ln(1+b^2t^2)=C_3$$

$$I_{N_4}=-a^4t+a^2-\frac{t}{b}+\frac{1}{b^2}\arctan bt=C_4$$

§19.6 弱 Noether 对称性与守恒量

本节讨论约束力学系统的**弱 Noether 对称性**，包括 Lagrange 系统、Hamilton系统、一般完整系统、Четаев 型非完整系统，以及 Birkhoff 系统的弱 Noether 对称性与相应的守恒量。

19.6.1 Lagrange 系统

Lagrange 系统的微分方程为式(19.1.1)。设系统非奇异，即设

$$\det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial\dot{q}_s\partial\dot{q}_k}\right)\neq 0$$

则由方程可求出所有广义加速度，简记作

$$\ddot{q}_s=\alpha_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\qquad(s=1,2,\cdots,n)\tag{19.6.1}$$

系统的 Noether 等式为式(19.1.20)，即

$$L\dot{\xi}_0+X^{(1)}(L)+\dot{G}_N=0\tag{19.6.2}$$

相应的 Killing 方程为式(19.1.22)，即

$$K \equiv \frac{\partial L}{\partial t}\xi_0 + \sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial q_s}\xi_s + \left(L - \sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s\right)\left(\frac{\partial \xi_0}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial \xi_0}{\partial q_k}\dot{q}_k\right) +$$

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\left(\frac{\partial \xi_s}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial \xi_s}{\partial q_k}\dot{q}_k\right) + \frac{\partial G_N}{\partial t} + \sum_{s=1}^{n}\frac{\partial G_N}{\partial q_s}\dot{q}_s = 0 \qquad (19.6.3)$$

$$K_k \equiv \left(L - \sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s\right)\frac{\partial \xi_0}{\partial \dot{q}_k} + \sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\frac{\partial \xi_s}{\partial \dot{q}_k} + \frac{\partial G_N}{\partial \dot{q}_k} = 0 \qquad (k = 1,2,\cdots,n)$$

$$(19.6.4)$$

现对 Lagrange 系统建立如下等式

$$L\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_0 + \tilde{X}^{(1)}(L) + \frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}G_N = 0 \qquad (19.6.5)$$

其中

$$\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{s=1}^{n}\dot{q}_s\frac{\partial}{\partial q_s} + \sum_{s=1}^{n}\alpha_s\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s}$$

$$\tilde{X}^{(1)} = \xi_0\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{s=1}^{n}\xi_s\frac{\partial}{\partial q_s} + \sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_s - \dot{q}_s\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_0\right)\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s} \qquad (19.6.6)$$

如果无限小生成元 ξ_0,ξ_s 和规范函数 G_N 满足式(19.6.5),则称这种对称性为 Lagrange 系统的弱 Noether 对称性。式(19.6.5)称为弱 Noether 等式。所谓弱 Noether 等式,实际上是 Noether 等式中出现的 $\ddot{q}_s$ 借助微分方程用 α_s 替代的结果。展开式(19.6.5),并利用式(19.6.3)和式(19.6.4),得到

$$K + \sum_{k=1}^{n}K_k\alpha_k = 0 \qquad (19.6.7)$$

于是有如下结果:

命题 1 满足 Killing 方程(19.1.22)的 Noether 对称性必为弱 Noether 对称性。

命题 2 如果生成元 ξ_0,ξ_s 不依赖于广义速度,则弱 Noether 等式(19.6.5)与 Noether 等式(19.6.2)一致。

命题 3[18] 弱 Noether 对称性可以导致 Noether 守恒量式(19.1.24)。

例 1 二自由度系统 Lagrange 函数为

$$L = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - q_2$$

试研究系统的弱 Noether 对称性与守恒量。

解:弱 Noether 等式(19.6.5)给出

$$L\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_0 + \dot{q}_1\left(\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_1 - \dot{q}_1\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_0\right) + \dot{q}_2\left(\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_2 - \dot{q}_2\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_0\right) - \xi_2 + \frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}G_N = 0$$

它有如下解

$$\xi_0=0,\xi_1=1,\xi_2=0,G_N=0$$

$$\xi_0=\dot{q}_1,\xi_1=\xi_2=0,G_N=0$$

$$\xi_0=0,\xi_1=\frac{1}{2}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2)+q_2,\xi_2=0,G_N=\dot{q}_2+t$$

守恒量式(19.1.24)分别给出

$$I_{N_1}=\dot{q}_1=C_1$$

$$I_{N_2}=-\left\{\frac{1}{2}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2)+q_2\right\}\dot{q}_1=C_2$$

$$I_{N_3}=\left\{\frac{1}{2}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2)+q_2\right\}\dot{q}_1+\dot{q}_2+t=C_3$$

19.6.2 Hamilton 系统

Hamilton 系统的方程为

$$\dot{q}_s=\frac{\partial H}{\partial p_s}=Q(t,\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}),\dot{p}_s=-\frac{\partial H}{\partial q_s}=P_s(t,\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})\qquad(s=1,2,\cdots,n)\tag{19.6.8}$$

Noether 等式为式(19.2.12),即

$$\sum_{s=1}^{n}p_s\dot{\xi}_s-\frac{\partial H}{\partial t}\xi_0-\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial q_s}\xi_s-H\dot{\xi}_0+\dot{G}_N=0\tag{19.6.9}$$

弱 Noether 等式为

$$\sum_{s=1}^{n}p_s\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_s-\frac{\partial H}{\partial t}\xi_0-\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial q_s}\xi_s-H\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_0+\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}G_N=0\tag{19.6.10}$$

其中

$$\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial}{\partial t}+\sum_{s=1}^{n}Q_s\frac{\partial}{\partial q_s}+\sum_{s=1}^{n}P_s\frac{\partial}{\partial p_s}\tag{19.6.11}$$

令

$$K=\sum_{s=1}^{n}p_s\frac{\partial\xi_s}{\partial t}+\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}p_s\frac{\partial\xi_s}{\partial q_k}\frac{\partial H}{\partial p_k}-\frac{\partial H}{\partial t}\xi_0-\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial q_s}\xi_s-H\frac{\partial\xi_0}{\partial t}-H\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\xi_0}{\partial q_k}\frac{\partial H}{\partial p_k}+\frac{\partial G_N}{\partial t}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial G_N}{\partial q_k}\frac{\partial H}{\partial p_k}\tag{19.6.12}$$

$$K_k=\sum_{s=1}^{n}p_s\frac{\partial\xi_s}{\partial p_k}-H\frac{\partial\xi_0}{\partial p_k}+\frac{\partial G_N}{\partial p_k}\tag{19.6.13}$$

这样,弱 Noether 等式(19.6.10)可表示为

$$K+\sum_{k=1}^{n}K_kP_k=0 \qquad (19.6.14)$$

因此有如下结果：

命题 4 满足 Killing 方程(19.2.14)的 Noether 对称性必为弱 Noether 对称性。

命题 5 如果生成元 ξ_0，ξ_s 不依赖于广义动量，则弱 Noether 等式(19.6.10)与 Noether 等式(19.6.9)一致。

命题 6 弱 Noether 对称性可导致 Noether 守恒量式(19.2.16)。

例 2 Hamilton 系统为

$$H=\frac{1}{2}(p_1^2+p_2^2)+q_2$$

试研究弱 Noether 对称性与守恒量。

解：弱 Noether 等式(19.6.10)给出

$$p_1\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_1+p_2\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_2-\xi_2-H\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_0+\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}G_N=0$$

它有解

$$\xi_0=p_1,\xi_1=\xi_2=0,G_N=0$$
$$\xi_0=0,\xi_1=0,\xi_2=1,G_N=p_2+2t$$
$$\xi_0=0,\xi_1=p_1+t,\xi_2=0,G_N=-p_1t$$

守恒量式(19.2.16)分别给出

$$I_{N_1}=-p_1\left[\frac{1}{2}(p_1^2+p_2^2)+q_2\right]=C_1$$
$$I_{N_2}=p_2+p_2+2t=C_2$$
$$I_{N_3}=p_1(p_1+t)-p_1t=C_3$$

19.6.3 一般完整系统

一般完整系统的微分方程为式(19.3.1)，对非奇异系统，可解出所有广义加速度，记作

$$\ddot{q}_s=\alpha_s(t,q_k,\dot{q}_k) \qquad (s,k=1,2,\cdots,n) \qquad (19.6.15)$$

Noether 等式为式(19.3.4)，即

$$L\dot{\xi}_0+X^{(1)}(L)+\sum_{s=1}^{n}Q_s(\xi_s-\dot{q}_s\xi_0)+\dot{G}_N=0 \qquad (19.6.16)$$

弱 Noether 等式为

$$L\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_0+\widetilde{\mathrm{X}}^{(1)}(L)+\sum_{s=1}^{n}Q_s(\xi_s-\dot{q}_s\xi_0)+\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}G_N=0 \tag{19.6.17}$$

类似于前面讨论,有如下结果:

命题 7 满足 Killing 方程(19.3.5)的 Noether 对称性必为弱 Noether 对称性。

命题 8 如果生成元 ξ_0,ξ_s 不依赖于广义速度,则弱 Noether 等式(19.6.17)与 Noether 等式(19.6.16)一致。

命题 9 弱 Noether 对称性可导致 Noether 守恒量式(19.1.24)。

例 3 二自由度系统为

$$L=\frac{1}{2}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2)+\frac{1}{2}q_1^2,Q_1=0,Q_2=\dot{q}_1$$

试研究其弱 Noether 对称性及守恒量。

解:弱 Noether 等式(19.6.17)给出

$$L\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_0+\dot{q}_1\left(\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_1-\dot{q}_1\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_0\right)+\dot{q}_2\left(\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_2-\dot{q}_2\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_0\right)+q_1\xi_1+$$

$$\dot{q}_1(\xi_2-\dot{q}_2\xi_0)+\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}G_N=0$$

它有如下解

$$\xi_0=\xi_1=0,\xi_2=\dot{q}_2-q_1,G_N=-q_1(\dot{q}_2-q_1)$$

$$\xi_0=\xi_1=0,\xi_2=(q_1+\dot{q}_1)\exp(-t),G_N=-q_1(q_1+\dot{q}_1)\exp(-t)$$

相应的守恒量分别为

$$I_{N_1}=\dot{q}_2(\dot{q}_2-q_1)-q_1(\dot{q}_2-q_1)=(\dot{q}_2-q_1)^2=C_1$$

$$I_{N_2}=\dot{q}_2(q_1+\dot{q}_1)\exp(-t)-q_1(q_1+\dot{q}_1)\exp(-t)$$
$$=(\dot{q}_2-q_1)(q_1+\dot{q}_1)\exp(-t)=C_2$$

19.6.4 Четаев 型非完整系统

与 Четаев 型非完整系统(19.4.1),(19.4.3)相应的完整系统的方程为式(19.4.5)。相应完整系统的 Noether 等式为式(19.4.7),即

$$L\dot{\xi}_0+\mathrm{X}^{(1)}(L)+\sum_{s=1}^{n}(Q_s+\Lambda_s)(\xi_s-\dot{q}_s\xi_0)+\dot{G}_N=0 \tag{19.6.18}$$

弱 Noether 等式为

$$L\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_0+\widetilde{\mathrm{X}}^{(1)}(L)+\sum_{s=1}^{n}(Q_s+\Lambda_s)(\xi_s-\dot{q}_s\xi_0)+\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}G_N=0 \tag{19.6.19}$$

类似于前面讨论,有如下结果:

命题 10 满足 Killing 方程(19. 4. 9)的 Noether 对称性必为弱 Noether 对称性。

命题 11 如果生成元 ξ_0,ξ_s 不依赖于广义速度，则弱 Noether 等式(19. 6. 19)与 Noether 等式(19. 6. 18)一致。

命题 12 弱 Noether 对称性可导致 Noether 守恒量式(19. 4. 10)。

例 4 Новосёлов 例。

解：相应完整系统的弱 Noether 等式为

$$L\frac{\bar{d}}{dt}\xi_0+\dot{q}_1\left(\frac{\bar{d}}{dt}\xi_1-\dot{q}_1\frac{\bar{d}}{dt}\xi_0\right)+\dot{q}_2\left(\frac{\bar{d}}{dt}\xi_2-\dot{q}_2\frac{\bar{d}}{dt}\xi_0\right)-\frac{1}{1+b^2t^2}(\xi_1-\dot{q}_1\xi_0)-\frac{bt}{1+b^2t^2}(\xi_2-\dot{q}_2\xi_0)+\frac{\bar{d}}{dt}G_N=0$$

它有解

$$\xi_0=0,\xi_1=-bt(\dot{q}_2-bt\dot{q}_1+bq_1),\xi_2=\dot{q}_2-bt\dot{q}_1+bq_1$$
$$G_N=bq_1(\dot{q}_2-bt\dot{q}_1+bq_1)$$

守恒量(19. 4. 10)给出

$$I_N=(\dot{q}_2-bt\dot{q}_1+bq_1)^2=C$$

19. 6. 5 Birkhoff 系统

假设 Birkhoff 方程(19. 5. 1)非奇异，即设

$$\det(\Omega_{\mu\nu})\neq 0$$

则可解出所有 $\dot{a}^\mu$，有

$$\dot{a}^\mu=f_\mu(t,\boldsymbol{a})\qquad(\mu=1,2,\cdots,2n)\tag{19. 6. 20}$$

其中

$$f_\mu=\sum_{\nu=1}^{2n}\Omega^{\mu\nu}\left(\frac{\partial B}{\partial a^\nu}+\frac{\partial R_\nu}{\partial t}\right)$$
$$\sum_{\rho=1}^{2n}\Omega^{\mu\rho}\Omega_{\rho\nu}=\delta^\mu_\nu\tag{19. 6. 21}$$

系统的 Noether 等式为式(19. 5. 14)，如果将其中的 $\dot{a}^\mu$ 用 f_μ 替代，则得到弱 Noether 等式

$$\left(\sum_{\mu=1}^{2n}\frac{\partial R_\mu}{\partial t}f_\mu-\frac{\partial B}{\partial t}\right)\xi_0+\sum_{\mu=1}^{2n}\left(\sum_{\nu=1}^{2n}\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu}f_\nu-\frac{\partial B}{\partial a^\mu}\right)\xi_\mu-B\frac{\bar{d}}{dt}\xi_0+\sum_{\mu=1}^{2n}R_\mu\frac{\bar{d}}{dt}\xi_\mu+\frac{\bar{d}}{dt}G_N=0\tag{19. 6. 22}$$

其中

$$\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial}{\partial t}+\sum_{\mu=1}^{2n} f_\mu \frac{\partial}{\partial a^\mu} \tag{19.6.23}$$

类似于前面讨论,有如下结果:

命题 13 满足 Killing 方程(19.5.18)的 Noether 对称性必为弱 Noether 对称性。

命题 14 如果生成元 ξ_0,ξ_μ 不依赖于 $a^\mu(\mu=1,2,\cdots,2n)$,则弱 Noether 等式(19.6.22)与 Noether 等式(19.5.14)一致。

命题 15 弱 Noether 对称性可导致 Noether 守恒量式(19.5.21)。

例 5 研究 Hojman-Urrutia 例的弱 Noether 对称性与守恒量。

解:弱 Noether 等式(19.6.22)给出

$$-a^2\xi_3-B\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_0+(a^2+a^3)\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_1+a^4\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_3+\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}G_N=0$$

它有解

$$\xi_0=0,\xi_1=a^2\cos t-a^4\sin t,\xi_2=\xi_3=\xi_4=0,G_N=0$$

$$\xi_0=a^2+a^3,\xi_1=\xi_2=\xi_3=\xi_4=0,G_N=0$$

守恒量式(19.5.21)分别给出

$$I_{N_1}=(a^2+a^3)(a^2\cos t-a^4\sin t)=C_1$$

$$I_{N_2}=-(a^2+a^3)\frac{1}{2}\{(a^3)^2+2a^2a^3-(a^4)^2\}=C_2$$

本章讨论了各类约束力学系统的 Noether 对称性以及由 Noether 对称性直接导致的 Noether 守恒量。Noether 理论的优势在于,有一个 Noether 对称性,便可找到一个相应的守恒量。反之亦然。Noether 理论也可用于求解一般的常微分方程,只要将常微分方程表示为力学系统的方程[19]。有关 Noether 对称性研究可参见文献[20~36]。

思考题

19.1 对约束力学系统,如果 Killing 方程不满足,则没有 Noether 对称性。这种提法对吗?

19.2 一维谐振子的运动可表示为 Lagrange 系统 $L=\frac{1}{2}(\dot{q}^2-q^2)$,也可表示为一般完整系统 $L=\frac{1}{2}\dot{q}^2,Q=-q$。这两个系统的 Noether 等式是否一样?

如不一样，在怎样的生成元下可以变得一样？

19.3 Lagrange 系统 $L=\frac{1}{2}(\dot{q}^2-q^2)$ 与 Birkhoff 系统 $R_1=a^2, R_2=0$，$B=\frac{1}{2}(a^1)^2+\frac{1}{2}(a^2)^2$ 都表示一维谐振子的运动。可用 Lagrange 系统的 Noether 对称性来研究，也可用 Birkhoff 系统的 Noether 对称性来研究。问哪个比较好？

19.4 Birkhoff 系统是否一定为广义 Hamilton 系统？

19.5 对奇数维广义 Hamilton 系统，能否建立 Noether 定理？

习题

19.1 平面 Kepler 问题的 Lagrange 函数为

$$L=\frac{1}{2}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2)-\mu(q_1^2+q_2^2)^{-\frac{1}{2}},(q_1^2+q^2)^{\frac{1}{2}}\neq 0$$

其中 μ 为常数，试研究问题的 Noether 对称性与守恒量。

19.2 单自由度系统的 Lagrange 函数为

$$L=\frac{1}{2}\dot{q}^2\exp(-\gamma t)$$

其中 γ 为常数，试研究系统的 Noether 对称性与守恒量。

19.3 二自由度系统的 Lagrange 函数为

$$L=\frac{1}{2}(\dot{q}_1^2+q_2^2\dot{q}_2^2)-f(q_2)$$

试研究其 Noether 对称性与守恒量。

19.4 二自由度非保守系统为

$$L=\frac{1}{2}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2)+\frac{1}{2}q_1^2, Q_1=0, Q_2=\dot{q}_1$$

试研究其 Noether 对称性与守恒量。

19.5 单自由度系统 Hamilton 函数为

$$H=\frac{1}{2}p^2\exp(-\gamma t)+\frac{1}{2}\omega^2q^2\exp(\gamma t)$$

其中 γ,ω 为常数，试研究其 Noether 对称性与守恒量。

19.6 Birkhoff 系统为

$$R_1=a^2, R_2=0, B=\frac{1}{3}(a^2)^3-\frac{1}{4}(a^1)^4$$

试研究系统的 Noether 对称性与守恒量。

19.7 Birkhoff 系统为

$$R_1=a^2, R_2=0, B=\frac{1}{2t}(a^2)^2$$

试研究其 Noether 对称性与守恒量。

参考文献

[1] Noether AE. Invariante Variationsprobleme[J]. Nachr. Akad. Wiss. Gött. Math-Phys, 1918, KI(2): 235-258.

[2] Полак ЛС. Вариационные Принципы Механики[M]. Москва: ГИФМЛ, 1959.

[3] Djukić Dj S, Vujanović BD. Noether's theory in classical nonconservative mechanics[J]. Acta Mech., 1975, 23: 17-27.

[4]李子平.约束系统的变换性质[J].物理学报,1981,30(12):1659-1671.

[5]李子平.经典和量子约束系统及其对称性质[J].北京:北京工业大学出版社,1993.

[6]罗勇,赵跃宇.非线性非完整约束系统的广义 Noether 定理[J].北京工业学院学报,1986,6(3):41-47.

[7]刘端.非线性非保守动力学系统的 Noether 定理及其逆定理[J].中国科学,A辑,1990,20(11):1189-1197.

[8] Mei FX. The Noether's theory of Birkhoffian systems. Science in China, Serie A, 1993, 36(12): 1456-1467.

[9]赵跃宇,梅凤翔.力学系统的对称性与不变量[M].北京:科学出版社,1999.

[10]梅凤翔.李群和李代数对约束力学系统的应用[M].北京:科学出版社,1999.

[11]梅凤翔.约束力学系统的对称性与守恒量[M].北京:北京理工大学出版社,2004.

[12]楼智美.用 Noether 定理确定各向同性谐振子的守恒量[J].力学与实践,2003,25(2):72-73.

[13] ЛурьеАИ Аналитическая Механика[M]. Москва: ГИФМЛ, 1961.

[14] Новосёлов ВС. Вариационные Методы в Механике[M]. Ленинград: ЛГУ, 1966.

[15]梅凤翔.非完整系统力学基础[M].北京:北京工业学院出版社,1985.

[16] Santilli RM. Foundations of Theoretical Mechanics Ⅱ[M]. New York: Springer-Verlag, 1983.

[17]梅凤翔,史荣昌,张永发,吴惠彬. Birkhoff 系统动力学[M].北京:北京理工大学出版社,1996.

[18]梅凤翔,水小平. Lagrange 系统的弱 Noether 对称性[J].北京理工大学学报,2006,26(4):285-287.

[19]梅凤翔,吴惠彬. 微分方程的分析力学方法[M]. 北京:科学出版社,2012.
[20]张解放. 高阶非完整非保守系统的广义 Noether 定理[J]. 科学通报,1989,34(22):1756-1757.
[21]刘文森. 经典力学系统的对称性和守恒定律[J]. 山西大学学报,1978,(1):27-34.
[22]张宏彬. 单面约束 Birkhoff 系统的 Noether 理论[J]. 物理学报,2001,50(10):1837-1841.
[23]张毅,梅凤翔. 单面约束力学系统的 Noether 理论[J]. 应用数学和力学,2000,21(1):53-60.
[24]葛伟宽. Poincaré-Chetaev 方程的 Noether 对称性[J]. 物理学报,2002,51(6):1156-1158.
[25]罗绍凯,郭永新,梅凤翔. 非完整系统的 Noether 对称性与 Hojman 守恒量[J]. 物理学报,2004,53(5):1271-1275.
[26]吴惠彬,梅凤翔. 关于 Noether 对称性的两种理解[J]. 物理学报,2006,55(8):3825-3828.
[27]Shang M, Chen XW. Noether's theorem and one-step corrections method for holonomic system[J]. Chin Phys,2006,15(12):2788-2791.
[28]Ma SJ, Yang XH, Yang R. Noether symmetry of three order Lagrangian equations[J]. Comm Theor Phys, 2006,46(2):309-312.
[29]Chen XW, Zhang RC,Mei FX. Perturbation to the symmetries and adiabatic invariants of Birkhoff systems[J]. Acta Mech Sin,2000,16(3):282-288.
[30]梅凤翔. 完整力学系统的三类对称性与三类守恒量[J]. 动力学与控制学报,2004,2(1):28-31.
[31]方建会,丁宁,王鹏. 非完整力学系统的 Noether-Lie 对称性[J]. 物理学报,2006,55(8):3817-3820.
[32]葛伟宽,梅凤翔,作战微分方程模型的 Noether 对称性[J]. 兵工学报,2001,22(2):241-243.
[33]梁景辉. 单面非完整系统相对于非惯性系的 Noether 定理[J]. 兵工学报,2001,22(3):352-354.
[34]许志新,梅凤翔. 广义 Chaplygin 系统的 Noether 对称性[J]. 北京理工大学学报,2002,22(2):143-146.
[35]傅景礼,陈立群,罗绍凯,陈向炜,王新民. 相对论 Birkhoff 系统动力学研究[J]. 物理学报,2001,50(12):2289-2295.
[36]Xie JF, Gang TQ, Mei FX. Weak Noether symmetry for nonholonomic systems of non-Chetaev type[J]. Chin Phys B,2008,17(9):3175-3179.

20

Lie 对称性方法

19 世纪末，著名数学家 Lie MS(1842—1899)研究了微分方程在无限小群变换下的不变性。专著[1,2]从数学角度研究并发展了 Lie 理论。1979 年，Lutzky 将 Lie 理论应用于力学系统的运动微分方程[3]。专著[4～6]研究了各类约束力学系统的 Lie 对称性与守恒量。本章讨论 Lagrange 系统、Hamilton 系统、一般完整系统、Четаев 型非完整系统、Birkhoff 系统，以及广义 Hamilton 系统的 Lie 对称性及守恒量。

§20.1 Lagrange 系统

Lagrange 系统的 **Lie 对称性**在一定条件下可导致 Hojman 型守恒量和 Noether 守恒量。

20.1.1 运动微分方程

Lagrange 系统的运动微分方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial L}{\partial q_s}=0 \qquad (s=1,2,\cdots,n) \tag{20.1.1}$$

其中 $L=L(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$。设系统非奇异，即设

$$\det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_s \partial \dot{q}_k}\right)\neq 0 \tag{20.1.2}$$

则展开方程(20.1.1)后可求出所有广义加速度，简记作

$$\ddot{q}_s=\alpha_s(t,q_k,\dot{q}_k) \qquad (s,k=1,2,\cdots,n) \tag{20.1.3}$$

20.1.2 Lie 对称性

Lie 对称性是微分方程在无限小变换下的一种不变性。取无限小变换为

$$t^*=t+\varepsilon\xi_0(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}),\ q_s^*(t^*)=q_s(t)+\varepsilon\xi_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) \quad (s=1,2,\cdots,n) \tag{20.1.4}$$

方程(20.1.3)的Lie对称性**确定方程**表示为

$$X^{(2)}(\ddot{q}_s)=X^{(1)}(\alpha_s)\qquad(s=1,2,\cdots,n)\quad(20.1.5)$$

其中

$$X^{(1)}=\xi_0\frac{\partial}{\partial t}+\sum_{s=1}^{n}\xi_s\frac{\partial}{\partial q_s}+\sum_{s=1}^{n}(\dot{\xi}_s-\dot{q}_s\dot{\xi}_0)\frac{\partial}{\partial\dot{q}_s}\quad(20.1.6)$$

$$X^{(2)}=X^{(1)}+\sum_{s=1}^{n}(\ddot{\xi}_s-\dot{q}_s\ddot{\xi}_0-2\ddot{q}_s\dot{\xi}_0)\frac{\partial}{\partial\ddot{q}_s}$$

方程(20.1.5)可表示为

$$\ddot{\xi}_s-\dot{q}_s\ddot{\xi}_0-2\alpha_s\dot{\xi}_0=\frac{\partial\alpha_s}{\partial t}\xi_0+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\alpha_s}{\partial q_k}\xi_k+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\alpha_s}{\partial\dot{q}_k}(\dot{\xi}_k-\dot{q}_k\dot{\xi}_0)$$
$$(s=1,2,\cdots,n)\qquad(20.1.7)$$

取时间不变的特殊无限小变换

$$t^*=t,q_s^*(t^*)=q_s(t)+\varepsilon\xi_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\quad(20.1.8)$$

则方程(20.1.3)的Lie对称性确定方程表示为

$$\frac{\bar{d}}{dt}\frac{\bar{d}}{dt}\xi_s=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\alpha_s}{\partial q_k}\xi_k+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\alpha_s}{\partial\dot{q}_k}\frac{\bar{d}}{dt}\xi_k\qquad(s=1,2,\cdots,n)\quad(20.1.9)$$

其中

$$\frac{\bar{d}}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+\sum_{s=1}^{n}\dot{q}_s\frac{\partial}{\partial q_s}+\sum_{s=1}^{n}\alpha_s\frac{\partial}{\partial\dot{q}_s}\quad(20.1.10)$$

20.1.3 Hojman型守恒量

在特殊无限小变换(20.1.8)下,在一定条件下Lie对称性可导致Hojman型守恒量,有如下结果:

命题1 在时间不变的特殊无限小变换(20.1.8)下,如果生成元ξ_s满足Lie对称性的确定方程(20.1.9),并且存在某函数$\mu=\mu(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$使得

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial\alpha_s}{\partial\dot{q}_s}+\frac{\bar{d}}{dt}\ln\mu=0\quad(20.1.11)$$

则Lie对称性导致Hojman型守恒量

$$I_H=\frac{1}{\mu}\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial}{\partial q_s}(\mu\xi_s)+\frac{1}{\mu}\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial}{\partial\dot{q}_s}\left(\mu\frac{\bar{d}}{dt}\xi_s\right)=\text{const.}\quad(20.1.12)$$

证明:将式(20.1.12)按方程(20.1.3)求对时间的导数,得

$$\frac{\bar{d}}{dt}I_H=\frac{\bar{d}}{dt}\left(\frac{1}{\mu}\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial\mu}{\partial q_s}\xi_s\right)+\sum_{s=1}^{n}\frac{\bar{d}}{dt}\frac{\partial\xi_s}{\partial q_s}+\frac{\bar{d}}{dt}\left[\frac{1}{\mu}\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial\mu}{\partial\dot{q}_s}\frac{\bar{d}}{dt}\xi_s-\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial}{\partial\dot{q}_s}\frac{\bar{d}}{dt}\xi_s\right]$$
$$(20.1.13)$$

容易证明下式

$$\frac{\bar{d}}{dt}\left(\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial}{\partial\dot{q}_s}\frac{\bar{d}}{dt}\xi_s\right)=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial}{\partial\dot{q}_s}\frac{\bar{d}}{dt}\left(\frac{\bar{d}}{dt}\xi_s\right)-\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial}{\partial q_s}\frac{\bar{d}}{dt}\xi_s-\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\alpha_s}{\partial\dot{q}_k}\frac{\partial}{\partial\dot{q}_s}\left(\frac{\bar{d}}{dt}\xi_s\right)$$

$$\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\Big(\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial\xi_s}{\partial q_s}\Big)=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial}{\partial q_s}\Big(\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_s\Big)-\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\alpha_k}{\partial q_s}\frac{\partial\xi_s}{\partial\dot{q}_k}\tag{20.1.14}$$

将式(20.1.9)对$\dot{q}_s$求偏导数,并求 s 求和,得

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial}{\partial\dot{q}_s}\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\Big(\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_s\Big)=\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial\dot{q}_s}\Big(\frac{\partial\alpha_s}{\partial q_k}\xi_k\Big)+\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial\dot{q}_s}\Big(\frac{\partial\alpha_s}{\partial\dot{q}_k}\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_k\Big)\tag{20.1.15}$$

将式(20.1.14)和(20.1.15)代入式(20.1.13),得

$$\begin{aligned}\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}I_H=&\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\Big(\sum_{s=1}^{n}\frac{1}{\mu}\frac{\partial\mu}{\partial q_s}\xi_s\Big)+\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\Big(\frac{1}{\mu}\frac{\partial\mu}{\partial\dot{q}_s}\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_s\Big)+\\&\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2\partial_s}{\partial q_k\partial\dot{q}_s}\xi_k+\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2\alpha_s}{\partial\dot{q}_k\partial\dot{q}_s}\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_k\end{aligned}\tag{20.1.16}$$

利用式(20.1.11),得

$$\begin{aligned}&\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\sum_{s=1}^{n}\Big(\frac{1}{\mu}\frac{\partial\mu}{\partial q_s}\xi_s\Big)=-\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\alpha_s}{\partial q_k\partial\dot{q}_s}\xi_k+\frac{1}{\mu}\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial\mu}{\partial q_s}\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_s-\frac{1}{\mu}\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\mu}{\partial\dot{q}_k}\frac{\partial\alpha_k}{\partial q_s}\xi_s\\&\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\sum_{s=1}^{n}\Big(\frac{1}{\mu}\frac{\partial\mu}{\partial\dot{q}_s}\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_s\Big)=-\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2\alpha_s}{\partial\dot{q}_k\partial\dot{q}_s}\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_k-\frac{1}{\mu}\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\alpha_k}{\partial\dot{q}_s}\frac{\partial\mu}{\partial\dot{q}_k}\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_s+\\&\qquad\frac{1}{\mu}\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial\mu}{\partial\dot{q}_s}\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\Big(\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_s\Big)-\frac{1}{\mu}\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial\mu}{\partial q_s}\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_s\end{aligned}\tag{20.1.17}$$

将式(20.1.17)代入式(20.1.16),最终得到

$$\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}I_H=\frac{1}{\mu}\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial\mu}{\partial\dot{q}_s}\Big\{\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\Big(\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_s\Big)-\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\alpha_s}{\partial q_k}\xi_k-\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\alpha_s}{\partial\dot{q}_k}\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_k\Big\}=0$$

证毕。

在命题 1 中取 $\mu=\mu(\boldsymbol{q})$时,成为文献[7]中的定理,即 Hojman 原来的定理。

20.1.4 Noether 守恒量

对 Lagrange 系统,如果 Lie 对称性是 Noether 对称性,即可导致 Noether 守恒量,有如下结果:

命题 2 对 Lagrange 系统,如果 Lie 对称性的生成元 ξ_0,ξ_s 以及规范函数 $G_N=G_N(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$满足如下**结构方程**

$$L\dot{\xi}_0+X^{(1)}(L)+\dot{G}_N=0\tag{20.1.18}$$

则 Lie 对称性导致 Noether 守恒量

$$I_N=L\xi_0+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_s}(\xi_s-\dot{q}_s\xi_0)+G_N=\text{const.}\tag{20.1.19}$$

20.1.5 应用举例

例 1 单自由度系统的 Lagrange 函数为

$$L=\frac{1}{2}\dot{q}^2\exp(-\gamma t)$$

其中 γ 为常数，试研究 Lie 对称性导致的守恒量。

解：首先，研究 Hojman 型守恒量。微分方程为

$$\ddot{q}=\gamma\dot{q}$$

Lie 对称性的确定方程(20.1.9)给出

$$\frac{\bar{d}}{dt}\left(\frac{\bar{d}}{dt}\xi\right)=\gamma\frac{\bar{d}}{dt}\xi$$

它有如下解

$$\xi=1 \tag{a}$$

$$\xi=\frac{1}{\gamma}\exp(\gamma t) \tag{b}$$

$$\xi=(\gamma q-\dot{q})^2 \tag{c}$$

方程(20.1.11)给出

$$\gamma+\frac{\bar{d}}{dt}\ln\mu=0$$

它有如下解

$$\mu=\exp(-\gamma t) \tag{d}$$

$$\mu=\dot{q}\exp(-2\gamma t) \tag{e}$$

$$\mu=(\gamma q-\dot{q})\exp(-\gamma t) \tag{f}$$

由式(a)，(d)，利用命题 1，得到 Hojman 型守恒量

$$I_H=0$$

它是平凡的。由式(b)，(e)，利用命题 1，得到

$$I_H=[\dot{q}\exp(-\gamma t)]^{-1}=c_1$$

由式(c)，(d)，得

$$I_H=2\gamma(\gamma q-\dot{q})=c_2$$

其次，研究 Noether 守恒量。Lie 对称性的确定方程(20.1.7)给出

$$\ddot{\xi}-\dot{q}\ddot{\xi}_0-2\gamma\dot{q}\dot{\xi}_0=\gamma(\dot{\xi}-\dot{q}\dot{\xi}_0) \tag{g}$$

Noether 等式(20.1.18)给出

$$L\dot{\xi}_0-\gamma\xi_0\dot{q}^2\exp(-\gamma t)+\dot{q}\exp(-\gamma t)(\dot{\xi}-\dot{q}\dot{\xi}_0)+\dot{G}_N=0$$

式(g)，(h)有如下解 (h)

$$\xi_0=0,\xi=1,G_N=0 \tag{i}$$

$$\xi_0=0,\xi=-\exp(\gamma t),G_N=\gamma q \tag{j}$$

Noether 守恒量式(20.1.19)分别给出

$$I_{N_1}=\dot{q}\exp(-\gamma t)=c_3$$

$$I_{N_2}=\gamma q-\dot{q}=c_4$$

例 2 Emden 方程为

$$\ddot{q}+\frac{2}{t}\dot{q}+q^5=0$$

试研究 Lie 对称性导致的守恒量。

解：Lie 对称性的确定方程(20.1.7)给出

$$\ddot{\xi}-\dot{q}\ddot{\xi}_0-2\left(-\frac{2}{t}\dot{q}-q^5\right)\dot{\xi}_0=\frac{2}{t^2}\dot{q}\xi_0-\frac{2}{t}(\dot{\xi}-\dot{q}\dot{\xi}_0)-5q^4\xi$$

它有解

$$\xi_0=-2t,\xi=q$$

Emden 方程的 Lagrange 函数为

$$L=t^2\left(\frac{1}{2}\dot{q}^2-\frac{1}{6}q^6\right)$$

相应的 Noether 等式(20.1.18)给出

$$L\dot{\xi}_0+t(\dot{q}^2-\frac{1}{3}q^6)\xi_0-t^2q^5\xi+t^2\dot{q}(\dot{\xi}-\dot{q}\dot{\xi}_0)+\dot{G}_N=0$$

将已求得的 Lie 对称性生成元代入上式，得

$$G_N=0$$

Noether 守恒量式(20.1.19)给出

$$\begin{aligned}I_N&=t^2\left(\frac{1}{2}\dot{q}^2-\frac{1}{b}q^6\right)(-2t)+t^2\dot{q}(q+2t\dot{q})\\&=t^2q\dot{q}+t^3\dot{q}^2+\frac{1}{3}t^3q^6=c\end{aligned}$$

§ 20.2 Hamilton 系统

Hamilton 系统的 Lie 对称性在一定条件下可导致 Hojman 型守恒量和 Noether 守恒量。

20.2.1 运动微分方程

Hamilton 系统的运动微分方程为

$$\dot{q}_s=\frac{\partial H}{\partial p_s},\dot{p}_s=-\frac{\partial H}{\partial q_s}\qquad(s=1,2,\cdots,n)\tag{20.2.1}$$

展开方程(20.2.1),并记作

$$\dot{q}_s=g_s(t,\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}),\dot{p}_s=h_s(t,\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}) \qquad (s=1,2,\cdots,n) \tag{20.2.2}$$

20.2.2 Lie对称性

Lie对称性是微分方程在群的无限小变换下的一种不变性。

取无限小变换

$$\begin{aligned} t^* &= t+\varepsilon\xi_0(t,\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}) \\ q_s^*(t^*) &= q_s(t)+\varepsilon\xi_s(t,\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}) \\ p_s^*(t^*) &= p_s(t)+\varepsilon\eta_s(t,\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}) \end{aligned} \tag{20.2.3}$$

Hamilton方程(20.2.1)在无限小变换(20.2.3)下的Lie对称性确定方程表示为

$$\mathrm{X}^{(1)}\left(\dot{q}_s-\frac{\partial H}{\partial p_s}\right)=0,X^{(1)}\left(\dot{p}_s+\frac{\partial H}{\partial q_s}\right)=0 \quad (s=1,2,\cdots,n) \tag{20.2.4}$$

其中

$$\mathrm{X}^{(1)}=\xi_0\frac{\partial}{\partial t}+\sum_{k=1}^{n}\xi_k\frac{\partial}{\partial q_k}+\sum_{k=1}^{n}\eta_k\frac{\partial}{\partial p_k}+\sum_{k=1}^{n}\left(\dot{\xi}_k-\frac{\partial H}{\partial p_k}\dot{\xi}_0\right)\frac{\partial}{\partial\dot{q}_k}+\sum_{k=1}^{n}\left(\dot{\eta}_k+\frac{\partial H}{\partial q_k}\dot{\xi}_0\right)\frac{\partial}{\partial\dot{p}_k} \tag{20.2.5}$$

展开方程(20.2.4),得

$$\dot{\xi}_s-\frac{\partial H}{\partial p_s}\dot{\xi}_0=\frac{\partial^2 H}{\partial p_s\partial t}\xi_0+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 H}{\partial p_s\partial q_k}\xi_k+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 H}{\partial p_s\partial p_k}\eta_k \tag{20.2.6}$$

$$\dot{\eta}_s+\frac{\partial H}{\partial q_s}\dot{\xi}_0=-\frac{\partial^2 H}{\partial q_s\partial t}\xi_0-\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 H}{\partial q_s\partial q_k}\xi_k-\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 H}{\partial q_s\partial p_k}\eta_k \quad (s=1,2,\cdots,n)$$

方程(20.2.2)的Lie对称性确定方程为

$$\begin{aligned} &\dot{\xi}_s-g_s\dot{\xi}_0=X^{(0)}(g_s) \\ &\dot{\eta}_s-h_s\dot{\xi}_0=X^{(0)}(h_s) \quad (s=1,2,\cdots,n) \end{aligned} \tag{20.2.7}$$

其中

$$\mathrm{X}^{(0)}=\xi_0\frac{\partial}{\partial t}+\sum_{k=1}^{n}\xi_k\frac{\partial}{\partial q_k}+\sum_{k=1}^{n}\eta_k\frac{\partial}{\partial p_k} \tag{20.2.8}$$

取时间不变的无限小变换

$$t^*=t,q_s^*(t)^*=q_s(t)+\varepsilon\xi_s(t,\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}),p_s^*(t^*)=p_s(t)+\varepsilon\eta_s(t,\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})(s=1,2,\cdots,n) \tag{20.2.9}$$

则Lie对称性的确定方程表示为

$$\begin{aligned} &\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_s=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 H}{\partial p_s\partial q_k}\xi_k+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 H}{\partial p_s\partial p_k}\eta_k \\ &\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\eta_s=-\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 H}{\partial q_s\partial q_k}\xi_k-\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 H}{\partial q_s\partial p_k}\eta_k \quad (s=1,2,\cdots,n) \end{aligned} \tag{20.2.10}$$

其中

$$\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial}{\partial t}+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial p_s}\frac{\partial}{\partial q_s}-\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial q_s}\frac{\partial}{\partial p_s} \tag{20.2.11}$$

20.2.3 Hojman 型守恒量

在特殊无限小变换(20.2.9)下,在一定条件下,Hamilton 系统的 Lie 对称性可导致 Hojman 型守恒量,有如下结果:

命题 1 对 Hamilton 系统(20.2.1),在特殊无限小变换(20.2.9)下,如果生成元 ξ_s,η_s 满足方程(20.2.10),则系统的 Lie 对称性导致 Hojman 型守恒量

$$I_H=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial \xi_s}{\partial q_s}+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial \eta_s}{\partial p_s}=\text{const.} \tag{20.2.12}$$

20.2.4 Noether 守恒量

对 Hamilton 系统,Lie 对称性通过 Noether 对称性可导致 Noether 守恒量,有如下结果.

命题 2 如果 Hamilton 系统 Lie 对称性的生成元 ξ_0,ξ_s,η_s 和规范函数 $G_N=G_N(t,\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})$ 满足如下结构方程

$$\sum_{s=1}^{n}p_s\dot{\xi}_s-\frac{\partial H}{\partial t}\xi_0-\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial q_s}\xi_s-H\dot{\xi}_0+\dot{G}_N=0 \tag{20.2.13}$$

则 Lie 对称性导致 Noether 守恒量

$$I_N=\sum_{s=1}^{n}p_s\xi_s-H\xi_0+G_N=\text{const.} \tag{20.2.14}$$

20.2.5 应用举例

例 1 二自由度系统的 Hamilton 函数为

$$H=\frac{1}{2}(p_1^2+p_2^2)+q_2$$

试研究 Lie 对称性导致的守恒量。

解:首先,研究 Hojman 型守恒量。系统的微分方程为

$$\dot{q}_1=p_1,\dot{q}_2=p_2,\dot{p}_1=0,\dot{p}_2=-1$$

Lie 对称性的确定方程(20.2.10)给出

$$\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_1=\eta_1,\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_2=\eta_2,\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\eta_1=0,\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\eta_2=0$$

它有如下解

$$\xi_1=(q_1-p_1t)^2,\xi_2=\eta_1=\eta_2=0$$

$$\xi_1=0,\xi_2=(p_2+t)\left(q_2+\frac{1}{2}t^2\right),\eta_1=0,\eta_2=(p_2+t)^2$$

守恒量式(20.2.12)分别给出

$$I_{H_1}=\frac{\partial\xi_1}{\partial q_1}=2(q_1-p_1t)=c_1$$

$$I_{H_2}=\frac{\partial\xi_2}{\partial q_2}+\frac{\partial\eta_2}{\partial p_2}=3(p_2+t)=c_2$$

其次,求 Noether 守恒量。Lie 对称性的确定方程(20.2.6)给出

$$\dot{\xi}_1-p_1\dot{\xi}_0=\eta_1\quad \dot{\xi}_2-p_2\dot{\xi}_0=\eta_2\quad \dot{\eta}_1=0,\quad \dot{\eta}_2+\dot{\xi}_0=0$$

结构方程(20.2.13)给出

$$p_1\dot{\xi}_1+p_2\dot{\xi}_2-\xi_2-H\dot{\xi}_0+\dot{G}_N=0$$

以上两组方程有如下解

$\xi_1=1,\xi_0=\xi_2=0,\eta_1=\eta_2=0,G_N\doteq 0$

$\xi_2=1,\xi_0=\xi_1=0,\eta_1=\eta_2=0,G_N=t$

$\xi_1=-t,\xi_0=\xi_2=0,\eta_1=-1,\eta_2=0,G_N=q_1$

$\xi_1=t,\xi_0=\xi_1=0,\eta_1=0,\eta_2=1,G_N=\frac{1}{2}t^2-q_2$

Noether 守恒量式(20.2.14)分别给出

$I_{N_1}=p_1=c_1$

$I_{N_2}=p_2+t=c_2$

$I_{N_3}=q_1-p_1t=c_3$

$I_{N_4}=p_2t-q_2+\frac{1}{2}t^2=c_4$

由此求得

$$q_1=c_3+c_1t,q_2=c_2t-\frac{1}{2}t^2-c_4$$

例 2 单自由度系统 Hamilton 函数为

$$H=\frac{p^2}{2t^2}+\frac{1}{6}t^2q^6$$

试研究 Lie 对称性导致的守恒量。

解:系统的微分方程为

$$\dot{q}=\frac{p}{t^2},\dot{p}=-t^2q^5$$

Lie 对称性的确定方程(20.2.6)给出

$$\dot{\xi}-\frac{p}{t^2}\dot{\xi}_0=\frac{\eta}{t^2}-\frac{2}{t^3}p\xi_0$$

$$\dot{\eta}+t^2q^5\dot{\xi}_0=-2tq^5\xi_0-5t^2q^4\xi$$

可找到它的如下解

$$\dot{\xi}_0=-2t, \xi=q, \eta=-p$$

结构方程(20.2.13)给出

$$p\,\dot{\xi}-\left[-\frac{p^2}{t^3}+\frac{1}{3}tq^6\right]\xi_0-t^2q^5\xi-\left(\frac{p^2}{2t^2}+\frac{1}{6}t^2q^6\right)\dot{\xi}_0+\dot{G}_N=0$$

将已求得的生成元代入,得

$$G_N=0$$

而守恒量式(20.2.14)给出

$$I_N=pq+\frac{p^2}{t}+\frac{1}{3}t^3q^6=\text{const.}$$

§20.3 一般完整系统

一般完整系统的 Lie 对称性在一定条件下可导致 Hojman 型守恒量和 Noether 守恒量。

20.3.1 运动微分方程

一般完整系统的运动微分方程有形式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial L}{\partial q_s}=Q_s \qquad (s=1,2,\cdots,n) \tag{20.3.1}$$

假设系统非奇异,即设

$$\det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_s \partial \dot{q}_k}\right)\neq 0 \tag{20.3.2}$$

则由方程(20.3.1)可解出所有广义加速度,简记作

$$\ddot{q}_s=\alpha_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) \qquad (s=1,2,\cdots,n) \tag{20.3.3}$$

20.3.2 Lie 对称性

Lie 对称性是微分方程在无限小变换下的一种不变性。取无限小变换

$$t^*=t+\varepsilon\xi_0(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}), q_s^*(t^*)=q_s(t)+\varepsilon\xi_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) \qquad (s=1,2,\cdots,n) \tag{20.3.4}$$

方程(20.3.3)的 Lie 对称性的确定方程,类似于式(20.1.7),有形式

$$\ddot{\xi}_s-\dot{q}_s\ddot{\xi}_0-2\alpha_s\dot{\xi}_0=\frac{\partial \alpha_s}{\partial t}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial \alpha_s}{\partial q_k}\xi_k+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial \alpha_s}{\partial \dot{q}_k}(\dot{\xi}_k-\dot{q}_k\dot{\xi}_0) \qquad (s=1,2,\cdots,n) \tag{20.3.5}$$

在特殊无限小变换

$$t^* = t, q_s^*(t^*) = q_s(t) + \varepsilon\xi_s(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) \quad (s=1,2,\cdots,n) \tag{20.3.6}$$

下，方程(20.3.3)的 Lie 对称性的确定方程，类似于式(20.1.9)，有形式

$$\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_s\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \alpha_s}{\partial q_k}\xi_k + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \alpha_s}{\partial \dot{q}_k}\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_k \quad (s=1,2,\cdots,n) \tag{20.3.7}$$

其中

$$\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} \dot{q}_k \frac{\partial}{\partial q_k} + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \tag{20.3.8}$$

20.3.3 Hojman 型守恒量

对一般完整系统，在时间不变的特殊无限小变换(20.3.6)下，在一定条件下可导致 Hojman 型守恒量，有如下结果：

命题 1 对一般完整系统(20.3.1)，在特殊无限小变换(20.3.6)下，如果生成元 ξ_s 满足 Lie 对称性的确定方程(20.3.7)，并且存在某函数 $\mu = \mu(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$ 使得

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial \alpha_s}{\partial \dot{q}_s} + \frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\ln \mu = 0 \tag{20.3.9}$$

则 Lie 对称性直接导致 Hojman 型守恒量

$$I_H = \frac{1}{\mu}\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial}{\partial q_s}(\mu\xi_s) + \frac{1}{\mu}\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_s}\left(\mu\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_s\right) = \text{const.} \tag{20.3.10}$$

20.3.4 Noether 守恒量

对一般完整系统(20.3.1)，Lie 对称性通过 Noether 对称性可间接导致 Noether 守恒量，有如下结果：

命题 2 对一般完整系统(20.3.1)，如果 Lie 对称性的生成元 ξ_0，ξ_s 和规范函数 $G_N = G_N(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$ 满足如下结构方程

$$L\dot{\xi}_0 + X^{(1)}(L) + \sum_{s=1}^{n} Q_s(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) + \dot{G}_N = 0 \tag{20.3.11}$$

则 Lie 对称性导致 Noether 守恒量

$$I_N = L\xi_0 + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) + G_N = \text{const.} \tag{20.3.12}$$

20.3.5 应用举例

例 1 二自由度系统为

$$L = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2), Q_1 = -\frac{t}{1+t^2}\dot{q}_1, Q_2 = \frac{1}{1+t^2}\dot{q}_1$$

试研究 Lie 对称性导致的守恒量。

解：首先，研究 Hojman 型守恒量。系统的运动微分方程为

$$\ddot{q}_1=-\frac{t}{1+t^2}\dot{q}_1,\ddot{q}_2=\frac{1}{1+t^2}\dot{q}_1$$

Lie 对称性的确定方程(20.3.7)给出

$$\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_1\right)=-\frac{t}{1+t^2}\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_1,\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_2\right)=\frac{1}{1+t^2}\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_1$$

它有如下解

$$\xi_1=\xi_2=1 \tag{a}$$

$$\xi_1=0,\xi_2=(\dot{q}_1+t\dot{q}_2-q_2)^2 \tag{b}$$

$$\xi_1=0,\xi_2=\dot{q}_1(1+t^2)^{\frac{1}{2}}(\dot{q}+t\dot{q}_2-q_2) \tag{c}$$

方程(20.3.9)给出

$$-\frac{t}{1+t^2}+\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\ln\mu=0$$

它有如下解

$$\mu=(1+t^2)^{\frac{1}{2}} \tag{d}$$

$$\mu=(1+t^2)^{\frac{1}{2}}(\dot{q}_1+t\dot{q}_2-q_2) \tag{e}$$

由式(b),(d),利用命题 1,得到 Hojman 型守恒量

$$I_H=\frac{\partial\xi_2}{\partial q_2}=-2(\dot{q}_1+t\dot{q}_2-q_2)=c_1$$

其次,研究 Noether 守恒量。Lie 对称性的确定方程(20.3.5)给出

$$\ddot{\xi}_1-\dot{q}_1\ddot{\xi}_0-2\left(-\frac{t}{1+t^2}\right)\dot{\xi}_0=-\frac{t}{1+t^2}(\dot{\xi}_1-\dot{q}_1\dot{\xi}_0)+\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{t}{1+t^2}\right)\dot{q}_1\xi_0$$

$$\ddot{\xi}_2-\dot{q}_2\ddot{\xi}_0-2\left(\frac{1}{1+t^2}\right)\dot{\xi}_0=\frac{1}{1+t^2}(\dot{\xi}_1-\dot{q}_1\dot{\xi}_0)+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{1+t^2}\right)\dot{q}_1\xi_0 \tag{f}$$

结构方程(20.3.11)给出

$$L\dot{\xi}_0+\dot{q}_1(\dot{\xi}_1-\dot{q}_1\dot{\xi}_0)+\dot{q}_2(\dot{\xi}_2-\dot{q}_2\dot{\xi}_0)-\frac{t}{1+t^2}\dot{q}_1(\xi_1-\dot{q}_1\xi_0)+\frac{1}{1+t^2}\dot{q}_1(\xi_2-\dot{q}_2\xi_0)+\dot{G}_N=0 \tag{g}$$

方程(f),(g)有如下解

$$\xi_0=0,\xi_1=1,\xi_2=t,G_N=-q_2$$

守恒量式(20.3.12)给出

$$I_N=\dot{q}_1+t\dot{q}_2-q_2=c_2$$

例 2 研究 Whittaker 方程

$$\ddot{q}_1 = q_1, \quad \ddot{q}_2 = \dot{q}_1$$

的 Lie 对称性导致的守恒量。

解:Whittaker 方程可化为一个一般完整系统,有

$$L = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) + \frac{1}{2}q_1^2, Q_1 = 0, Q_2 = \dot{q}_1$$

首先,研究 Hojman 型守恒量。Lie 对称性的确定方程(20.3.7)给出

$$\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_1\right) = \xi_1, \frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_2\right) = \frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_1$$

它有如下解

$$\xi_1 = 0, \quad \xi_2 = t \tag{a}$$

$$\xi_1 = \xi_2 = \exp t \tag{b}$$

$$\xi_1 = \exp(-t), \xi_2 = -\exp(-t) \tag{c}$$

方程(20.3.9)给出

$$\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\ln \mu = 0$$

它有解

$$\mu = 1 \tag{d}$$

$$\mu = q_1 - \dot{q}_2 \tag{e}$$

$$\mu = (q_1 + \dot{q}_1)\exp(-t) \tag{f}$$

$$\mu = (q_1 - \dot{q}_1)\exp t \tag{g}$$

由式(a),(e),利用命题 1,得 Hojman 型守恒量

$$I_H = -(q_1 - \dot{q}_2)^{-1} = c_1$$

由式(b),(f),利用命题 1,得

$$I_H = 2(q_1 + \dot{q}_1)^{-1}\exp t = c_2$$

由式(c),(g),利用命题 1,得

$$I_H = 2(q_1 - \dot{q}_1)\exp(-t) = c_3$$

其次,研究 Noether 守恒量。Lie 对称性的确定方程(20.3.5)给出

$$\begin{aligned} &\ddot{\xi}_1 - \dot{q}_1\ddot{\xi}_0 - 2q_1\dot{\xi}_0 = \xi_1 \\ &\ddot{\xi}_2 - \dot{q}_2\ddot{\xi}_0 - 2\dot{q}_1\dot{\xi}_0 = \dot{\xi}_1 - \dot{q}_1\dot{\xi}_0 \end{aligned} \tag{h}$$

结构方程(20.3.11)给出

$$L\dot{\xi}_0+\dot{q}_1(\dot{\xi}_1-\dot{q}_1\dot{\xi}_0)+\dot{q}_2(\dot{\xi}_2-\dot{q}_2\dot{\xi}_0)+q_1\xi_1+\dot{q}_1(\xi_2-\dot{q}_2\xi_0)+\dot{G}_N=0 \quad \text{(i)}$$

方程(h),(i)有解

$$\xi_0=0,\xi_1=0,\xi_2=1,G_N=-q_1$$

守恒量式(20.3.12)给出

$$I_N=\dot{q}_2-q_1=c_4$$

§20.4 Четаев 型非完整系统

Четаев 型非完整系统的 Lie 对称性在一定条件下可导致 Hojman 型守恒量和 Noether 守恒量。

20.4.1 运动微分方程

设力学系统的位形由 n 个广义坐标 $q_s(s=1,2,\cdots,n)$来确定,它的运动受有 g 个理想双面 Четаев 型非完整约束

$$f_\beta(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})=0 \qquad (\beta=1,2,\cdots,g) \tag{20.4.1}$$

并设约束彼此相容且独立。约束(20.4.1)加在虚位移 δq_s 上的 Четаев 条件为

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\delta q_s=0 \qquad (\beta=1,2,\cdots,g) \tag{20.4.2}$$

系统的运动微分方程表示为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial L}{\partial q_s}=Q_s+\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s} \qquad (s=1,2,\cdots,n) \tag{20.4.3}$$

设系统非奇异,即设

$$\det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_s\partial \dot{q}_k}\right)\neq 0 \tag{20.4.4}$$

则由方程(20.4.1)和(20.4.3),在微分方程积分之前可求出 λ_β 作为 $t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}$ 的函数。于是方程(20.4.3)可写成形式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial L}{\partial q_s}=Q_s+\Lambda_s \qquad (s=1,2,\cdots,n) \tag{20.4.5}$$

其中

$$\Lambda_s=\Lambda_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})=\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s} \tag{20.4.6}$$

已表示为 $t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}$ 的函数,它们代表广义非完整约束力。称方程(20.4.5)为与非完整系统(20.4.1),(20.4.3)相应的完整系统的方程。展开方程(20.4.5),可

求出所有广义加速度，简记作

$$\ddot{q}_s=\alpha_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) \qquad (s=1,2,\cdots,n) \tag{20.4.7}$$

20.4.2 Lie 对称性

在无限小变换(20.1.4)下，方程(20.4.7)的 Lie 对称性的确定方程，类似于式(20.1.7)，有形式

$$\ddot{\xi}_s-\dot{q}_s\ddot{\xi}_0-2\alpha_s\dot{\xi}_0=\frac{\partial\alpha_s}{\partial t}\xi_0+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\alpha_s}{\partial q_k}\xi_k+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\alpha_s}{\partial\dot{q}_k}(\dot{\xi}_k-\dot{q}_k\dot{\xi}_0) \qquad (s=1,2,\cdots,n) \tag{20.4.8}$$

在特殊无限小变换(20.1.9)下，成为

$$\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_s\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\alpha_s}{\partial q_k}\xi_k+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\alpha_s}{\partial\dot{q}_k}\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_k \qquad (s=1,2,\cdots,n) \tag{20.4.9}$$

非完整约束方程(20.4.1)在无限小变换(20.1.4)的不变性表示为如下限制方程

$$X^{(1)}\{f_\beta(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\}=0 \tag{20.4.10}$$

其中

$$X^{(1)}=\xi_0\frac{\partial}{\partial t}+\sum_{k=1}^{n}\xi_k\frac{\partial}{\partial q_k}+\sum_{k=1}^{n}(\dot{\xi}_k-\dot{q}_k\dot{\xi}_0)\frac{\partial}{\partial\dot{q}_k} \tag{20.4.11}$$

在特殊无限小变换(20.1.9)下，成为

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f_\beta}{\partial q_k}\xi_k+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f_\beta}{\partial\dot{q}_k}\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_k=0 \tag{20.4.12}$$

Четаев 条件(20.4.2)对无限小生成元 ξ_0,ξ_s 的附加限制表示为

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial f_\beta}{\partial\dot{q}_s}(\xi_s-\dot{q}_s\xi_0)=0 \qquad (\beta=1,2,\cdots,g) \tag{20.4.13}$$

而在特殊无限小变换(20.1.9)下，成为

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial f_\beta}{\partial\dot{q}_s}\xi_s=0 \qquad (\beta=1,2,\cdots,g) \tag{20.4.14}$$

定义 1 如果无限小生成元 ξ_0,ξ_s 满足确定方程(20.4.8)，则称相应对称性为与非完整系统(20.4.1)，(20.4.3)相应的完整系统的 Lie 对称性。

定义 2 如果无限小生成元 ξ_0,ξ_s 满足确定方程(20.4.8)以及限制方程(20.4.10)，则称相应对称性为非完整系统(20.4.1)，(20.4.3)的弱 Lie 对称性。

定义 3 如果无限小生成元 ξ_0,ξ_s 满足确定方程(20.4.8)，限制方程(20.4.10)以及附加限制方程(20.4.13)，则称相应对称性为非完整系统(20.4.1)，(20.4.3)的强 Lie 对称性。

20.4.3 Hojman 型守恒量

对 Четаев 型非完整系统，由 Lie 对称性可直接导致 Hojman 型守恒量，有

如下结果：

命题 1 对于与 Четаев 型非完整系统相应的完整系统(20.4.7)，如果无限小生成元 ξ_s 满足确定方程(20.4.9)，并且存在某函数 $\mu=\mu(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$使得

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial\alpha_s}{\partial\dot{q}_s}+\frac{\overline{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\ln\mu=0 \tag{20.4.15}$$

则相应完整系统的 Lie 对称性直接导致 Hojman 型守恒量

$$I_H=\frac{1}{\mu}\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial}{\partial q_s}(\mu\xi_s)+\frac{1}{\mu}\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial}{\partial\dot{q}_s}\left(\mu\frac{\overline{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_s\right)=\mathrm{const.} \tag{20.4.16}$$

命题 2 对于 Четаев 型非完整系统，如果无限小生成元 ξ_s 满足确定方程(20.4.9)和限制方程(20.4.12)，并且存在某函数$\mu=\mu(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$使得式(20.4.15)成立，则非完整系统的弱 Lie 对称性直接导致 Hojman 型守恒量式(20.4.16)。

命题 3 对于 Четаев 型非完整系统，如果无限小生成元 ξ_s 满足确定方程(20.4.9)，限制方程(20.4.12)以及附加限制方程(20.4.14)，并且存在某函数 $\mu=\mu(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$使得式(20.4.15)成立，则非完整系统的强 Lie 对称性直接导致 Hojman 型守恒量式(20.4.16)。

20.4.4 Noether 守恒量

对 Четаев 型非完整系统，Lie 对称性通过 Noether 对称性可间接导致 Noether 守恒量，有如下结果：

命题 4 对于与非完整系统(20.4.1)，(20.4.3)相应的完整系统(20.4.5)，如果 Lie 对称性的生成元 ξ_0,ξ_s 和规范函数 $G_N=G_N(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$满足如下结构方程

$$L\dot{\xi}_0+X^{(1)}(L)+\sum_{s=1}^{n}(Q_s+\Lambda_s)(\xi_s-\dot{q}_s\xi_0)+\dot{G}_N=0 \tag{20.4.17}$$

则相应完整系统的 Lie 对称性导致相应完整系统的 Noether 守恒量

$$I_N=L\xi_0+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_s}(\xi_s-\dot{q}_s\xi_0)+G_N=\mathrm{const.} \tag{20.4.18}$$

命题 5 如果生成元 ξ_0,ξ_s 是非完整系统(20.4.1)，(20.4.3)的弱 Lie 对称性生成元，且存在规范函数 $G_N=G_N(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$满足结构方程(20.4.17)，则非完整系统的弱 Lie 对称性导致相应完整系统的 Noether 守恒量式(20.4.18)。

命题 6 如果 ξ_0,ξ_s 是非完整系统(20.4.1)，(20.4.3)的强 Lie 对称性生成元，且存在规范函数 $G_N=G_N(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$满足结构方程(20.4.17)，则非完整系统的强 Lie 对称性导致非完整系统的 Noether 守恒量式(20.4.18)。

20.4.5 应用举例

例 非完整系统为

$$L=\frac{1}{2}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2), Q_1=Q_2=0$$

$$f=\dot{q}_2-t\dot{q}_1=0$$

试研究 Lie 对称性导致的守恒量。

解:首先,研究 Hojman 型守恒量。方程(20.4.3)给出

$$\ddot{q}_1=-\lambda t,\quad \ddot{q}_2=\lambda$$

可解出约束乘子

$$\lambda=\frac{1}{1+t^2}\dot{q}_1$$

方程(20.4.5)给出

$$\ddot{q}_1=-\frac{t}{1+t^2}\dot{q}_1, \ddot{q}_2=\frac{1}{1+t^2}\dot{q}_1$$

确定方程(20.4.9)给出

$$\frac{\bar{d}}{dt}\left(\frac{\bar{d}}{dt}\xi_1\right)=-\frac{t}{1+t^2}\frac{\bar{d}}{dt}\xi_1, \frac{\bar{d}}{dt}\left(\frac{\bar{d}}{dt}\xi_2\right)=\frac{1}{1+t^2}\frac{\bar{d}}{dt}\xi_1 \tag{a}$$

限制方程(20.4.12)给出

$$\frac{\bar{d}}{dt}\xi_2-t\frac{\bar{d}}{dt}\xi_1=0 \tag{b}$$

附加限制方程(20.4.14)给出

$$\xi_2-t\xi_1=0 \tag{c}$$

在不考虑附加限制方程(c)时,可找到方程(a),(b)的如下解

$$\xi_1=1,\quad \xi_2=1 \tag{d}$$

$$\xi_1=1,\quad \xi_2=(q_2-\dot{q}_1-t\dot{q}_2)^2 \tag{e}$$

$$\xi_1=0,\quad \xi_2=\dot{q}_1(1+t^2)^{\frac{1}{2}}(q_2-\dot{q}_1-t\dot{q}_2) \tag{f}$$

它们都对应弱 Lie 对称性。方程(20.4.15)给出

$$-\frac{t}{1+t^2}+\frac{\bar{d}}{dt}\ln\mu=0 \tag{g}$$

它有如下解

$$\mu=(1+t^2)^{\frac{1}{2}} \tag{h}$$

$$\mu=(1+t^2)^{\frac{1}{2}}(q_2-\dot{q}_1-t\dot{q}_2) \tag{i}$$

由式(e),(h),利用命题 2,得到 Hojman 型守恒量

$$I_H=\frac{\partial\xi_2}{\partial q_2}=2(q_2-\dot{q}_1-t\dot{q}_2)=c_1$$

由式(d),(i),利用命题 2,得到

$$I_H=\frac{1}{\mu}\frac{\partial\mu}{\partial q_2}=(q_2-\dot{q}_1-t\dot{q}_2)^{-1}=c_2$$

由式(f),(h),得到

$$I_H=\frac{\partial\xi_2}{\partial q_2}=\dot{q}_1(1+t^2)^{\frac{1}{2}}=c_3$$

其次,研究 Noether 守恒量。Lie 对称性的确定方程(20.4.8)给出

$$\begin{aligned}&\ddot{\xi}_1-\dot{q}_1\ddot{\xi}_0-2\left(-\frac{t}{1+t^2}\right)\dot{\xi}_0=\dot{q}_1\xi_0\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{t}{1+t^2}\right)-\frac{t}{1+t^2}(\dot{\xi}_1-\dot{q}_1\dot{\xi}_0)\\&\ddot{\xi}_2-\dot{q}_2\ddot{\xi}_0-2\left(\frac{1}{1+t^2}\right)\dot{\xi}_0=\dot{q}_1\xi_0\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{t}{1+t^2}\right)+\frac{1}{1+t^2}(\dot{\xi}_1-\dot{q}_1\dot{\xi}_0)\end{aligned}\tag{j}$$

限制方程(20.4.10)给出

$$\xi_0(-\dot{q}_1)+(-t)(\dot{\xi}_1-\dot{q}_1\dot{\xi}_0)+\dot{\xi}_2-\dot{q}_2\xi_0=0\tag{k}$$

附加限制方程(20.4.13)给出

$$\xi_2-\dot{q}_2\xi_0-t(\xi_1-\dot{q}_1\xi_0)=0\tag{l}$$

而结构方程(20.4.17)给出

$$\begin{aligned}&L\dot{\xi}_0+\dot{q}_1(\dot{\xi}_1-\dot{q}_1\dot{\xi}_0)+\dot{q}_2(\dot{\xi}_2-\dot{q}_2\dot{\xi}_0)-\frac{t}{1+t^2}\dot{q}_1(\xi_1-\dot{q}_1\xi_0)+\\&\frac{1}{1+t^2}\dot{q}_1(\xi_2-\dot{q}_2\xi_0)+\dot{G}_N=0\end{aligned}\tag{m}$$

方程(j),(m)有解

$$\xi_0=0,\xi_1=1,\xi_2=t,G_N=-q_2\tag{n}$$

但它不满足式(k)。由命题 4,得到相应完整系统的 Noether 守恒量

$$I_N=\dot{q}_1+t\dot{q}_2-q_2=c_4$$

§20.5 Birkhoff 系统

Birkhoff 系统的 Lie 对称性在一定条件下可导致 Hojman 守恒量和 Noether 守恒量。

20.5.1 运动微分方程

Birkhoff 系统的微分方程为

$$\sum_{\nu=1}^{2n}\Omega_{\mu\nu}\dot{a}^\nu-\frac{\partial B}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu}{\partial t}=0\qquad(\mu=1,2,\cdots,2n)\tag{20.5.1}$$

其中

$$\Omega_{\mu\nu}=\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu} \tag{20.5.2}$$

为 Birkhoff 张量。假设系统非奇异，即设

$$\det(\Omega_{\mu\nu})\neq 0 \tag{20.5.3}$$

则由方程(20.5.1)可解出所有 $\dot{a}^\mu$

$$\dot{a}^\mu = \sum_{\nu=1}^{2n}\Omega^{\mu\nu}\left(\frac{\partial B}{\partial a^\nu}+\frac{\partial R_\nu}{\partial t}\right) \qquad (\mu=1,2,\cdots,2n) \tag{20.5.4}$$

其中

$$\sum_{\rho=1}^{2n}\Omega^{\mu\rho}\Omega_{\rho\nu}=\delta_\nu^\mu \tag{20.5.5}$$

20.5.2 Lie 对称性

Lie 对称性是微分方程在无限小变换下的一种不变性。取无限小变换为

$$t^*=t+\varepsilon\xi_0(t,\boldsymbol{a}),a^{\mu *}(t^*)=a^\mu(t)+\varepsilon\xi_\mu(t,\boldsymbol{a}) \qquad (\mu=1,2,\cdots,2n) \tag{20.5.6}$$

方程(20.5.1)的 Lie 对称性确定方程表示为

$$\mathrm{X}^{(1)}\left\{\sum_{\nu=1}^{2n}\Omega_{\mu\nu}\dot{a}^\nu-\frac{\partial B}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu}{\partial t}\right\}\Bigg|_{(20.5.1)}=0 \tag{20.5.7}$$

方程(20.5.4)的 Lie 对称性的确定方程为

$$\mathrm{X}^{(1)}\left\{\dot{a}^\mu-\sum_{\nu=1}^{2n}\Omega^{\mu\nu}\left(\frac{\partial B}{\partial a^\nu}+\frac{\partial R_\nu}{\partial t}\right)\right\}\Bigg|_{(20.5.4)}=0 \tag{20.5.8}$$

即

$$\dot{\xi}_\mu-\sum_{\nu=1}^{2n}\Omega^{\mu\nu}\left(\frac{\partial B}{\partial a^\nu}+\frac{\partial R_\nu}{\partial t}\right)\dot{\xi}_0=\mathrm{X}^{(0)}\left\{\sum_{\nu=1}^{2n}\Omega^{\mu\nu}\left(\frac{\partial B}{\partial a^\nu}+\frac{\partial R_\nu}{\partial t}\right)\right\} \qquad (\mu=1,2,\cdots,2n) \tag{20.5.9}$$

其中

$$\begin{aligned}\mathrm{X}^{(0)}&=\xi_0\frac{\partial}{\partial t}+\sum_{\mu=1}^{2n}\xi_\mu\frac{\partial}{\partial a^\mu}\\ \mathrm{X}^{(1)}&=\mathrm{X}^{(0)}+\sum_{\mu=1}^{2n}(\dot{\xi}_\mu-\dot{a}^\mu\dot{\xi}_0)\frac{\partial}{\partial\dot{a}^\mu}\end{aligned} \tag{20.5.10}$$

在特殊无限小变换

$$t^*=t,a^{\mu *}(t^*)=a^\mu(t)+\varepsilon\xi_\mu(t,\boldsymbol{a}) \tag{20.5.11}$$

下，确定方程(20.5.9)成为

$$\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_\mu=\sum_{\rho=1}^{2n}\frac{\partial}{\partial a^\rho}\left\{\sum_{\nu=1}^{2n}\Omega^{\mu\nu}\left(\frac{\partial B}{\partial a^\nu}+\frac{\partial R_\nu}{\partial t}\right)\right\}\xi_\rho \tag{20.5.12}$$

其中

$$\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial}{\partial t}+\sum_{\nu=1}^{2n}\Omega^{\mu\nu}\left(\frac{\partial B}{\partial a^{\nu}}+\frac{\partial R_{\nu}}{\partial t}\right)\frac{\partial}{\partial a^{\mu}} \tag{20.5.13}$$

20.5.3 Hojman 型守恒量

对 Birkhoff 系统，由 Lie 对称性可直接导致 Hojman 型守恒量，有如下结果：

命题 1 对 Birkhoff 系统(20.5.1)，在时间不变的无限小变换(20.5.11)下，如果生成元 ξ_{μ} 满足式(20.5.12)，并且存在某函数 $\mu=\mu(t,\boldsymbol{a})$ 满足条件

$$\sum_{\mu=1}^{2n}\frac{\partial}{\partial a^{\mu}}\left\{\sum_{\nu=1}^{2n}\Omega^{\mu\nu}\left(\frac{\partial B}{\partial a^{\nu}}+\frac{\partial R_{\nu}}{\partial t}\right)\right\}+\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\ln\mu=0 \tag{20.5.14}$$

则 Birkhoff 系统的 Lie 对称性导致 Hojman 型守恒量

$$I_H=\frac{1}{\mu}\sum_{\nu=1}^{2n}\frac{\partial}{\partial a^{\nu}}(\mu\,\xi_{\nu})=\text{const.} \tag{20.5.15}$$

证明:将式(20.5.15)按方程(20.5.1)求对 t 的导数，得

$$\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}I_H=\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{\mu}\sum_{\nu=1}^{2n}\frac{\partial\mu}{\partial a^{\nu}}\xi_{\nu}\right)+\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{\nu=1}^{2n}\frac{\partial\xi_{\nu}}{\partial a^{\nu}}\right) \tag{20.5.16}$$

注意到关系

$$\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{\nu=1}^{2n}\frac{\partial\xi_{\nu}}{\partial a^{\nu}}\right)=\sum_{\nu=1}^{2n}\frac{\partial}{\partial a^{\nu}}\left(\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_{\nu}\right)-\sum_{\nu=1}^{2n}\sum_{\rho=1}^{2n}\frac{\partial\xi_{\nu}}{\partial a^{\rho}}\frac{\partial}{\partial a^{\nu}}\left[\sum_{\tau=1}^{2n}\Omega^{\rho\tau}\left(\frac{\partial B}{\partial a^{\tau}}+\frac{\partial R_{\tau}}{\partial t}\right)\right] \tag{20.5.17}$$

将式(20.5.12)代入式(20.5.17)，并利用式(20.5.14)，得

$$\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{\nu=1}^{2n}\frac{\partial\xi_{\nu}}{\partial a^{\nu}}\right)=-\sum_{\rho=1}^{2n}\frac{\partial}{\partial a^{\rho}}\left(\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\ln\mu\right)\xi_{\rho} \tag{20.5.18}$$

将式(20.5.18)代入式(20.5.16)，得

$$\begin{aligned}
\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}I_H&=\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{\mu}\sum_{\nu=1}^{2n}\frac{\partial\mu}{\partial a^{\nu}}\xi_{\nu}\right)-\sum_{\rho=1}^{2n}\frac{\partial}{\partial a^{\rho}}\left(\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\ln\mu\right)\xi^{\rho}\\
&=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\mu}\sum_{\nu=1}^{2n}\frac{\partial\mu}{\partial a^{\nu}}\xi_{\nu}\right)+\sum_{\rho=1}^{2n}\frac{\partial}{\partial a^{\rho}}\left(\frac{1}{\mu}\sum_{\nu=1}^{2n}\frac{\partial\mu}{\partial a^{\nu}}\xi_{\nu}\right)\sum_{\tau=1}^{2n}\Omega^{\rho\tau}\left(\frac{\partial B}{\partial a^{\tau}}+\frac{\partial R_{\tau}}{\partial t}\right)-\\
&\quad\sum_{\rho=1}^{2n}\frac{\partial}{\partial a^{\rho}}\left\{\frac{1}{\mu}\left[\frac{\partial\mu}{\partial t}+\sum_{\nu=1}^{2n}\frac{\partial\mu}{\partial a^{\nu}}\sum_{\tau=1}^{2n}\Omega^{\nu\tau}\left(\frac{\partial B}{\partial a^{\tau}}+\frac{\partial R_{\tau}}{\partial t}\right)\right]\right\}\xi_{\rho}\\
&=\sum_{\rho=1}^{2n}\sum_{\nu=1}^{2n}\left\{\frac{\partial}{\partial a^{\nu}}\left(\frac{1}{\mu}\frac{\partial\mu}{\partial a^{\rho}}\right)-\frac{\partial}{\partial a^{\rho}}\left(\frac{1}{\mu}\frac{\partial\mu}{\partial a^{\nu}}\right)\right\}\sum_{\tau=1}^{2n}\Omega^{\nu\tau}\left(\frac{\partial B}{\partial a^{\tau}}+\frac{\partial R_{\tau}}{\partial t}\right)\xi_{\rho}=0
\end{aligned}$$

证毕。

对广义 Birkhoff 方程

$$\sum_{\nu=1}^{2n}\Omega_{\mu\nu}\dot{a}^{\nu}-\frac{\partial B}{\partial a^{\mu}}-\frac{\partial B_{\mu}}{\partial t}=-\Lambda_{\mu}\qquad(\mu=1,2,\cdots,2n)\qquad(20.5.19)$$

Lie 对称性的确定方程有形式

$$\dot{\xi}_{\mu}-\sum_{\nu=1}^{2n}\Omega^{\mu\nu}\left(\frac{\partial B}{\partial a^{\nu}}+\frac{\partial R_{\nu}}{\partial t}-\Lambda_{\nu}\right)\dot{\xi}_{0}=$$
$$X^{(0)}\left\{\sum_{\nu=1}^{2n}\Omega^{\mu\nu}\left(\frac{\partial B}{\partial a^{\nu}}+\frac{\partial R_{\nu}}{\partial t}-\Lambda_{\nu}\right)\right\}\qquad(\mu=1,2,\cdots,2n)$$
$$(20.5.20)$$

以及

$$\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_{\mu}=\sum_{\rho=1}^{2n}\frac{\partial}{\partial a^{\rho}}\left\{\sum_{\nu=1}^{2n}\Omega^{\mu\nu}\left(\frac{\partial B}{\partial a^{\nu}}+\frac{\partial R_{\nu}}{\partial t}-\Lambda_{\nu}\right)\right\}\xi_{\rho}\qquad(20.5.21)$$

类似于命题 1,有

命题 2 对广义 Birkhoff 系统(20.5.19),在时间不变的无限小变换(20.5.11)下,如果生成元 ξ_{μ} 满足式(20.5.21),并且存在某函数 $\mu=\mu(t,\boldsymbol{a})$满足条件

$$\sum_{\mu=1}^{2n}\frac{\partial}{\partial a^{\mu}}\left\{\sum_{\nu=1}^{2n}\Omega^{\mu\nu}\left(\frac{\partial B}{\partial a^{\nu}}+\frac{\partial R_{\nu}}{\partial t}-\Lambda_{\nu}\right)\right\}+\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\ln\mu=0\qquad(20.5.22)$$

则系统的 Lie 对称性导致 Hojman 型守恒量式(20.5.15)。

20.5.4 Noether 守恒量

对 Birkhoff 系统,Lie 对称性通过 Noether 对称性可间接导出 Noether 守恒量,有如下结果:

命题 3 如果 Birkhoff 系统 Lie 对称性的生成元 $G_N=G_N(t,\boldsymbol{a})$满足如下结构方程

$$\left(\sum_{\nu=1}^{2n}R_{\nu}\dot{a}^{\nu}-B\right)\dot{\xi}_{0}+X^{(1)}\left(\sum_{\nu=1}^{2n}R_{\nu}\dot{a}^{\nu}-B\right)+\dot{G}_{N}=0\qquad(20.5.23)$$

则 Lie 对称性导致 Noether 守恒量

$$I_{N}=\sum_{\mu=1}^{2n}R_{\mu}\xi_{\mu}-B\xi_{0}+G_{N}=\text{const.}\qquad(20.5.24)$$

对广义 Birkhoff 系统,类似地有

命题 4 如果广义 Birkhoff 系统 Lie 对称性的生成元 ξ_0,ξ_{μ} 和规范函数 $G_N=G_N(t,\boldsymbol{a})$满足如下结构方程

$$\left(\sum_{\nu=1}^{2n}R_{\nu}\dot{a}^{\nu}-B\right)\dot{\xi}_{0}+X^{(1)}\left(\sum_{\nu=1}^{2n}R_{\nu}\dot{a}^{\nu}-B\right)+\sum_{\mu=1}^{2n}\Lambda_{\mu}(\xi_{\mu}-\dot{a}^{\mu}\xi_{0})+\dot{G}_{N}=0$$
$$(20.5.25)$$

则 Lie 对称性导致 Noether 守恒量式(20.5.24)。

20.5.5 应用举例

例 1 4 阶 Birkhoff 系统为

$$R_1=a^2+a^3, R_2=0, R_3=a^4, R_4=0$$

$$B=\frac{1}{2}\{(a^3)^2+2a^2a^3-(a^4)^2\}$$

试研究 Lie 对称性导致的守恒量。

解:Birkhoff 方程(20.5.1)给出

$$-\dot{a}^2-\dot{a}^3=0, \dot{a}^1-a^3=0, \dot{a}^1-\dot{a}^4-(a^2+a^3)=0, \dot{a}^3+a^4=0$$

即

$$\dot{a}^1=a^3, \dot{a}^2=a^4, \dot{a}^3=-a^4, \dot{a}^4=-a^2$$

首先,求 Hojman 型守恒量。Lie 对称性的确定方程(20.5.12)给出

$$\frac{\bar{d}}{dt}\xi_1=\xi_3, \frac{\bar{d}}{dt}\xi_2=\xi_4, \frac{\bar{d}}{dt}\xi_3=-\xi_4, \frac{\bar{d}}{dt}\xi_4=-\xi_2$$

方程(20.5.14)给出

$$\frac{\bar{d}}{dt}\ln\mu=0$$

以上两组方程有解

$$\xi_1=t(a^2+a^3)^2, \xi_2=0, \xi_3=(a^2+a^3)^2, \xi_4=0, \mu=1$$

守恒量式(20.5.15)

$$I_H=2(a^2+a^3)=c_1$$

其次,研究 Noether 守恒量。结构方程(20.5.23)给出

$$\left\{(a^2+a^3)\dot{a}^1+a^4\dot{a}^3-\frac{1}{2}[(a^3)^2+2a^2a^3-(a^4)^2]\right\}\dot{\xi}_0+\xi_2\dot{a}^1+\xi_3\dot{a}^1+$$

$$\xi_4\dot{a}^3-a^3\xi_2-(a^2+a^3)\xi_3+a^4\xi_4+(a^2+a^3)(\dot{\xi}_1-\dot{a}^1\dot{\xi}_0)+$$

$$a^4(\dot{\xi}_3-\dot{a}^3\dot{\xi}_0)+\dot{G}_N=0$$

它有解

$$\xi_0=0, \xi_1=t, \xi_2=0, \xi_3=1, \xi_4=0, G_N=-a^1$$

它也是 Lie 对称性的。守恒量式(20.5.24)给出

$$I_N=(a^2+a^3)t+a^4-a^1=c_2$$

例 2 广义 Birkhoff 系统为

$$R_1=a^2, R_2=0, B=0, \Lambda_1=a^1+\frac{1}{t}-\frac{2}{t^3}, \Lambda_2=-a^2$$

试研究 Hojman 型守恒量。

解:广义 Birkhoff 方程为

$$\dot{a}^1=a^2,\dot{a}^2=a^1+\frac{1}{t}-\frac{2}{t^3}$$

确定方程(20.5.21)给出

$$\frac{\bar{d}}{dt}\xi_1=\xi_2,\frac{\bar{d}}{dt}\xi_2=\xi_1$$

方程(20.5.22)给出

$$\frac{\bar{d}}{dt}\ln\mu=0$$

上述两组方程有解

$$\xi_1=\exp t,\xi_2=\exp t,\mu=\left(a^1+a^2+\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}\right)\exp(-t)$$

$$\xi_1=\exp(-t),\xi_2=-\exp(-t),\mu=\left(a^1-a^2+\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}\right)^{-1}\exp t$$

守恒量式(20.5.15)分别给出 Hojman 型守恒量

$$I_H=2\left(a^1+a^2+\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}\right)^{-1}\exp t=c_1$$

$$I_H=2\left(a^1-a^2+\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}\right)^{-1}\exp(-t)=c_2$$

§20.6 广义 Hamilton 系统

广义 Hamilton 系统的 Lie 对称性在一定条件下可导致 Hojman 型守恒量，在特殊情况下可导致 Noether 守恒量。

20.6.1 运动微分方程

广义 Hamilton 系统的运动微分方程为[8]

$$\dot{x}_i=\sum_{j=1}^{m}J_{ij}\frac{\partial H}{\partial x_j}\qquad(i=1,2,\cdots,m)\tag{20.6.1}$$

其中 $J_{ij}=J_{ij}(\boldsymbol{x})$满足条件

$$J_{ij}=-J_{ji}\tag{20.6.2}$$

$$\sum_{l=1}^{2n}\left(J_{il}\frac{\partial J_{jk}}{\partial x_l}+J_{jl}\frac{\partial J_{ki}}{\partial x_l}+J_{kl}\frac{\partial J_{ij}}{\partial x_l}\right)=0\qquad(i,j,k=1,2,\cdots,m)\tag{20.6.3}$$

而 $H=H(t,x)$为 Hamilton 函数。

20.6.2 Lie 对称性

取时间 t 和变量 x 的无限小变换

$$t^*=t+\Delta t,x_i^*(t^*)=x_i(t)+\Delta x_i \qquad (i=1,2,\cdots,m) \tag{20.6.4}$$

或其展开式

$$t^*=t+\varepsilon\xi_0(t,\boldsymbol{x}),x_i^*(t^*)=x_i(t)+\varepsilon\xi_i(t,\boldsymbol{x}) \tag{20.6.5}$$

其中 ε 为一无限小参数；ξ_0，ξ_i 为无限小生成元。

广义 Hamilton 系统的 Lie 对称性是微分方程(20.6.1)在无限小变换(20.6.5)下的一种不变性。Lie 对称性的确定方程表示为

$$\mathrm{X}^{(1)}\left\{\dot{x}_i-\sum_{j=1}^m J_{ij}\frac{\partial H}{\partial x_j}\right\}\Bigg|_{(20.6.1)}=0 \tag{20.6.6}$$

其中

$$\mathrm{X}^{(1)}=\mathrm{X}^{(0)}+\sum_{i=1}^m(\dot{\xi}_i-\dot{x}_i\dot{\xi}_0)\frac{\partial}{\partial\dot{x}_i} \tag{20.6.7}$$

$$\mathrm{X}^{(0)}=\xi_0\frac{\partial}{\partial t}+\sum_{i=1}^m\xi_i\frac{\partial}{\partial x_i} \tag{20.6.8}$$

展开方程(20.6.6)，得

$$\dot{\xi}_i-\sum_{j=1}^m J_{ij}\frac{\partial H}{\partial x_j}\dot{\xi}_0=\mathrm{X}^{(0)}\Big(\sum_{j=1}^m J_{ij}\frac{\partial H}{\partial x_j}\Big) \tag{20.6.9}$$

如果时间 t 不变，则式(20.6.9)成为

$$\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_i=\sum_{k=1}^m\frac{\partial}{\partial x_k}\Big(\sum_{j=1}^m J_{ij}\frac{\partial H}{\partial x_j}\Big)\xi_k \tag{20.6.10}$$

其中

$$\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial}{\partial t}+\sum_{j=1}^m\Big(J_{ij}\frac{\partial H}{\partial x_j}\Big)\frac{\partial}{\partial x_i} \tag{20.6.11}$$

20.6.3 Hojman 型守恒量

由 Lie 对称性可直接导出 Hojman 型守恒量。令

$$\alpha_i=\sum_{j=1}^m J_{ij}\frac{\partial H}{\partial x_j} \tag{20.6.12}$$

有如下结果：

命题 1 对广义 Hamilton 系统(20.6.1)，如果无限小生成元 ξ_i 满足确定方程(20.6.10)，即

$$\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_i=\sum_{j=1}^m\frac{\partial\alpha_i}{\partial x_j}\xi_j \tag{20.6.13}$$

且存在某函数 $\mu=\mu(t,\boldsymbol{x})$ 使得

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial\alpha_i}{\partial x_i}+\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\ln\mu=0 \tag{20.6.14}$$

则系统 Lie 对称性导致 Hojman 型守恒量

$$I_H=\frac{1}{\mu}\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x_i}(\mu\,\xi_i)=\mathrm{const.} \tag{20.6.15}$$

证明:将式(20.6.15)按方程(20.6.1)求对时间 t 的导数,得

$$\begin{aligned}\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}I_H&=\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\Big(\frac{1}{\mu}\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial\mu}{\partial x_i}\xi_i+\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial\xi_i}{\partial x_i}\Big)\\&=-\frac{1}{\mu^2}\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\mu\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial\mu}{\partial x_i}\xi_i+\frac{1}{\mu}\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\Big(\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial\mu}{\partial x_i}\Big)\xi_i+\frac{1}{\mu}\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial\mu}{\partial x_i}\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_i+\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial\xi_i}{\partial x_i}\end{aligned} \tag{20.6.16}$$

由式(20.6.14)得

$$-\frac{1}{\mu^2}\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\mu=\frac{1}{\mu}\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial\alpha_i}{\partial x_i} \tag{20.6.17}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\mu=-\frac{\partial\mu}{\partial x_i}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial\alpha_j}{\partial x_j}-\mu\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial^2\alpha_j}{\partial x_i\partial x_j} \tag{20.6.18}$$

另外,有关系

$$\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\mu}{\partial x_i}=\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\mu-\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial\mu}{\partial x_j}\frac{\partial\alpha_j}{\partial x_i} \tag{20.6.19}$$

$$\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial\xi_i}{\partial x_i}=\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_i-\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial\xi_i}{\partial x_j}\frac{\partial\alpha_j}{\partial x_i} \tag{20.6.20}$$

将式(20.6.17)~(20.6.20)代入式(20.6.16),并利用方程(20.6.13),得到

$$\begin{aligned}\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}I_H&=\frac{1}{\mu}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial\alpha_i}{\partial x_i}\frac{\partial\mu}{\partial x_j}\xi_j-\frac{1}{\mu}\sum_{i=1}^{m}\Big(-\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial\mu}{\partial x_i}\frac{\partial\alpha_j}{\partial x_j}-\mu\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial^2\alpha_j}{\partial x_i\partial x_j}-\\&\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial\mu}{\partial x_j}\frac{\partial\alpha_j}{\partial x_i}\Big)\xi_i+\frac{1}{\mu}\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial\mu}{\partial x_i}\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_i+\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_i-\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial\xi_i}{\partial x_j}\frac{\partial\alpha_j}{\partial x_i}\\&=\sum_{i=1}^{m}\Big(\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_i-\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial\alpha_i}{\partial x_j}\frac{\partial\xi_j}{\partial x_i}-\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial^2\alpha_i}{\partial x_i\partial x_j}\xi_j\Big)=0\end{aligned}$$

证毕。

20.6.4 Noether 守恒量

如果广义 Hamilton 系统的维数为偶数,即 $m=2n$,则广义 Hamilton 系统成为自治或半自治 Birkhoff 系统,因此可用 Birkhoff 系统的 Noether 定理来研究这类系统的 Noether 守恒量。

20.6.5 应用举例

例 三维广义 Hamilton 系统为

$$H=\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)$$

$$(J_{ij})=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2x_2\\ -1 & 0 & 2x_1\\ -2x_2 & -2x_1 & 0\end{pmatrix}$$

试由 Lie 对称性导出 Hojman 型守恒量。

解:系统的微分方程为

$$\dot{x}_1=x_2,\dot{x}_2=-x_1,\dot{x}_3=-4x_1x_2$$

Lie 对称性的确定方程(20.6.13)给出

$$\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_1=\xi_2,\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_2=-\xi_1,\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_3=-4x_2\xi_1-4x_1\xi_2$$

可找到它的如下解

$$\xi_1=\xi_2=0,\xi_3=1 \tag{a}$$

$$\xi_1=\xi_2=0,\xi_3=\frac{1}{2}(x_1^2-x_2^2+x_3)^2 \tag{b}$$

式(20.6.14)给出

$$\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\ln\mu=0$$

它有解

$$\mu=1 \tag{c}$$

$$\mu=2x_1^2+x_3 \tag{d}$$

由式(b),(c),利用命题 1,得到 Hojman 型守恒量

$$I_H=\frac{\partial\xi_3}{\partial x_3}=x_1^2-x_2^2+x_3=c_1$$

由式(a),(d),利用命题 1,得到

$$I_H=\frac{1}{\mu}\frac{\partial\mu}{\partial x_3}=(2x_1^2+x_3)^{-1}=c_2$$

Lie 对称性是微分方程在无限小变换下的一种不变性。Lie 对称性在一定条件下可导致 Hojman 型守恒量和 Noether 守恒量。本章讨论了各类约束力学系统的 Lie 对称性以及由 Lie 对称性导致的 Hojman 型守恒量和 Noether 守恒量。有关 Lie 对称性研究可参看文献[9~22]。

思考题

20.1 Lie 对称性是比 Noether 对称性更广泛一类对称性。对否?

20.2 Lie 对称性不一定总能导致守恒量。对否?

20.3 对 Lagrange 系统,Noether 对称性必是 Lie 对称性,反过来不一定。对否?

20.4 Birkhoff 系统的 Noether 对称性不一定是 Lie 对称性。对否?

20.5 对约束力学系统,能否研究 Lie-Noether 对称性?

习题

20.1 二自由度系统的 Lagrange 函数为

$$L=t^2\left\{\frac{1}{2}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2)-\frac{1}{6}(q_1^6+q_2^6)\right\}$$

试由 Lie 对称性导出 Hojman 型守恒量和 Noether 守恒量。

20.2 三自由度系统 Hamilton 函数为

$$H=\frac{1}{2}(p_1^2+p_2^2+p_3^2)+\frac{1}{2}q_1^2$$

试研究 Lie 对称性导致的守恒量。

20.3 二自由度系统为

$$L=\frac{1}{2}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2)-\frac{1}{2}tq_2^2$$

$$Q_1=-\dot{q}_1-\dot{q}_2,Q_2=Q_2(t,q_2)$$

试研究 Lie 对称性导致的守恒量。

20.4 二自由度系统为

$$L=\frac{1}{2}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2)-q_2,Q_1=\dot{q}_1,Q_2=t-\dot{q}_2$$

试研究 Lie 对称性导致的守恒量。

20.5 非完整系统为

$$T=\frac{1}{2}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2),V=\text{const.}$$

$$f=\dot{q}_1+bt\dot{q}_2-bq_2+t=0$$

试研究 Lie 对称性导致的守恒量。

20.6 非完整系统为

$$L=\frac{1}{2}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2)-q_2,Q_1=0,Q_2=-2\dot{q}_1,f=\dot{q}_1-t\dot{q}_2=0$$

试研究 Lie 对称性导致的守恒量。

20.7 二阶 Birkhoff 系统为

$$R_1=a^2, R_2=0, B=\frac{1}{6}t^2(a^1)^6+\frac{(a^2)^2}{2t^2}$$

试研究 Lie 对称性导致的守恒量。

20.8 四阶 Birkhoff 系统为

$$R_1=a^3, R_2=a^4, R_3=R_4=0$$

$$B=\frac{1}{2}\left\{a^3-\frac{1}{b}\arctan bt\right\}^2+\frac{1}{2}\left\{a^4-\frac{1}{2b}\ln(1+b^2t^2)\right\}^2$$

试研究 Lie 对称性导致的守恒量。

20.9 二阶 Birkhoff 系统为

$$R_1=0, R_2=ta^1, B=\frac{1}{2}\{(ta^1)^2+(a^2)^2\}$$

试研究 Lie 对称性导致的守恒量。

20.10 三维广义 Hamilton 系统为

$$H=\int f(x_1)\mathrm{d}x_1+\int g(x_2)\mathrm{d}x_2-p(t)x_2+q(t)x_1$$

$$(J_{ij})=\begin{pmatrix}0 & -1 & -1\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

试研究 Lie 对称性导致的守恒量。

参考文献

[1]Olver PJ. Applications of Lie Groups to Differential Equations[M]. New York: Springer-Verlag,1986.

[2]Bluman GW, Kumei S. Symmetries and Differential Equations[M]. New York: Springer-Verlag,1989.

[3]Lutzky M. Dynamical symmetries and conserved quantities[J]. J Phys A: Math Gen,1979,12(7):973-981.

[4]赵跃宇,梅凤翔. 力学系统的对称性与不变量[M]. 北京:科学出版社,1999.

[5]梅凤翔. 李群和李代数对约束力学系统的应用[M]. 北京:科学出版社,1999.

[6]梅凤翔. 约束力学系统的对称性与守恒量[M]. 北京:北京理工大学出版社,2004.

[7] Hojman SA. A new conservation law constructed without using either Lagrangians or Hamiltonians[J]. J Phy A: Math Gen,1992,25:L291-L295.

[8]李继彬,赵晓华,刘正荣.广义哈密顿系统的理论及其应用[M].北京:科学出版社,1994.

[9]赵跃宇,梅凤翔.关于力学系统的 Lie 对称性与不变量[J].力学进展,1993,23(3):360-372.

[10]赵跃宇.非保守力学系统的 Lie 对称性和守恒量[J].力学学报,1994,26(3):380-384.

[11]Wu RH, Mei FX. On the Lie symmetries of the nonholonomic mechanical systems[J]. J of Beijing Institute of Technology,1997,6(3):229-235.

[12]梅凤翔,吴润衡,张永发.非 Chetaev 型非完整系统的 Lie 对称性与守恒量[J].力学学报,1998,30(4):468-473.

[13]Liu RW, Fu JL. Lie symmetries and conserved quantities of nonholonomic systems in phase space[J]. Appl Math Mech,1999,20(6):635-640.

[14]Zhang RC. Chen XW, Mei FX. Effects of nonholonomic constraint on Lie symmetries and conserved quantities of Lagrange systems[J]. Chin Phys,2000,9(8):561-564.

[15]Xu XJ, Mei FX, Zhang YF. Lie symmetry and conserved quantity of a system of first-order differential equations[J]. Chin Phys,2006,15(1):19-21.

[16]Zhang HB, Gu SL. Lie symmetries and conserved quantities of Birkhoff system with unilateral constraints[J]. Chin Phys,2002,11(8):765-770.

[17]傅景礼,陈向炜,罗绍凯. Lagrange-Maxwell 系统的 Lie 对称性和守恒量[J].固体力学学报,2000,21(2):157-160.

[18]张毅. Birkhoff 系统的一类 Lie 对称性守恒量[J].物理学报,2002,51(3):461-464.

[19]Chen XW, Li YM, Zhao YH. Lie symmetries, perturbation to symmetries and adiabatic invariants of Lagrange system[J]. PLA,2005,337:274-278.

[20]乔永芬,赵淑红.准坐标下广义力学的 Lie 对称定理及其逆定理[J].物理学报,2001,50(1):1-7.

[21]Fang JH. Lie symmetries and conserved quantities of second order nonholonomic mechanical system[J]. Appl Math, Mech,2002,23(9):1105-1110.

[22]Luo SK. A set of Lie symmetrical non-Noether conserved quantity for the relativistic Hamiltonian systems[J]. Chin Phys,2003,12(8):841-845.

21

形式不变性方法

2000 年，文献[1]提出了一种新的对称性——形式不变性。所谓**形式不变性**，是指力学系统运动微分方程中的**动力学函数**，如动能、势能、广义力、Hamilton函数、Birkhoff 函数等，经历无限小变换后仍满足原来方程的一种不变性。形式不变性在一定条件下可导致守恒量。

§21.1 Lagrange 系统

Lagrange 系统的形式不变性在一定条件下可导致**新型守恒量**、Noether 守恒量，以及 Hojman 型守恒量。

21.1.1 运动微分方程

Lagrange 系统的运动微分方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial L}{\partial q_s}=0 \qquad (s=1,2,\cdots,n) \tag{21.1.1}$$

其中 $L=L(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$。方程(21.1.1)可简写成

$$\mathrm{E}_s(L)=0 \qquad (s=1,2,\cdots,n) \tag{21.1.2}$$

其中

$$\mathrm{E}_s=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial}{\partial q_s} \tag{21.1.3}$$

为 Euler 算子。假设系统(21.1.1)非奇异，即设

$$\det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_s\partial \dot{q}_k}\right)\neq 0 \tag{21.1.4}$$

则可求出所有广义加速度，记作

$$\ddot{q}_s=\alpha_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) \qquad (s=1,2,\cdots,n) \tag{21.1.5}$$

21.1.2 形式不变性

取时间和坐标的无限小变换

$$t^*=t+\Delta t, q_s^*(t^*)=q_s(t)+\Delta q_s \qquad (s=1,2,\cdots,n) \tag{21.1.6}$$

或其展开式

$$t^*=t+\varepsilon\xi_0(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}), q_s^*(t^*)=q_s(t)+\varepsilon\xi_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) \tag{21.1.7}$$

令函数 L 经历变换变为 L^*，有

$$L^*=L\left(t^*,\boldsymbol{q}^*,\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}^*}{\mathrm{d}t^*}\right)=L(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})+\varepsilon \mathrm{X}^{(1)}(L)+O(\varepsilon^2) \tag{21.1.8}$$

定义 如果用变换后的 Lagrange 函数 L^* 代替变换前的 L 时，方程(21.1.2)的形式保持不变，则称这种不变性为 Lagrange 系统的形式不变性。

由上述定义，有

$$\mathrm{E}_s(L^*)=0 \qquad (s=1,2,\cdots,n) \tag{21.1.9}$$

将式(21.1.8)代入式(21.1.9)，忽略 ε^2 及更高阶小项，并利用方程(21.1.2)，得到

$$\mathrm{E}_s\{\mathrm{X}^{(1)}(L)\}=0 \tag{21.1.10}$$

于是有

判据 对 Lagrange 系统(21.1.2)，如果无限小生成元 ξ_0，ξ_s 满足方程(21.1.10)，则相应不变性为系统的形式不变性。

称方程(21.1.10)为形式不变性的判据方程。

一般说来，形式不变性不一定是 Noether 对称性，也不一定是 Lie 对称性。

21.1.3 新型守恒量

对 Lagrange 系统，由形式不变性可直接导出一类新型守恒量，有如下结果：

命题 1 如果 Lagrange 系统形式不变性的生成元 ξ_0，ξ_s 和规范函数 $G_F=G_F(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 满足如下结构方程

$$\widetilde{\mathrm{X}}^{(1)}(L)\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_0+\widetilde{\mathrm{X}}^{(1)}\{\mathrm{X}^{(1)}(L)\}+\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}G_F=0 \tag{21.1.11}$$

其中

$$\widetilde{\mathrm{X}}^{(1)}=\xi_0\frac{\partial}{\partial t}+\sum_{s=1}^{n}\xi_s\frac{\partial}{\partial q_s}+\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_s-\dot{q}_s\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_0\right)\frac{\partial}{\partial\dot{q}_s} \tag{21.1.12}$$

$$\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial}{\partial t}+\sum_{s=1}^{n}\dot{q}_s\frac{\partial}{\partial q_s}+\sum_{s=1}^{n}\alpha_s\frac{\partial}{\partial\dot{q}_s} \tag{21.1.13}$$

则系统形式不变性导致新型守恒量

$$I_F=\widetilde{\mathrm{X}}^{(1)}(L)\xi_0+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial\,\widetilde{\mathrm{X}}^{(1)}(L)}{\partial\,\dot{q}_s}(\xi_s-\dot{q}_s\xi_0)+G_F=\text{const.} \tag{21.1.14}$$

证明：

$$\frac{\bar{d}}{dt}I_F=\Big(\frac{\partial\widetilde{X}^{(1)}(L)}{\partial t}+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial\widetilde{X}^{(1)}(L)}{\partial q_s}\dot{q}_s+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial\widetilde{X}^{(1)}(L)}{\partial\dot{q}_s}\alpha_s\Big)\xi_0+$$

$$\widetilde{X}^{(1)}(L)\frac{\bar{d}}{dt}\xi_0+\sum_{s=1}^{n}\frac{\bar{d}}{dt}\Big(\frac{\partial\widetilde{X}^{(1)}(L)}{\partial\dot{q}_s}\Big)(\xi_s-\dot{q}_s\xi_0)+$$

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial\widetilde{X}^{(1)}(L)}{\partial\dot{q}_s}\Big(\frac{\bar{d}}{dt}\xi_s-\alpha_s\xi_0-\dot{q}_s\frac{\bar{d}}{dt}\xi_0\Big)-\widetilde{X}^{(1)}(L)\frac{\bar{d}}{dt}\xi_0-$$

$$\frac{\partial\widetilde{X}^{(1)}(L)}{\partial t}\xi_0-\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial\widetilde{X}^{(1)}(L)}{\partial q_s}\xi_s-\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial\widetilde{X}^{(1)}(L)}{\partial\dot{q}_s}\Big(\frac{\bar{d}}{dt}\xi_s-\dot{q}_s\frac{\bar{d}}{dt}\xi_0\Big)$$

$$=\sum_{s=1}^{n}\Big(\frac{\bar{d}}{dt}\frac{\partial\widetilde{X}^{(1)}(L)}{\partial\dot{q}_s}-\frac{\partial\widetilde{X}^{(1)}(L)}{\partial q_s}\Big)(\xi_s-\dot{q}_s\xi_0)=0$$

21.1.4 Noether 守恒量

由形式不变性通过 Noether 对称性可间接导出 Noether 守恒量，有如下结果：

命题 2 对 Lagrange 系统，如果形式不变性的生成元 ξ_0，ξ_s 和规范函数 $G_N=G_N(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$满足如下结构方程

$$L\dot{\xi}_0+X^{(1)}(L)+\dot{G}_N=0 \tag{21.1.15}$$

则形式不变性导致 Nother 守恒量

$$I_N=L\xi_0+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_s}(\xi_s-\dot{q}_s\xi_0)+G_N=\text{const.} \tag{21.1.16}$$

21.1.5 Hojman 型守恒量

由形式不变性通过 Lie 对称性可间接导出 Hojman 型守恒量，有如下结果：

命题 3 对 Lagrange 系统，在时间不变的特殊无限小变换下，如果形式不变性的生成元 ξ_s 满足 Lie 对称性的确定方程

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\bar{d}}{dt}\xi_s\Big)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\alpha_s}{\partial q_k}\xi_k+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\alpha_s}{\partial\dot{q}_k}\frac{\bar{d}}{dt}\xi_k \tag{21.1.17}$$

且存在某函数 $\mu=\mu(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$，使得

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial\alpha_s}{\partial\dot{q}_s}+\frac{\bar{d}}{dt}\ln\mu=0 \tag{21.1.18}$$

则系统形式不变性导致 Hojman 型守恒量

$$I_H=\frac{1}{\mu}\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial}{\partial q_s}(\mu\xi_s)+\frac{1}{\mu}\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial}{\partial\dot{q}_s}\Big(\mu\frac{\bar{d}}{dt}\xi_s\Big)=\text{const.} \tag{21.1.19}$$

21.1.6 应用举例

例 1 Emden 方程为

$$\ddot{q}+\frac{2}{t}\dot{q}+q^5=0$$

试研究形式不变性导致的守恒量。

解:Emden 方程可化为 Lagrange 系统,其 Lagrange 函数为

$$L=t^2\left(\frac{1}{2}\dot{q}^2-\frac{1}{6}q^6\right)$$

做计算,得

$$X^{(1)}(L)=2t\xi_0\left(\frac{1}{2}\dot{q}^2-\frac{1}{6}q^6\right)+t^2\{\dot{q}(\dot{\xi}-\dot{q}\dot{\xi}_0)-q^5\xi\}$$

取生成元为

$$\xi_0=t,\xi=-\frac{1}{2}q$$

则有

$$\widetilde{X}^{(1)}(L)=X^{(1)}(L)=-\frac{1}{2}t^2\dot{q}^2+\frac{1}{6}t^2q^6=-L$$

结构方程(21.1.11)给出

$$\frac{\bar{d}}{dt}G_F=0$$

于是有

$$G_F=0$$

命题 1 给出新型守恒量

$$I_F=\frac{1}{2}t^3\dot{q}^2+\frac{1}{2}t^2q\dot{q}+\frac{1}{6}t^3q^6=c_1$$

形式不变性的生成元 $\xi_0=t,\xi=-\frac{1}{2}q$ 也是 Noether 对称性的。

结构方程(21.1.15)给出

$$L-L+\dot{G}_N=0$$

因此

$$G_N=0$$

命题 2 给出 Noether 守恒量

$$I_N=t^3\left(\frac{1}{2}\dot{q}^2-\frac{1}{6}q^6\right)+t^2\dot{q}\left(-\frac{1}{2}q-\dot{q}t\right)$$

$$=-\frac{1}{2}t^3\dot{q}^2-\frac{1}{2}t^2q\dot{q}-\frac{1}{6}t^3q^6=c_2$$

例 2 二自由度系统 Lagrange 函数为

$$L=\frac{1}{2}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2)-q_2$$

试研究形式不变性导致的守恒量。

解:做计算,有

$$X^{(1)}(L)=\dot{q}_1(\dot{\xi}_1-\dot{q}_1\dot{\xi}_0)+\dot{q}_2(\dot{\xi}_2-\dot{q}_2\dot{\xi}_0)-\xi_2$$

取生成元为

$$\xi_0=0,\xi_1=\dot{q}_1+t,\xi_2=0$$

则

$$X^{(1)}(L)=\dot{q}_1(\ddot{q}_1+1),\tilde{X}^{(1)}(L)=\dot{q}_1\tilde{X}^{(1)}\{\tilde{X}^{(1)}(L)\}=1$$

代入结构方程,得

$$G_F=-t$$

守恒量式(21.1.14)给出新型守恒量

$$I_F=\dot{q}_1+t-t=\dot{q}_1=c_1$$

对上述生成元,结构方程(21.1.15)给出

$$\dot{q}_1(\ddot{q}_1+1)+\dot{G}_N=0$$

由此得

$$G_N=-\frac{1}{2}\dot{q}_1^2-q_1$$

守恒量式(21.1.16)给出

$$I_N=\dot{q}_1(\dot{q}_1+t)-\frac{1}{2}\dot{q}_1^2-q_1$$

$$=\frac{1}{2}\dot{q}_1^2+\dot{q}_1t-q_1=c_2$$

Lie 对称性的确定方程(21.1.17)给出

$$\frac{\bar{d}}{dt}\left(\frac{\bar{d}}{dt}\xi_1\right)=0,\frac{\bar{d}}{dt}\left(\frac{\bar{d}}{dt}\xi_2\right)=0$$

式(21.1.18)给出

$$\frac{\bar{d}}{dt}\ln\mu=0$$

上述生成元也是 Lie 对称性的。取

$$\mu=\dot{q}_1$$

守恒量式(21.1.19)给出

$$I_H=\frac{1}{\mu}\frac{\partial\mu}{\partial\dot{q}_1}=(\dot{q}_1)^{-1}=c_3$$

再取生成元

$$\xi_0=1,\xi_1=0,\xi_2=\dot{q}_2$$

则有

$$X^{(1)}(L)=\dot{q}_2\ddot{q}_2-\dot{q}_2,\widetilde{X}^{(1)}(L)=-2\dot{q}_2,\widetilde{X}^{(1)}\{\widetilde{X}^{(1)}(L)\}=2$$

代入结构方程(21.1.11)，得

$$G_F=-2t$$

守恒量式(21.1.14)给出

$$I_F=-2\dot{q}_2-2(\dot{q}_2-\dot{q}_2)-2t=-2(\dot{q}_2+t)=C_4$$

结构方程(21.1.15)给出

$$\dot{q}_2\ddot{q}_2-\dot{q}_2+\dot{G}_N=0$$

由此得

$$G_N=q_2-\frac{1}{2}\dot{q}_2^2$$

而守恒量式(21.1.16)给出

$$I_N=\frac{1}{2}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2)-q_2-\dot{q}_1^2+q_2-\frac{1}{2}\dot{q}_2^2=-\frac{1}{2}\dot{q}_1^2=c_5$$

§21.2 Hamilton系统

Hamilton 系统的形式不变性在一定条件下可导致新型守恒量、Noether 守恒量，以及 Hojman 型守恒量。

21.2.1 运动微分方程

Hamilton 系统的运动微分方程表示为

$$\dot{q}_s=\frac{\partial H}{\partial p_s},\dot{p}_s=-\frac{\partial H}{\partial q_s}\qquad(s=1,2,\cdots,n)\tag{21.2.1}$$

其中 $H=H(t,\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})$为 Hamilton 函数。展开方程(21.2.1)，得

$$\dot{q}_s=g_s(t,\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}),\dot{p}_s=h_s(t,\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})\tag{21.2.2}$$

21.2.2 形式不变性

取时间和正则变量的无限小变换

$$t^*=t+\Delta t,q_s^*(t^*)=q_s(t)+\Delta q_s,p_s^*(t^*)=p_s(t)+\Delta p_s\qquad(s=1,2,\cdots,n)\tag{21.2.3}$$

或其展开式

$$t^*=t+\varepsilon\xi_0(t,\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}),q_s^*(t^*)=q_s(t)+\varepsilon\xi_s(t,\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})$$

$$p_s^*(t^*)=p_s(t)+\varepsilon\eta_s(t,\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}) \tag{21.2.4}$$

其中 ε 为一无限小参数;ξ_0,ξ_s,η_s 为无限小生成元。

假设在经历无限小变换(21.2.4)后,Hamilton 函数 H 变为 H^*,有

$$H^*=H(t^*,\boldsymbol{q}^*,\boldsymbol{p}^*)=H(t,\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})+\varepsilon \mathrm{X}^{(0)}(H)+O(\varepsilon^2) \tag{21.2.5}$$

其中

$$\mathrm{X}^{(0)}=\xi_0\frac{\partial}{\partial t}+\sum_{s=1}^{n}\xi_s\frac{\partial}{\partial q_s}+\sum_{s=1}^{n}\eta_s\frac{\partial}{\partial p_s} \tag{21.2.6}$$

定义 如果用无限小变换后的 H^* 代替变换前的 H 时,方程(21.2.1)的形式保持不变,则称这种不变性为 Hamilton 系统的形式不变性。

由上述定义,有

$$\dot{q}_s=\frac{\partial H^*}{\partial p_s},\dot{p}_s=-\frac{\partial H^*}{\partial q_s} \tag{21.2.7}$$

将式(21.2.5)代入方程(21.2.7),忽略 ε^2 及更高阶小项,并利用方程(21.2.1),得到

$$\frac{\partial}{\partial p_s}\{\mathrm{X}^{(0)}(H)\}=0,\frac{\partial}{\partial q_s}\{\mathrm{X}^{(0)}(H)\}=0 \qquad (s=1,2,\cdots,n) \tag{21.2.8}$$

于是有

判据 对 Hamilton 系统(21.2.1),如果无限小生成元 ξ_0,ξ_s,η_s 满足方程(21.2.8),则相应不变性为系统的形式不变性。

称方程(21.2.8)为 Hamilton 系统形式不变性的判据方程。

21.2.3 新型守恒量

对 Hamilton 系统,由形式不变性可导出一类新型守恒量,有如下结果:

命题 1 如果 Hamilton 系统形式不变性的生成元 ξ_0,ξ_s,η_s 和规范函数 $G_F=G_F(t,\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})$ 满足如下结构方程

$$\sum_{s=1}^{n}\mathrm{X}^{(0)}(p_s)\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_s+\sum_{s=1}^{n}\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\{\mathrm{X}^{(0)}(p_s)\}\xi_0-\mathrm{X}^{(0)}\{\mathrm{X}^{(0)}(H)\}-$$

$$\mathrm{X}^{(0)}(H)\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_0+\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}G_F=0 \tag{21.2.9}$$

则系统存在如下新型守恒量

$$I_F=\sum_{s=1}^{n}\mathrm{X}^{(0)}(p_s)\xi_s-\mathrm{X}^{(0)}(H)\xi_0+G_F=\text{const.} \tag{21.2.10}$$

21.2.4 Noether 守恒量

对 Hamilton 系统,形式不变性通过 Noether 对称性可间接导出 Noether 守恒量,有如下结果:

命题 2 如果 Hamilton 系统形式不变性的生成元 ξ_0, ξ_s, η_s 和规范函数 $G_N = G_N(t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})$ 满足如下结构方程

$$\sum_{s=1}^{n} p_s \dot{\xi}_s - \frac{\partial H}{\partial t}\xi_0 - \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial q_s}\xi_s - H\dot{\xi}_0 + \dot{G}_N = 0 \tag{21.2.11}$$

则形式不变性导致 Noether 守恒量

$$I_N = \sum_{s=1}^{n} p_s \xi_s - H\xi_0 + G_N = \text{const.} \tag{21.2.12}$$

21.2.5 Hojman 型守恒量

在时间不变的无限小变换

$$t^* = t, q_s^*(t^*) = q_s(t) + \varepsilon\xi_s(t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}), p_s^*(t^*) = p_s(t) + \varepsilon\eta_s(t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) \tag{21.2.13}$$

下，形式不变性为 Lie 对称性的充分必要条件为[2]

$$\begin{aligned} &\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_s + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \xi_k}{\partial p_s}\frac{\partial H}{\partial q_k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \eta_k}{\partial p_s}\frac{\partial H}{\partial p_k} = 0 \\ &\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\eta_s - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \xi_k}{\partial p_s}\frac{\partial H}{\partial q_k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \eta_k}{\partial p_s}\frac{\partial H}{\partial p_k} = 0 \end{aligned} \quad (s = 1, 2, \cdots, n) \tag{21.2.14}$$

形式不变性通过 Lie 对称性可间接导出 Hojman 型守恒量，有如下结果：

命题 3 如果 Hamilton 系统形式不变性的生成元 ξ_s, η_s 满足式(21.2.14)，则形式不变性导致 Hojman 型守恒量

$$I_H = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial \xi_s}{\partial q_s} + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial \eta_s}{\partial p_s} = \text{const.} \tag{21.2.15}$$

21.2.6 应用举例

例 1 二自由度 Hamilton 系统为

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + q_1$$

试研究形式不变性导致的守恒量。

解：做计算，有

$$X^{(0)}(H) = p_1\eta_1 + p_2\eta_2 + \xi_1$$

取成生元为

$$\xi_0 = 0, \xi_1 = p_1, \xi_2 = 0, \eta_1 = -1, \eta_2 = 0$$

则

$$X^{(0)}(H)=0$$

$$X^{(0)}(p_1)=\eta_1=-1, X^{(0)}(p_2)=\eta_2=0$$

$$\frac{\bar{d}}{dt}\xi_1=\dot{p}_1=-1, \frac{\bar{d}}{dt}\xi_2=0$$

结构方程(21.2.9)给出

$$G_F=-t$$

新型守恒量式(21.2.10)给出

$$I_F=-p_1-t=c_1$$

取生成元

$$\xi_0=0, \xi_1=p_2, \xi_2=p_1+p_2, \eta_1=0, \eta_2=-1$$

则有

$$X^{(0)}(H)=0$$

$$X^{(0)}(p_1)=\eta_1=0, X^{(0)}(p_2)=\eta_2=-1,$$

$$\frac{\bar{d}}{dt}\xi_1=\dot{p}_2=0, \frac{\bar{d}}{dt}\xi_2=\dot{p}_1+\dot{p}_2=-1$$

结构方程(21.2.9)给出

$$G_F=-t$$

新型守恒量式(21.1.10)给出

$$I_F=-p_1-p_2-t=c_2$$

取成生元

$$\xi_0=0, \xi_1=0, \xi_2=(q_2-p_2t)^2, \eta_1=\eta_2=0$$

则有

$$X^{(0)}(H)=0$$

因此,它是形式不变性的。可以验证,条件(21.2.14)满足,因此,也是 Lie 对称性的。Hojman 型守恒量式(21.2.15)给出

$$I_H=\frac{\partial\xi_2}{\partial q_2}=2(q_2-p_2t)=c_3$$

将生成元

$$\xi_0=\xi_1=0, \xi_2=p_2, \eta_1=\eta_2=0$$

代入结构方程(21.2.11),得

$$G_N=-\frac{1}{2}p_2^2$$

Noether 守恒量式(21.2.12)给出

$$I_N=p_2^2-\frac{1}{2}p_2^2=\frac{1}{2}p_2^2=c_4$$

例 2 常规战斗的微分方程模型为[3]

$$\dot{x}=-by,\dot{y}=-cx$$

其中 b,c 为正常数。试将其 Hamilton 化后，研究形式不变性导致的守恒量。

解：令

$$x=q,y=p$$

则可 Hamilton 化，其 Hamilton 函数为

$$H=\frac{1}{2}cq^2-\frac{1}{2}bp^2$$

做计算，有

$$X^{(0)}(H)=cq\xi-bp\eta$$

取生成元为

$$\xi_0=1,\xi=\eta=0$$

则有

$$X^{(0)}(H)=0$$

因此，它是形式不变性的。代入结构方程(21.2.11)，得

$$G_N=0$$

Noether 守恒量式(21.2.12)给出

$$I_N=-H=\frac{1}{2}bp^2-\frac{1}{2}cq^2=c_1$$

§21.3 一般完整系统

一般完整系统的形式不变性在一定条件下可导致新型守恒量、Noether 守恒量，以及 Hojman 型守恒量。

21.3.1 运动微分方程

一般完整力学系统在广义坐标下的微分方程表示为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial L}{\partial q_s}=Q_s \qquad (s=1,2,\cdots,n) \tag{21.3.1}$$

其中 $L=L(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 为 Lagrange 函数；$Q_s=Q_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 为非势广义力。设系统非奇异，即设

$$\det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_s \partial \dot{q}_k}\right)\neq 0 \tag{21.3.2}$$

则由方程(21.3.1)可解出所有广义加速度,记作

$$\ddot{q}_s=\alpha_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\qquad(s=1,2,\cdots,n)\tag{21.3.3}$$

21.3.2 形式不变性

取时间和坐标的无限小变换

$$t^*=t+\Delta t,q_s^*(t^*)=q_s(t)+\Delta q_s\qquad(s=1,2,\cdots,n)\tag{21.3.4}$$

或其展开式

$$t^*=t+\varepsilon\xi_0(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}),q_s^*(t^*)=q_s(t)+\varepsilon\xi_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\tag{21.3.5}$$

假设在无限小变换(21.3.4)后,L 变为 L^*,Q_s 变为 Q_s^*,有

$$\begin{aligned}L^*&=L\left(t^*,\boldsymbol{q}^*,\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}^*}{\mathrm{d}t^*}\right)=L(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})+\varepsilon\mathrm{X}^{(1)}(L)+O(\varepsilon^2)\\Q_s^*&=Q_s\left(t^*,\boldsymbol{q}^*,\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}^*}{\mathrm{d}t^*}\right)=Q_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})+\varepsilon\mathrm{X}^{(1)}(Q_s)+O(\varepsilon^2)\end{aligned}\tag{21.3.6}$$

其中

$$\mathrm{X}^{(1)}=\xi_0\frac{\partial}{\partial t}+\sum_{s=1}^{n}\xi_s\frac{\partial}{\partial q_s}+\sum_{s=1}^{n}(\dot{\xi}_s-\dot{q}_s\dot{\xi}_0)\frac{\partial}{\partial\dot{q}_s}\tag{21.3.7}$$

定义 如果用变换后的动力学函数 L^*,Q_s^* 代替变换前的动力学函数 L,Q_s 时,方程(22.3.1)的形式保持不变,则这种不变性称为一般完整系统的形式不变性。

由上述定义,有

$$\mathrm{E}_s(L^*)=Q_s^*\qquad(s=1,2,\cdots,n)\tag{21.3.8}$$

其中

$$\mathrm{E}_s=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial\dot{q}_s}-\frac{\partial}{\partial q_s}\qquad(s=1,2,\cdots,n)\tag{21.3.9}$$

为 Euler 算子。将式(21.3.6)代入方程(21.3.8),忽略 ε^2 及更高阶小项,并利用方程(21.3.1)得到

$$\mathrm{E}_s\{\mathrm{X}^{(1)}(L)\}=\mathrm{X}^{(1)}(Q_s)\qquad(s=1,2,\cdots,n)\tag{21.3.10}$$

于是有

判据 对一般完整系统,如果无限小生成元 ξ_0,ξ_s 满足方程(21.3.10),则相应不变性为系统的形式不变性。

称方程(21.3.10)为一般完整系统形式不变性的判据方程。

21.3.3 新型守恒量

对一般完整系统,形式不变性可直接导致一类新型守恒量,有如下结果:

命题 1 如果一般完整系统形式不变性的生成元 ξ_0,ξ_s 和规范函数 $G_F=G_F(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$满足如下结构方程

$$\widetilde{X}^{(1)}(L)\frac{\bar{d}}{dt}\xi_0+\widetilde{X}^{(1)}\{\widetilde{X}^{(1)}(L)\}+\sum_{s=1}^{n}\widetilde{X}^{(1)}(Q_s)(\xi_s-\dot{q}_s\xi_0)+\frac{\bar{d}}{dt}G_F=0$$

(21.3.11)

则形式不变性导致新型守恒量

$$I_F=\widetilde{X}^{(1)}(L)\xi_0+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial\widetilde{X}^{(1)}(L)}{\partial\dot{q}_s}(\xi_s-\dot{q}_s\xi_0)+G_F=\text{const.}$$

(21.3.12)

21.3.4 Noether 守恒量

对一般完整系统，形式不变性通过 Noether 对称性可间接导致 Noether 守恒量，有如下结果：

命题 2 对一般完整系统，如果形式不变性的生成元 ξ_0，ξ_s 和规范函数 $G_N=G_N(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$满足如下结构方程

$$L\dot{\xi}_0+X^{(1)}(L)+\sum_{s=1}^{n}Q_s(\xi_s-\dot{q}_s\xi_0)+\dot{G}_N=0 \tag{21.3.13}$$

则形式不变性导致 Noether 守恒量

$$I_N=L\xi_0+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_s}(\xi_s-\dot{q}_s\xi_0)+G_N=\text{const.} \tag{21.3.14}$$

21.3.5 Hojman 型守恒量

对一般完整系统，形式不变性通过 Lie 对称性可间接导致 Hojman 型守恒量，有如下结果：

命题 3 在时间不变的无限小变换

$$t^*=t,q_s^*(t^*)=q_s(t)+\varepsilon\xi_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) \tag{21.3.15}$$

下，如果系统形式不变性的生成元满足

$$\frac{\bar{d}}{dt}\left(\frac{\bar{d}}{dt}\xi_s\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\alpha_s}{\partial q_k}\xi_k+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\alpha_s}{\partial\dot{q}_k}\frac{\bar{d}}{dt}\xi_k \tag{21.3.16}$$

并且存在某函数 $\mu=\mu(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$，使得

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial\alpha_s}{\partial\dot{q}_s}+\frac{\bar{d}}{dt}\ln\mu=0 \tag{21.3.17}$$

其中

$$\frac{\bar{d}}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+\sum_{k=1}^{n}\dot{q}_k\frac{\partial}{\partial q_k}+\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\frac{\partial}{\partial\dot{q}_k} \tag{21.3.18}$$

则形式不变性导致 Hojman 型守恒量

$$I_H=\frac{1}{\mu}\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial}{\partial q_s}(\mu\xi_s)+\frac{1}{\mu}\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial}{\partial\dot{q}_s}\left(\mu\frac{\bar{d}}{dt}\xi_s\right)=\text{const.} \tag{21.3.19}$$

21.3.6 应用举例

例 1 二自由度系统为

$$L=\frac{1}{2}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2)-q_2$$

$$Q_1=\frac{1}{1+t^2}(\dot{q}_2-2t\dot{q}_1-t),$$

$$Q_2=-\frac{1}{1+t^2}(t\dot{q}_2-2\dot{q}_1-t^2)$$

试研究系统形式不变性导致的守恒量。

解:做计算,有

$$\widetilde{X}^{(1)}(L)=\dot{q}_1\left(\frac{\bar{d}}{dt}\xi_1-\dot{q}_1\frac{\bar{d}}{dt}\xi_0\right)+\dot{q}_2\left(\frac{\bar{d}}{dt}\xi_2-\dot{q}_2\frac{\bar{d}}{dt}\xi_0\right)-\xi_2$$

$$\widetilde{X}^{(1)}(Q_1)=\xi_0\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{1}{1+t^2}(\dot{q}_2-2t\dot{q}_1-t)\right\}+\frac{1}{1+t^2}\left(\frac{\bar{d}}{dt}\xi_2-\dot{q}_2\frac{\bar{d}}{dt}\xi_0\right)-\frac{2t}{1+t^2}\left(\frac{\bar{d}}{dt}\xi_1-\dot{q}_1\frac{\bar{d}}{dt}\xi_0\right)$$

$$\widetilde{X}^{(1)}(Q_2)=-\xi_0\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{1}{1+t^2}(t\dot{q}_2-2\dot{q}_1-t^2)\right\}-\frac{t}{1+t^2}\left(\frac{\bar{d}}{dt}\xi_2-\dot{q}_2\frac{\bar{d}}{dt}\xi_0\right)+\frac{2}{1+t^2}\left(\frac{\bar{d}}{dt}\xi_1-\dot{q}_1\frac{\bar{d}}{dt}\xi_0\right)$$

取生成元为

$$\xi_0=\xi_1=0,\xi_2=t\dot{q}_1+\dot{q}_2+q_1+t$$

则有

$$\frac{\bar{d}}{dt}\xi_2=0$$

$$\widetilde{X}^{(1)}(L)=-(t\dot{q}_1+\dot{q}_2+q_1+t)$$

$$E_1\{\widetilde{X}^{(1)}(L)\}=E_2\{\widetilde{X}^{(1)}(L)\}=\widetilde{X}^{(1)}(Q_1)=\widetilde{X}^{(1)}(Q_2)=0$$

$$\widetilde{X}^{(1)}\{\widetilde{X}^{(1)}(L)\}=0$$

代入结构方程(21.3.11),得到

$$G_F=0$$

命题 1 给出新型守恒量

$$I_F=-(t\dot{q}_1+\dot{q}_2+q_1+t)=c_1$$

例 2 二自由度系统为

$$L=\frac{1}{2}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2)-f(t,q_2)$$

$$Q_1=-\dot{q}_2, Q_2=Q_2(t,q_2,\dot{q}_2)$$

试研究形式不变性导致的守恒量。

解：做计算，有

$$X^{(1)}(L)=\dot{q}_1(\dot{\xi}_1-\dot{q}_1\dot{\xi}_0)+\dot{q}_2(\dot{\xi}_2-\dot{q}_2\dot{\xi}_0)-\frac{\partial f}{\partial t}\xi_0-\frac{\partial f}{\partial q_2}\xi_2$$

$$X^{(1)}(Q_1)=-\dot{\xi}_2+\dot{q}_2\dot{\xi}_0, X^{(1)}(Q_2)=\frac{\partial Q_2}{\partial t}\xi_0+\frac{\partial Q_2}{\partial q_2}\xi_2+\frac{\partial Q_2}{\partial \dot{q}_2}(\dot{\xi}_2-\dot{q}_2\dot{\xi}_0)$$

取生成元为

$$\xi_0=\xi_2=0, \xi_1=1$$

则有

$$X^{(1)}(L)=X^{(1)}(Q_1)=X^{(1)}(Q_2)=0$$

因此，上述生成元是形式不变性的。将生成元代入结构方程(21.3.13)，得

$$-\dot{q}_2+\dot{G}_N=0$$

于是有

$$G_N=q_2$$

而守恒量式(21.3.14)给出

$$I_N=\dot{q}_1+q_2=c_1$$

例 3 二自由度系统为

$$L=\frac{1}{2}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2), Q_1=-\frac{t}{1+t^2}\dot{q}_1, Q_2=\frac{1}{1+t^2}\dot{q}_1$$

试研究形式不变性导致的守恒量。

解：做计算，有

$$\tilde{X}^{(1)}(L)=\dot{q}_1\frac{\bar{d}}{dt}\xi_1+\dot{q}_2\frac{\bar{d}}{dt}\xi_2$$

$$\tilde{X}^{(1)}(Q_1)=-\frac{t}{1+t^2}\frac{\bar{d}}{dt}\xi_1, \tilde{X}^{(1)}(Q_2)=\frac{t}{1+t^2}\frac{\bar{d}}{dt}\xi_1$$

这里假设 $\xi_0=0$。取生成元为

$$\xi_1=1, \xi_2=1 \tag{a}$$

$$\xi_1=0, \xi_2=(\dot{q}_1+t\dot{q}_2-q_2)^2 \tag{b}$$

$$\xi_1=0, \xi_2=\dot{q}_1(1+t^2)^{\frac{1}{2}}(\dot{q}_1+t\dot{q}_2-q_2) \tag{c}$$

容易看出，这些生成元都对应系统的形式不变性。同时，它们也满足式(21.3.16)，因此也是 Lie 对称性的。式(21.3.18)给出

$$-\frac{t}{1+t^2}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\mu=0$$

它有如下解

$$\mu=(1+t^2)^{\frac{1}{2}} \tag{d}$$

$$\mu=(1+t^2)^{\frac{1}{2}}(\dot{q}_1+t\dot{q}_2-q_2) \tag{e}$$

由式(b),(d),利用命题 3,得到 Hojman 型守恒量

$$I_H=-2(\dot{q}_1+t\dot{q}_2-q_2)=c_1$$

由式(c),(d),利用命题 3,得到守恒量

$$I_H=-\dot{q}_1(1+t^2)^{\frac{1}{2}}=c_2$$

由式(a),(e),得到

$$I_H=-(\dot{q}_1+t\dot{q}_2-q_2)=c_3$$

§21.4 Четаев 型非完整系统

Четаев 型非完整系统在一定条件下可由形式不变性导出新型守恒量、Noether 守恒量,以及 Hojman 型守恒量。

21.4.1 运动微分方程

假设力学系统的位形由 n 个广义坐标 $q_s(s=1,2,\cdots,n)$ 来确定,它的运动受有 g 个双面理想 Четаев 型非完整约束

$$f_\beta(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})=0 \qquad (\beta=1,2,\cdots,g) \tag{21.4.1}$$

约束(21.4.1)加在虚位移 δq_s 上的限制为

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\delta q_s=0 \qquad (\beta=1,2,\cdots,g) \tag{21.4.2}$$

系统的运动微分方程表示为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial L}{\partial q_s}=Q_s+\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s} \qquad (s=1,2,\cdots,n) \tag{21.4.3}$$

其中 λ_β 为约束乘子。设系统非奇异,即设

$$\det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_s\partial \dot{q}_k}\right)\neq 0 \tag{21.4.4}$$

则由方程(21.4.1)和(21.4.3),在运动微分方程积分之前,可求出 λ_β 作为 $t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}$ 的函数。于是,方程(21.4.3)可写成形式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial L}{\partial q_s}=Q_s+\Lambda_s \qquad (s=1,2,\cdots,n) \tag{21.4.5}$$

其中

$$\Lambda_s = \Lambda_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) = \sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s} \tag{21.4.6}$$

为广义非完整约束力。方程(21.4.5)可简写成

$$\mathrm{E}_s(L)=Q_s+\Lambda_s \qquad (s=1,2,\cdots,n) \tag{21.4.7}$$

称方程(21.4.5)为与非完整系统(21.4.1),(21.4.3)相应的完整系统的方程。非完整系统的运动可在完整系统(21.4.5)的解中找到,只要运动的初始条件满足非完整约束(21.4.1)。展开方程(21.4.5),可求出所有广义加速度,记作

$$\ddot{q}_s=\alpha_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) \qquad (s=1,2,\cdots,n) \tag{21.4.8}$$

21.4.2 形式不变性

取无限小变换

$$t^*=t+\varepsilon\xi_0(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}),q_s^*(t^*)=q_s(t)+\varepsilon\xi_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) \tag{21.4.9}$$

假设经历无限小变换(21.4.9)后,动力学函数 L 变为 L^*,Q_s 变为 Q_s^*,Λ_s 变为 Λ_s^*,f_β 变为 f_β^*,有

$$\begin{aligned}
L^* &= L\left(t^*,\boldsymbol{q}^*,\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}^*}{\mathrm{d}t^*}\right)=L(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})+\varepsilon \mathrm{X}^{(1)}(L)+O(\varepsilon^2)\\
Q_s^* &= Q_s\left(t^*,\boldsymbol{q}^*,\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}^*}{\mathrm{d}t^*}\right)=Q_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})+\varepsilon \mathrm{X}^{(1)}(Q_s)+O(\varepsilon^2)\\
\Lambda_s^* &= \Lambda_s\left(t^*,\boldsymbol{q}^*,\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}^*}{\mathrm{d}t^*}\right)=\Lambda_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})+\varepsilon \mathrm{X}^{(1)}(\Lambda_s)+O(\varepsilon^2)\\
f_\beta^* &= f_\beta\left(t^*,\boldsymbol{q}^*,\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}^*}{\mathrm{d}t^*}\right)=f_\beta(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})+\varepsilon \mathrm{X}^{(1)}(f_\beta)+O(\varepsilon^2)
\end{aligned} \tag{21.4.10}$$

方程(21.4.5)的形式不变性定义为

$$\mathrm{E}_s(L^*)=Q_s^*+\Lambda_s^* \qquad (s=1,2,\cdots,n) \tag{21.4.11}$$

方程(21.4.1)的形式不变性定义为

$$f_\beta\left(t^*,\boldsymbol{q}^*,\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}^*}{\mathrm{d}t^*}\right)=0 \tag{21.4.12}$$

将式(21.4.10)代入方程(21.4.11),忽略 ε^2 及更高阶小项,并利用方程(21.4.5),得到

$$\mathrm{E}_s\{\mathrm{X}^{(1)}(L)\}=\mathrm{X}^{(1)}(Q_s)+\mathrm{X}^{(1)}(\Lambda_s) \qquad (s=1,2,\cdots,n) \tag{21.4.13}$$

将式(21.4.10)代入方程(21.4.12),忽略 ε^2 及更高阶小项,并利用方程(21.4.1),得到

$$\mathrm{X}^{(1)}(f_\beta)=0 \qquad (\beta=1,2,\cdots,g) \tag{21.4.14}$$

有如下判据:

判据 1 对于与 Четаев 型非完整系统(21.4.1),(21.4.3)相应的完整系统(21.4.5),如果无限小生成元 ξ_0,ξ_s 满足方程(21.4.13),则相应不变性为系统

的形式不变性。

判据 2 对于 Четаев 型非完整系统(21.4.1),(21.4.3),如果无限小生成元 ξ_0,ξ_s 满足方程(21.4.13)和(21.4.14),则相应不变性为系统的形式不变性。

21.4.3 新型守恒量

对于 Четаев 型非完整系统,由形式不变性可直接导出一类新型守恒量,有如下结果:

命题 1 如果生成元 ξ_0,ξ_s 是 Четаев 型非完整系统形式不变性的生成元,且存在规范函数 $G_F=G_F(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 满足如下结构方程

$$\widetilde{X}^{(1)}(L)\frac{\bar{d}}{dt}\xi_0+\widetilde{X}^{(1)}\{\bar{X}^{(1)}(L)\}+\sum_{s=1}^{n}\widetilde{X}^{(1)}(Q_s+\Lambda_s)(\xi_s-\dot{q}_s\xi_0)+\frac{\bar{d}}{dt}G_F=0 \tag{21.4.15}$$

其中

$$\widetilde{X}^{(1)}=\xi_0\frac{\partial}{\partial t}+\sum_{s=1}^{n}\xi_s\frac{\partial}{\partial q_s}+\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\bar{d}}{dt}\xi_s-\dot{q}_s\frac{\bar{d}}{dt}\xi_0\right)\frac{\partial}{\partial\dot{q}_s} \tag{21.4.16}$$

$$\frac{\bar{d}}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+\sum_{s=1}^{n}\dot{q}_s\frac{\partial}{\partial q_s}+\sum_{s=1}^{n}\alpha_s\frac{\partial}{\partial\dot{q}_s} \tag{14.4.17}$$

则形式不变性导致新型守恒量

$$I_F=\widetilde{X}^{(1)}(L)\xi_0+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial\widetilde{X}^{(1)}(L)}{\partial\dot{q}_s}(\xi_s-\dot{q}_s\xi_0)+G_F=\text{const.} \tag{21.4.18}$$

21.4.4 Noether 守恒量

对于 Четаев 型非完整系统,形式不变性通过 Noether 对称性可间接导出 Noether 守恒量,有如下结果:

命题 2 对于与非完整系统(21.4.1),(21.4.3)相应的完整系统(21.4.5),如果形式不变性的生成元 ξ_0,ξ_s 和规范函数 $G_N=G_N(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 满足如下结构方程

$$L\dot{\xi}_0+X^{(1)}(L)+\sum_{s=1}^{n}(Q_s+\Lambda_s)(\xi_s-\dot{q}_s\xi_0)+\dot{G}_N=0 \tag{21.4.19}$$

则相应完整系统的形式不变性导致相应完整系统的 Noether 守恒量

$$I_N=L\xi_0+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_s}(\xi_s-\dot{q}_s\xi_0)+G_N=\text{const.} \tag{21.4.20}$$

命题 3 对于 Четаев 型非完整系统(21.4.1),(21.4.3),如果形式不变性的生成元 ξ_0,ξ_s 和规范函数 $G_N=G_N(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 满足结构方程(21.4.19),则非完整系统的形式不变性导致相应完整系统的 Noether 守恒量式(21.4.20)。

命题 4 对于 Четаев 型非完整系统(21.4.1),(21.4.3),如果形式不变性的生成元 ξ_0,ξ_s 满足附加限制方程

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial f_\beta}{\partial\dot{q}_s}(\xi_s-\dot{q}_s\xi_0)=0\qquad(\beta=1,2,\cdots,g)\tag{21.4.21}$$

且存在规范函数 $G_N=G_N(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$满足结构方程(21.4.19),则非完整系统的形式不变性导致非完整系统的 Noether 守恒量式(21.4.20)。

21.4.5 Hojman 型守恒量

对于 Четаев 型非完整系统,由形式不变性通过 Lie 对称性可间接导出 Hojman型守恒量,有如下结果:

命题 5 对于 Четаев 型非完整系统(21.4.1),(21.4.3),在特殊无限小变换

$$t^*=t,q_s^*(t^*)=q_s(t)+\varepsilon\xi_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\tag{21.4.22}$$

下,如果形式不变性的生成元 ξ_s 满足条件

$$\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_s\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\alpha_s}{\partial q_k}\xi_k+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\alpha_s}{\partial\dot{q}_k}\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_k\qquad(s=1,2,\cdots,n)\tag{21.4.23}$$

并且存在某函数 $\mu=\mu(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$,使得

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial\alpha_s}{\partial\dot{q}_s}+\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\ln\mu=0\tag{21.4.24}$$

则形式不变性导致 Hojman 守恒量

$$I_H=\frac{1}{\mu}\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial}{\partial q_s}(\mu\,\xi_s)+\frac{1}{\mu}\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial}{\partial\dot{q}_s}\left(\mu\,\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_s\right)=\mathrm{const.}\tag{21.4.25}$$

21.4.6 应用举例

例 1 非完整系统为

$$L=\frac{1}{2}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2),f=\dot{q}_1+bt\,\dot{q}_2-bq_2+t=0$$

试研究形式不变性导致的守恒量。

解:方程(21.4.3)给出

$$\ddot{q}_1=\lambda,\ddot{q}_2=\lambda bt$$

方程(21.4.5)给出

$$\ddot{q}_1=-\frac{1}{1+b^2t^2}=\Lambda_1,\ddot{q}_2=-\frac{bt}{1+b^2t^2}=\Lambda_2$$

做计算,有

$$\tilde{X}^{(1)}(L)=\dot{q}_1\left(\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_1-\dot{q}_1\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_0\right)+\dot{q}_2\left(\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_2-\dot{q}_2\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_0\right)$$

$$\tilde{X}^{(1)}(f)=\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_1-\dot{q}_1\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_0+bt\left(\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_2-\dot{q}_2\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_0\right)+b\,\dot{q}_2\xi_0-b\xi_2+\xi_0$$

$$\tilde{X}^{(1)}(Q_1+\Lambda_1)=-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{1+b^2t^2}\right)\xi_0$$

$$\tilde{X}^{(1)}(Q_2+\Lambda_2)=-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{bt}{1+b^2t^2}\right)\xi_0$$

首先,取生成元为

$$\xi_0=0,\xi_1=\dot{q}_2-bt\,\dot{q}_1+bq_1+bt,\xi_2=1$$

则有

$$\frac{\bar{d}}{dt}\xi_1=b$$

$$\tilde{X}^{(1)}(L)=b\,\dot{q}_1$$

$$\tilde{X}^{(1)}(Q_1+\Lambda_1)=\tilde{X}^{(1)}(Q_2+\Lambda_2)=0$$

$$\tilde{X}^{(1)}(f)=0$$

$$\tilde{E}_s\{\tilde{X}^{(1)}(L)\}=0\qquad(s=1,2)$$

$$\tilde{X}^{(1)}\{\tilde{X}^{(1)}(L)\}=b\,\frac{\bar{d}}{dt}\xi_1=b^2$$

代入结构方程(21.4.15),得

$$G_F=-b^2t$$

命题 1 给出新型守恒量

$$I_F=b(\dot{q}_2-bt\,\dot{q}_1+bq_1)=c_1$$

其次,取生成元为

$$\xi_0=0,\xi_1=(\dot{q}_2-bt\,\dot{q}_1+bq_1)^2,\xi_2=0$$

则有

$$\tilde{X}^{(1)}(L)=\tilde{X}^{(1)}(Q_1+\Lambda_1)=\tilde{X}^{(1)}(Q_2+\Lambda_2)=\tilde{X}^{(1)}(f)=0$$

因此,它是形式不变性的。方程(21.4.23)给出

$$\frac{\bar{d}}{dt}\left(\frac{\bar{d}}{dt}\xi_1\right)=0,\frac{\bar{d}}{dt}\left(\frac{\bar{d}}{dt}\xi_2\right)=0$$

它也满足,因此,也是 Lie 对称性的。方程(21.4.24)给出

$$\frac{\bar{d}}{dt}\ln\mu=0$$

它有解

$$\mu=1$$

命题 5 给出 Hojman 型守恒量

$$I_H=\frac{\partial\xi_1}{\partial q_1}=2b(\dot{q}_2-bt\,\dot{q}_1+bq_1)=c_2$$

最后，取生成元为

$$\xi_0=0,\xi_1=1,\xi_2=0$$

它满足方程(21.4.13)和方程(21.4.14)，因此是非完整系统的形式不变性。将其代入结构方程(21.4.19)，得

$$-\frac{1}{1+b^2t^2}+\dot{G}_N=0$$

由此得规范函数

$$G_N=\frac{1}{b}\arctan bt$$

守恒量式(21.4.20)给出

$$I_N=\dot{q}_1+\frac{1}{b}\arctan bt=c_3$$

这是非完整系统形式不变性导致的相应完整系统的 Noether 守恒量，因为生成元不满足限制方程(21.4.21)。

例 2 研究匀质圆盘在重力作用下沿完全粗糙水平面的纯滚动问题的形式不变性导致的守恒量。

解：问题的 Lagrange 函数为

$$L=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+a^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta)+\frac{1}{2}A(\dot{\theta}^2+\dot{\psi}^2\sin^2\theta)+$$
$$\frac{1}{2}C(\dot{\psi}\cos\theta+\dot{\varphi})^2-mga\sin\theta$$

其中 m,a 为圆盘的质量和半径；A,C 为惯性矩；ψ,θ,φ 为 Euler 角；x,y 为盘心的水平坐标。表示无滑动滚动的非完整约束方程为

$$f_1=\dot{x}+a(\dot{\psi}\cos\theta\cos\psi-\dot{\theta}\sin\psi\sin\theta+\dot{\varphi}\cos\psi)=0$$

$$f_2=\dot{y}+a(\dot{\psi}\cos\theta\sin\psi+\dot{\theta}\cos\psi\sin\theta+\dot{\varphi}\sin\psi)=0$$

令

$$q_1=\psi,q_2=\theta,q_3=\varphi,q_4=x,q_5=y$$

方程(21.4.3)给出如下 5 个方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\{A\,\dot{q}_1\sin^2 q_2+C(\dot{q}_1\cos q_2+\dot{q}_3)\cos q_2\}=$$
$$\lambda_1 a\cos q_1\cos q_2+\lambda_2 a\sin q_1\cos q_2=\Lambda_1$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\{A\dot{q}_2+ma^2\dot{q}_2\cos^2 q_2\}+ma^2\dot{q}_2^2\sin q_2\cos q_2-A\dot{q}_1^2\sin q_2\cos q_2+$$

$$C(\dot{q}_1\cos q_2+\dot{q}_3)\dot{q}_1\sin q_2+mga\cos q_2=$$

$$-\lambda_1 a\sin q_1\sin q_2+\lambda_2 a\cos q_1\sin q_2=\Lambda_2$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\{C(\dot{q}_3+\dot{q}_1\cos q_2)\}=\lambda_1 a\cos q_1+\lambda_2 a\sin q_1=\Lambda_3$$

$$m\ddot{q}_4=\lambda_1=\Lambda_4$$

$$m\ddot{q}_5=\lambda_2=\Lambda_5$$

由约束方程和运动方程可求出乘子λ_1,λ_2,记作

$$\lambda_1=\lambda_1(q_1,q_2,\dot{q}_1,\dot{q}_2,\dot{q}_3),\qquad \lambda_2=\lambda_2(q_1,q_2,\dot{q}_1,\dot{q}_2,\dot{q}_3)$$

做计算,有

$$X^{(1)}(L)=m\dot{q}_4(\dot{\xi}_4-\dot{q}_4\dot{\xi}_0)+m\dot{q}_5(\dot{\xi}_5-\dot{q}_5\dot{\xi}_0)+$$
$$ma^2\dot{q}_2(\dot{\xi}_2-\dot{q}_2\dot{\xi}_0)\cos^2 q_2+ma^2\dot{q}_2^2\xi_2\cos q_2\sin q_2+$$
$$A\dot{q}_2(\dot{\xi}_2-\dot{q}_2\dot{\xi}_0)+A\dot{q}_1(\dot{\xi}_1-\dot{q}_1\dot{\xi}_0)\sin^2 q_2+$$
$$A\dot{q}_1^2\xi_2\sin q_2\cos q_2+C(\dot{q}_1\cos q_2+\dot{q}_3)\{(\dot{\xi}_1-\dot{q}_1\dot{\xi}_0)\cos q_2-$$
$$\dot{q}_1\xi_2\sin q_2+\dot{\xi}_3-\dot{q}_3\dot{\xi}_0\}-mga\xi_2\cos q_2,$$

$$X^{(1)}(f_1)=\dot{\xi}_4-\dot{q}_4\dot{\xi}_0+a\{(\dot{\xi}_1-\dot{q}_1\dot{\xi}_0)\cos q_1\cos q_2-\dot{q}_1\xi_2\sin q_2\cos q_1-$$
$$\dot{q}_1\xi_1\cos q_2\sin q_1-(\dot{\xi}_2-\dot{q}_2\dot{\xi}_0)\sin q_1\sin q_2-\dot{q}_2\xi_1\cos q_1\sin q_2+$$
$$\dot{q}_2\xi_2\sin q_1\cos q_2+(\dot{\xi}_3-\dot{q}_3\dot{\xi}_0)\cos q_1-\dot{q}_3\xi_1\sin q_1\},$$

$$X^{(1)}(f_2)=\dot{\xi}_5-\dot{q}_5\dot{\xi}_0+a\{(\dot{\xi}_1-\dot{q}_1\dot{\xi}_0)\cos q_2\sin q_1-\dot{q}_1\xi_2\sin q_2\sin q_1-$$
$$\dot{q}_1\xi_1\cos q_2\sin q_1+(\dot{\xi}_2-\dot{q}_2\dot{\xi}_0)\cos q_1\sin q_2-\dot{q}_2\xi_1\cos q_1\sin q_2+$$
$$\dot{q}_2\xi_2\cos q_1\cos q_2+(\dot{\xi}_3-\dot{q}_3\dot{\xi}_0)\sin q_1-\dot{q}_3\xi_1\cos q_1\},$$

$$X^{(1)}(\Lambda_1)=X^{(1)}(\lambda_1)a\cos q_2\cos q_1-\lambda_1 a\xi_2\sin q_2\cos q_1-\lambda_1 a\xi_1\cos q_2\sin q_1+$$
$$X^{(1)}(\lambda_2)a\cos q_2\sin q_1-\lambda_2 a\xi_2\sin q_2\sin q_1+\lambda_2 a\xi_1\cos q_2\cos q_1,$$

$$X^{(1)}(\Lambda_2)=-X^{(1)}(\lambda_1)a\sin q_2\sin q_1-\lambda_1 a\xi_1\cos q_1\sin q_2-\lambda_1 a\xi_2\sin q_1\cos q_2+$$
$$X^{(1)}(\lambda_2)a\cos q_1\sin q_2-\lambda_2 a\xi_1\sin q_1\sin q_2+\lambda_2 a\xi_2\cos q_1\cos q_2,$$

$$X^{(1)}(\Lambda_3)=X^{(1)}(\lambda_1)a\cos q_1-\lambda_1 a\xi_1\sin q_1+$$
$$X^{(1)}(\lambda_2)a\sin q_1+\lambda_2 a\xi_1\cos q_1,$$

$$X^{(1)}(\Lambda_4)=X^{(1)}(\lambda_1),$$

$X^{(1)}(\lambda_5)=X^{(1)}(\lambda_2)$

于是有

$$\frac{\partial}{\partial t}X^{(1)}(L)=\frac{\partial}{\partial q_l}\{X^{(1)}(L)\}=0 \qquad (l=3,4,5)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}X^{(1)}(\Lambda_s)=\frac{\partial}{\partial q_l}X^{(1)}(\Lambda_s)=0 \qquad (l=3,4,5;s=1,2,\cdots,5)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\{X^{(1)}(f_\beta)\}=\frac{\partial}{\partial q_l}\{X^{(1)}(f_\beta)\}=0 \qquad (l=3,4,5;\beta=1,2)$$

因此，如下生成元都对应非完整系统的形式不变性

$$\xi_0=-1,\xi_s=0 \qquad (s=1,2,\cdots,5)$$

$$\xi_3=1,\xi_0=\xi_r=0 \qquad (r=1,2,4,5)$$

$$\xi_4=1,\xi_0=\xi_l=0 \qquad (l=1,2,3,5)$$

$$\xi_5=1,\xi_0=\xi_k=0 \qquad (k=1,2,3,4)$$

将生成元，$\xi_0=-1,\xi_s=0$，代入结构方程(21.4.19)，得到

$$G_N=0$$

同时，限制方程(21.4.21)也满足。命题 4 给出守恒量

$$I_N=\frac{1}{2}m(\dot q_4^2+\dot q_5^2+a^2\dot q_2^2\cos^2 q_2)+\frac{1}{2}A(\dot q_2^2+\dot q_1^2\sin^2 q_2)+\frac{1}{2}C(\dot q_1\cos q_2+\dot q_3)^2+mga\sin q_2=c_1$$

它是非完整系统形式不变性导致的非完整系统的 Noether 守恒量，代表系统的机械能守恒。

§21.5 Birkhoff 系统

Birkhoff 系统的形式不变性在一定条件下可导致新型守恒量、Noether 守恒量，以及 Hojman 型守恒量。

21.5.1 运动微分方程

Birkhoff 系统的微分方程为

$$\sum_{\nu=1}^{2n}\Omega_{\mu\nu}\dot a^\nu-\frac{\partial B}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu}{\partial t}=0 \qquad (\mu=1,2,\cdots,2n) \qquad (21.5.1)$$

其中

$$\Omega_{\mu\nu}=\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu} \qquad (21.5.2)$$

为 Birkhoff 张量。假设系统非常奇异,即设

$$\det(\Omega_{\mu\nu})\neq 0 \tag{21.5.3}$$

则可由方程(21.5.1)解出所有$\dot{a}^\mu$,有

$$\dot{a}^\mu=\sum_{\nu=1}^{2n}\Omega^{\mu\nu}\left(\frac{\partial B}{\partial a^\nu}+\frac{\partial R_\nu}{\partial t}\right)\qquad(\mu=1,2,\cdots,2n) \tag{21.5.4}$$

其中

$$\sum_{\rho=1}^{2n}\Omega^{\mu\rho}\Omega_{\rho\nu}=\delta_\nu^\mu \tag{21.5.5}$$

21.5.2 形式不变性

取无限小变换

$$t^*=t+\varepsilon\xi_0(t,\boldsymbol{a}),a^{\mu *}(t^*)=a^\mu(t)+\varepsilon\xi_\mu(t,\boldsymbol{a})\qquad(\mu=1,2,\cdots,2n) \tag{21.5.6}$$

在此变换下,函数组 R_μ 和函数 B 分别变为 R_μ^* 和 B^*,有

$$\begin{aligned}R_\mu^*&=R_\mu(t^*,\boldsymbol{a}^*)=R_\mu(t,\boldsymbol{a})+\varepsilon X^{(0)}(R_\mu)+O(\varepsilon^2)\\B^*&=B(t^*,\boldsymbol{a}^*)=B(t,\boldsymbol{a})+\varepsilon X^{(0)}(B)+O(\varepsilon^2)\end{aligned} \tag{21.5.7}$$

其中

$$X^{(0)}=\xi_0\frac{\partial}{\partial t}+\sum_{\mu=1}^{2n}\xi_\mu\frac{\partial}{\partial a^\mu} \tag{21.5.8}$$

定义 如果用无限小变换后的函数 R_μ^* 和 B^* 代替变换前的函数 R_μ 和 B 时,Birkhoff 方程的形式保持不变,则称这种不变性为系统的形式不变性。

根据上述定义,有

$$\sum_{\nu=1}^{2n}\left(\frac{\partial R_\nu^*}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu^*}{\partial a^\nu}\right)\dot{a}^\nu-\frac{\partial B^*}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu^*}{\partial t}=0\qquad(\mu=1,2,\cdots,2n) \tag{21.5.9}$$

将式(21.5.7)代入式(21.5.9),忽略 ε^2 及更高阶小项,并利用方程(21.5.1),得到

$$\sum_{\nu=1}^{2n}\left\{\frac{\partial}{\partial a^\mu}X^{(0)}(R_\nu)-\frac{\partial}{\partial a^\nu}X^{(0)}(R_\mu)\right\}\dot{a}^\nu-\frac{\partial}{\partial a^\mu}X^{(0)}(B)-\frac{\partial}{\partial t}X^{(0)}(R_\mu)=0$$

$$(\mu=1,2,\cdots,2n) \tag{21.5.10}$$

于是有

判据 如果无限小变换的生成元 ξ_0,ξ_μ 满足方程(21.5.10),那么相应不变性为 Birkhoff 系统的形式不变性。

称方程(21.5.10)为 Birkhoff 系统形式不变性的判据方程。

21.5.3 新型守恒量

对 Birkhoff 系统,形式不变性可直接导致一类新型守恒量,有如下结果:

命题 1 如果 Birkhoff 系统形式不变性的生成元 ξ_0,ξ_μ 和规范函数 $G_F=G_F(t,\boldsymbol{a})$ 满足结构方程

$$\sum_{\mu=1}^{2n} X^{(0)}\{X^{(0)}(R_\mu)\}\sum_{\nu=1}^{2n}\Omega^{\mu\nu}\left(\frac{\partial B}{\partial a^\nu}+\frac{\partial R_\nu}{\partial t}\right)-X^{(0)}\{X^{(0)}(B)\}-X^{(0)}(B)\frac{\bar{d}}{dt}\xi_0+\sum_{\mu=1}^{2n}X^{(0)}(R_\mu)\frac{\bar{d}}{dt}\xi_\mu+\frac{\bar{d}}{dt}G_F=0 \tag{21.5.11}$$

其中

$$\frac{\bar{d}}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+\sum_{\mu=1}^{2n}\sum_{\nu=1}^{2n}\Omega^{\mu\nu}\left(\frac{\partial B}{\partial a^\nu}+\frac{\partial R_\nu}{\partial t}\right)\frac{\partial}{\partial a^\mu} \tag{21.5.12}$$

则系统形式不变性导致新型守恒量

$$I_F=\sum_{\mu=1}^{2n}X^{(0)}(R_\mu)\xi_\mu-X^{(0)}(B)\xi_0+G_F=\text{const.} \tag{21.5.13}$$

21.5.4 Noether 守恒量

对 Birkhoff 系统，形式不变性通过 Noether 对称性可间接导出 Noether 守恒量，有如下结果：

命题 2 如果 Birkhoff 系统形式不变性的生成元 ξ_0,ξ_μ 和规范函数 $G_N=G_N(t,\boldsymbol{a})$ 满足如下结构方程

$$X^{(1)}\left(\sum_{\mu=1}^{2n}R_\mu\dot{a}^\mu-B\right)-\left(\sum_{\nu=1}^{2n}R_\nu\dot{a}^\nu-B\right)\dot{\xi}_0+\dot{G}_N=0 \tag{21.5.14}$$

其中

$$X^{(1)}=X^{(0)}+\sum_{\mu=1}^{2n}(\dot{\xi}_\mu-\dot{a}^\mu\dot{\xi}_0)\frac{\partial}{\partial\dot{a}^\mu} \tag{21.5.15}$$

则形式不变性导致 Noether 守恒量

$$I_N=\sum_{\mu=1}^{2n}R_\mu\xi_\mu-B\xi_0+G_N=\text{const.} \tag{21.5.16}$$

21.5.5 Hojman 型守恒量

对 Birkhoff 系统，形式不变性通过 Lie 对称性可间接导致 Hojman 型守恒量。

取时间不变的特殊无限小变换

$$t^*=t,\ a^{\mu*}(t^*)=a^\mu(t)+\varepsilon\xi_\mu(t,\boldsymbol{a}) \tag{21.5.17}$$

Lie 对称性的确定方程表示为

$$\frac{\bar{d}}{dt}\xi_\mu=\sum_{\rho=1}^{2n}\frac{\partial}{\partial a^\rho}\left\{\sum_{\nu=1}^{2n}\Omega^{\mu\nu}\left(\frac{\partial B}{\partial a^\nu}+\frac{\partial R_\nu}{\partial t}\right)\right\}\xi_\rho\qquad(\mu=1,2,\cdots,2n) \tag{21.5.18}$$

有如下结果：

命题 3 如果 Birkhoff 系统形式不变性的生成元 ξ_μ 满足确定方程(21.5.18)，且存在某函数 $\mu=\mu(t,\boldsymbol{a})$，使得

$$\sum_{\mu=1}^{2n}\frac{\partial}{\partial a^\mu}\left\{\sum_{\nu=1}^{2n}\Omega^{\mu\nu}\left(\frac{\partial B}{\partial a^\nu}+\frac{\partial R_\nu}{\partial t}\right)\right\}+\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\ln\mu=0 \tag{21.5.19}$$

则形式不变性导致 Hojman 型守恒量

$$I_H=\frac{1}{\mu}\sum_{\nu=1}^{2n}\frac{\partial}{\partial a^\nu}(\mu\,\xi_\nu)=\text{const.} \tag{21.5.20}$$

21.5.6 应用举例

例 1 Hojman-Urrutia 例的微分方程为

$$\ddot{x}+\dot{y}=0,\ddot{y}+y=0$$

令

$$a^1=x,a^2=y,a^3=\dot{x},a^4=\dot{y}$$

则 Birkhoff 化为[4]

$$R_1=a^2+a^3,R_2=0,R_3=a^4,R_4=0,B=\frac{1}{2}[(a^3)^2+2a^2a^3-(a^4)^2]$$

试研究形式不变性导致的守恒量。

解：做计算，有

$$X^{(0)}(B)=a^3\xi_2+(a^2+a^3)\xi_3-a^4\xi_4$$

$$X^{(0)}(R_1)=\xi_2+\xi_3$$

$$X^{(0)}(R_3)=\xi_4$$

$$X^{(0)}(R_2)=X^{(0)}(R_4)=0$$

首先，取生成元为

$$\xi_0=0,\xi_1=a^2+a^3+t,\xi_2=1+\frac{a^3}{a^2},\xi_3=-\frac{a^3}{a^2},\xi_4=0$$

则有

$$\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_1=1,X^{(0)}(B)=0,X^{(0)}(R_1)=1,X^{(0)}(R_\mu)=0\qquad(\mu=2,3,4)$$

生成元是形式不变性的。代入结构方程 (21.5.11)，得

$$1+\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}G_F=0$$

由此得

$$G_F=-t$$

而守恒量式(21.5.13)给出

$$I_F=a^2+a^3+t-t=a^2+a^3=c_1$$

其次,形生成元

$$\xi_0=0,\xi_1=a^2\cos t-a^4\sin t+t,\xi_2=1+\frac{a^3}{a^2},\xi_3=-\frac{a^3}{a^2},\xi_4=0$$

可得到守恒量

$$I_F=a^2\cos t-a^4\sin t=c_2$$

第三,取生成元

$$\xi_0=0,\xi_1=a^2\sin t+a^4\cos t+t,\xi_2=1+\frac{a^3}{a^2},\xi_3=-\frac{a^3}{a^2},\xi_4=0$$

可得到守恒量

$$I_F=a^2\sin t+a^4\cos t=c_3$$

最后,取生成元

$$\xi_0=0,\xi_1=a^1-a^4-(a^2+a^3)t+t,\xi_2=1+\frac{a^3}{a^2},\xi_3=-\frac{a^3}{a^2},\xi_4=0$$

可得到守恒量

$$I_F=a^1-a^4-(a^2+a^3)t=c_4$$

以上四个守恒量都是由系统形式不变性导致的新型守恒量。

例 2 已知二阶 Birkhoff 系统为

$$R_1=a^2,R_2=0,B=\frac{1}{2}\frac{1}{m+f(t)}\{k_2(a^2)^2-k_1(a^1)^2\}$$

其中 m,k_1,k_2 为常数。试研究系统形式不变性导致的守恒量。

解:做计算,有

$$X^{(0)}(R_1)=\xi_2,X^{(0)}(R_2)=0$$

$$X^{(0)}(B)=-\frac{1}{2}\frac{f'\xi_0}{[m+f(t)]^2}\{k_2(a^2)^2-k_1(a^1)^2\}+$$

$$\frac{1}{m+f(t)}\{k_2a^2\xi_2-k_1a^1\xi_1\}$$

取生成元为

$$\xi_0=0,\xi_1=k_2a^2,\xi_2=k_1a^1$$

则有

$$X^{(0)}(R_1)=k_1a^1,X^{(0)}(R_2)=X^{(0)}(B)=0$$

因此,生成元是形式不变性的。结构方程(21.5.14)给出

$$k_1a^1\dot{a}^1+k_2a^2\dot{a}^2+\dot{G}_N=0$$

由此得

$$G_N=-\frac{1}{2}\{k_1(a^1)^2+k_2(a^2)^2\}$$

守恒量式(21.5.16)给出

$$I_N=\frac{1}{2}\{k_2(a^2)^2-k_1(a^1)^2\}=\text{const.}$$

§21.6 广义 Hamilton 系统

广义 Hamilton 系统的形式不变性在一定条件下可导致新型守恒量,以及 Hojman 型守恒量。

21.6.1 运动微分方程

广义 Hamilton 系统的运动微分方程有形式[5]

$$\dot{x}_i=\sum_{j=1}^{m}J_{ij}\frac{\partial H}{\partial x_j}\qquad(i=1,2,\cdots,m)\tag{21.6.1}$$

其中 $J_{ij}=J_{ij}(\boldsymbol{x})$ 满足条件

$$J_{ij}=-J_{ji}$$
$$\sum_{l=1}^{m}\left\{J_{il}\frac{\partial J_{jk}}{\partial x_l}+J_{jl}\frac{\partial J_{ki}}{\partial x_l}+J_{kl}\frac{\partial J_{ij}}{\partial x_l}\right\}=0\qquad(i,j,k=1,2,\cdots,m)\tag{21.6.2}$$

21.6.2 形式不变性

取无限小变换

$$t^*=t+\varepsilon\xi_0(t,\boldsymbol{x}),x_i^*(t^*)=x_i(t)+\varepsilon\xi_i(t,\boldsymbol{x})\qquad(i=1,2,\cdots,m)\tag{21.6.3}$$

在经历无限小变换后,Hamilton 函数 H 变为 H^*,有

$$H^*=H(t^*,\boldsymbol{x}^*)=H(t,\boldsymbol{x})+\varepsilon X^{(0)}(H)+O(\varepsilon^2)\tag{21.6.4}$$

定义 如果用无限小变换后的函数 H^* 代替变换前的函数 H 时,广义 Hamilton方程(21.6.1)的形式保持不变,则称这种不变性为系统的形式不变性。

根据上述定义,有

$$\dot{x}_i=\sum_{j=1}^{m}J_{ij}\frac{\partial H^*}{\partial x_j}\tag{21.6.5}$$

将式(21.6.4)代入式(21.6.5),忽略 ε^2 及更高阶小项,并利用方程(21.6.1),得

到如下判据方程

$$0 = \sum_{j=1}^{m} J_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j}\{X^{(0)}(H)\} \qquad (i = 1,2,\cdots,m) \tag{21.6.6}$$

于是有

判据 如果无限小生成元 ξ_0,ξ_i 满足方程(21.6.6),则相应不变性为广义 Hamilton 系统的形式不变性。

21.6.3 **新型守恒量**

对广义 Hamilton 系统,由形式不变性可直接导出一类新型守恒量,有如下结果:

命题 1 如果广义 Hamilton 系统的形式不变性的生成元 ξ_0,ξ_i 和规范函数 $G_F=G_F(t,\boldsymbol{x})$满足如下结构方程

$$\sum_{i=1}^{m} X^{(0)}(x_i)\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_i + \sum_{i=1}^{m}\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\{X^{(0)}(x_i)\}\xi_0 - X^{(0)}(H)\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_0 - \frac{\partial X^{(0)}(H)}{\partial t}\xi_0 + \frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}G_F = 0 \tag{21.6.7}$$

其中

$$\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} J_{kj}\frac{\partial H}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_k} \tag{21.6.8}$$

则形式不变性导致守恒量

$$I_F = \sum_{i=1}^{m} X^{(0)}(x_i)\xi_i - X^{(0)}(H)\xi_0 + G_F = \text{const.} \tag{21.6.9}$$

21.6.4 **Hojman 型守恒量**

广义 Hamilton 系统的形式不变性通过 Lie 对称性可间接导出 Hojman 型守恒量。

在时间不变的特殊无限小变换

$$t^* = t, x_i^*(t^*) = x_i(t) + \varepsilon\xi_i(t,\boldsymbol{x}) \tag{21.6.10}$$

下,方程(21.6.1)Lie 对称性的确定方程有如下形式

$$\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_i = \sum_{j=1}^{m}\frac{\partial \alpha_i}{\partial x_j}\xi_j \tag{21.6.11}$$

其中

$$\alpha_i = \sum_{j=1}^{m} J_{ij}\frac{\partial H}{\partial x_j} \tag{21.6.12}$$

$$\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{j=1}^{m}\alpha_j\frac{\partial}{\partial x_j} \tag{21.6.13}$$

有如下结果:

命题 2 对广义 Hamilton 系统,如果形式不变性的生成元 ξ_i 满足方程(21.6.11),且存在某函数 $\mu=\mu(t,\boldsymbol{x})$,使得

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial\alpha_i}{\partial x_i}+\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\ln\mu=0 \tag{21.6.14}$$

则形式不变性导致 Hojman 型守恒量

$$I_H=\frac{1}{\mu}\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x_i}(\mu\,\xi_i)=\text{const.} \tag{21.6.15}$$

21.6.5 应用举例

例 1 三维广义 Hamilton 系统为

$$H=\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)$$

$$(J_{ij})=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2x_2\\ -1 & 0 & 2x_1\\ -2x_2 & -2x_1 & 0\end{pmatrix}$$

试研究形式不变性导致的守恒量。

解:系统的微分方程为

$$\dot{x}_1=x_2,\dot{x}_2=-x_1,\dot{x}_3=-4x_1x_2$$

做计算,有

$$\mathrm{X}^{(0)}(H)=x_1\xi_1+x_2\xi_2$$

$$\mathrm{X}^{(0)}(x_i)=\xi_i\qquad(i=1,2,3)$$

取生成元为

$$\xi_0=\xi_1=\xi_2=0,\xi_3=x_1^2-x_2^2+x_3 \tag{a}$$

代入结构方程(21.6.7),得到

$$G_F=0$$

守恒量式(21.6.9)给出

$$I_F=\xi_3^2=(x_1^2-x_2^2+x_3)^2=c_1$$

Lie 对称性的确定方程(21.6.11)给出

$$\begin{aligned}&\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_1=\xi_2\\&\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_2=-\xi_1\\&\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_3=-4x_2\xi_1-4x_1\xi_2\end{aligned} \tag{b}$$

式(21.6.14)给出

$$\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\ln\mu=0 \tag{c}$$

方程(b),(c)有解

$$\xi_1=\xi_2=0,\xi_3=(x_1^2-x_2^2+x_3)^2,\mu=1 \tag{d}$$

将其代入式(21.6.15),得到 Hojman 型守恒量

$$I_H=\frac{\partial\xi_3}{\partial x_3}=2(x_1^2-x_2^2+x_3)=c_2$$

例 2 三维广义 Hamilton 系统为

$$H=x_1+\frac{1}{2}x_3^2$$

$$(J_{ij})=\begin{pmatrix}0 & 0 & -x_2\\ 0 & 0 & x_1\\ x_2 & -x_1 & 0\end{pmatrix}$$

试研究形式不变性导致的守恒量。

解:系统的运动微分方程为

$$\dot{x}_1=-x_2x_3,\dot{x}_2=x_3x_1,\dot{x}_3=x_2$$

做计算,有

$$\mathrm{X}^{(0)}(H)=\xi_1+x_3\xi_3$$

取生成元为

$$\xi_0=\xi_1=\xi_3=0,\xi_2=x_1+\frac{1}{2}x_3^2$$

则有

$$\mathrm{X}^{(0)}(H)=0$$

$$\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_2=\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}x_1+x_3\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}x_3=0$$

代入结构方程(21.6.7),得

$$G_F=0$$

而守恒量式(21.6.9)给出

$$I_F=\left(x_1+\frac{1}{2}x_3^2\right)^2=c_1$$

约束力学系统的形式不变性的概念是王树勇博士在攻博期间(2000—2003)与本书作者讨论多次逐步形成的,并写进他的博士学位论文《约束力学系统的形式不变性与守恒量研究》(2003 年)。形式不变性是指,力学系统运动方程中动力学函数在经历无限小变换后仍满足原来方程的一种不变性,从力学角

度更容易理解。形式不变性在一定条件下可导致守恒量。这些条件要比 Noether 等式复杂得多。

第 19 章研究的 Noether 对称性也可导致 Hojman 型守恒量和新型守恒量。第 20 章研究的 Lie 对称性也可导致新型守恒量。这样,每一对称性都可导致三类守恒量[2]。三类对称性联合起来,构成统一对称性[6]。有关形式不变性研究可参看文献[7~17]。

思考题

21.1 判据约束力学系统的形式不变性比判断 Noether 对称性和 Lie 对称性更为困难。对否?

21.2 形式不变性不一定总能导致守恒量。对否?

21.3 形式不变性不一定是 Noether 对称性,也不一定是 Lie 对称性。这种提法对否?

21.4 形式不变性也可导致 Noether 守恒量。对否?

21.5 能否研究约束力学系统的 Lie—形式不变性及守恒量?

21.6 在 Arnold《经典力学的数学方法》§ 20 Noether 定理中给出的对称性,实际上是指 Lagrange 函数在变换下的不变性,表示为

$$L(h_{*}\nu)=L(\nu)$$

这是一类形式不变性。这样理解是否正确?

21.7 Noether 对称性比形式不变性好用。对否?

习题

21.1 二自由度系统的 Lagrange 函数为

$$L=t^2\left\{\frac{1}{2}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2)-\frac{1}{6}(q_1^6+q_2^6)\right\}$$

试研究系统形式不变性导致的守恒量。

21.2 三自由度系统的 Lagrange 函数为

$$L=\frac{1}{2}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2+\dot{q}_3^2)+q_2$$

试研究形式不变性导致的守恒量。

21.3 二自由度 Hamilton 系统为

$$H=\frac{1}{2}(p_1^2+p_2^2)+q_2$$

试研究系统形式不变性导致的守恒量。

21.4 试证§21.3中的命题1。

21.5 二自由度系统为

$$L=\frac{1}{2}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2)-\frac{1}{2}tq_2^2$$

$$Q_1=-\dot{q}_1-\dot{q}_2, Q_2=Q_2(t,q_2)$$

试研究系统形式不变性导致的守恒量。

21.6 非完整系统为

$$L=\frac{1}{2}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2), f=\dot{q}_2-t\dot{q}_1=0$$

试研究系统形式不变性导致的守恒量。

21.7 已知二阶 Birkhoff 系统为

$$R_1=a^2, R_2=0$$

$$B=\frac{1}{2m}(a^2)^2+\frac{1}{m}a^2f_1(t)+\frac{1}{2m}f_1^2(t)+f_0(t)$$

试研究系统形式不变性导致的守恒量。

21.8 4阶 Birkhoff 系统为

$$R_1=a^3, R_2=a^4, R_3=R_4=0$$

$$B=\frac{1}{2}\left\{a^3-\frac{1}{b}\arctan bt\right\}^2+\frac{1}{2}\left\{a^4-\frac{1}{2b}\ln(1+b^2t^2)\right\}^2$$

试研究系统形式不变性导致的守恒量。

21.9 三维广义 Hamilton 系统为

$$H=\int f(x_1)\mathrm{d}x_1+\int g(x_2)\mathrm{d}x_2-p(t)x_2+q(t)x_1$$

$$(J_{ij})=\begin{pmatrix}0 & -1 & -1\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

其中 f,g,p,q 为其变量的连续函数。试研究形式不变性导致的守恒量。

参考文献

[1]Mei F X. Form invariance of Lagrange system[J]. J of Beijing Institute of Technology,2000,9(2):120-124.

[2]梅凤翔. 约束力学系统的对称性与守恒量[M]. 北京:北京理工大学出版社,2004.

[3]王树禾. 微分方程模型与混沌[M]. 合肥:中国科学技术大学出版社,1999.

[4]Santilli RM. Foundations of Theoretical Mechanics Ⅱ[M]. New York: Springer-Verlag,1983.

[5]李继彬,赵晓华,刘正荣.广义哈密顿系统理论及其应用[M].北京:科学出版社,1994.
[6]Mei FX,Xu XJ, Zhang YF. A unified symmetry of Lagrangian systems[J]. Acta Mech Sin., 2004,20(6):668-671.
[7]王树勇,葛伟宽,梅凤翔.完整力学系统运动方程的形式不变性[J].北京理工大学学报,2002,22(1):20-27.
[8]Wang SY,MeiFX. Form invariance and Lie symmetry of equations of non-holonomic system[J]. Chin Phys.,2002,11(1):5-8.
[9]葛伟宽.质量变化对力学系统形式不变性和守恒量的影响[J].物理学报,2005,54(6):2478-2481.
[10]罗绍凯,郭永新,梅凤翔.非完整系统的形式不变性与 Hojman 守恒量[J].物理学报,2004,53(8):2413-2418.
[11]张毅.单面完整约束力学系统的形式不变性[J].物理学报,2004,53(2):331-336.
[12]贾利群,郑世旺.带有附加项的广义 Hamilton 系统的 Mei 对称性[J].物理学报,2006,55(8):3829-3832.
[13]许学军,梅凤翔,秦茂昌.事件空间中完整系统的 Hojman 守恒量[J].物理学报,2006,55(8):3829-3832.
[14]郑世旺,贾利群.非完整系统 Tzenoff 方程的 Mei 对称性和守恒量[J].物理学报,2007,56(2):661-665.
[15]乔永芬,张耀良,韩广才.非完整系统 Hamilton 正则方程的形式不变性[J].物理学报,2003,52(5):1051-1056.
[16]楼智美.相空间中二阶线性非完整系统的形式不变性[J].物理学报,2004,53(7):2046-2049.
[17]方建会,陈培胜,张军.变质量非完整系统的形式不变性与 Lie 对称性[J].应用数学和力学,2005,26(2):187-192.

22

Lagrange 对称性方法与 Birkhoff 对称性方法

本章研究两种对称性以及由这两种对称性导致的守恒量。1966 年，Currie 和 Saletan 研究了单自由度力学系统的等价 Lagrange 函数问题，并指出在此情形存在守恒量[1]。1981 年，Hojman 和 Harleston 将此结果推广到多自由度系统[2]。著作[3]将这种对称性称为 Lagrange 对称性。本章 § 22.1～§ 22.6 讨论各类约束力学系统的 Lagrange 对称性与相应的守恒量。§ 22.7 研究 Birkhoff系统的一类对称性，称为 Birkhoff 对称性，这种对称性涉及等价 Birkhoff 函数和 Birkhoff 函数组问题。

§ 22.1 Lagrange 系统

本节讨论 Lagrange 系统的 Lagrange 对称性以及由此对称性导致的守恒量，包括系统的运动微分方程、Lagrange 对称性的定义和判据，以及由Lagrange 对称性导致的守恒量等。

22.1.1 运动微分方程

Lagrange 系统的运动微分方程有形式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial L}{\partial q_s}=0 \qquad (s=1,2,\cdots,n) \tag{22.1.1}$$

展开方程(22.1.1)，得到

$$\sum_{s=1}^{n} W_{rs}\ddot{q}_s+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_r\partial q_s}\dot{q}_s+\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_r\partial t}-\frac{\partial L}{\partial q_r}=0 \quad (r=1,2,\cdots,n) \tag{22.1.2}$$

其中

$$W_{rs}=\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_r\partial \dot{q}_s} \tag{22.1.3}$$

并设

$$\det(W_{rs})\neq 0 \tag{22.1.4}$$

22.1.2 Lagrange 对称性的定义和判据

令

$$\mathscr{L}_r=\sum_{s=1}^{n}W_{rs}\ddot{q}_s+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial^2 L}{\partial\dot{q}_r\partial q_s}\dot{q}_s+\frac{\partial^2 L}{\partial\dot{q}_r\partial t}-\frac{\partial L}{\partial q_r} \tag{22.1.5}$$

取另外的 Lagrange 函数$\overline{L}$,并令

$$\overline{\mathscr{L}}_r=\sum_{s=1}^{n}\overline{W}_{rs}\ddot{q}_s+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial^2 \overline{L}}{\partial\dot{q}_r\partial q_s}\dot{q}_s+\frac{\partial^2 \overline{L}}{\partial\dot{q}_r\partial t}-\frac{\partial \overline{L}}{\partial q_r} \tag{22.1.6}$$

其中

$$\overline{W}_{rs}=\frac{\partial^2 \overline{L}}{\partial\dot{q}_r\partial\dot{q}_s} \tag{22.1.7}$$

并设

$$\det(\overline{W}_{rs})\neq 0 \tag{22.1.8}$$

定义 对方程(22.1.1),如果由 $\mathscr{L}_r=0(r=1,2,\cdots,n)$可得到$\overline{\mathscr{L}}_s=0(s=1,2,\cdots,n)$,反之亦然,则这种对称性称为 **Lagrange 对称性**。

由$\overline{\mathscr{L}}_r=0$,解出所有广义加速度$\ddot{q}_s$,有

$$\ddot{q}_s=\sum_{k=1}^{n}\overline{U}^{sk}\left(\frac{\partial\overline{L}}{\partial q_k}-\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial^2\overline{L}}{\partial\dot{q}_k\partial q_l}\dot{q}_l-\frac{\partial^2\overline{L}}{\partial\dot{q}_k\partial t}\right) \tag{22.1.9}$$

其中

$$\sum_{s=1}^{n}\overline{W}_{rs}\overline{U}^{sk}=\delta_r^k \tag{22.1.10}$$

将式(22.1.9)代入 $\mathscr{L}_r=0$,得到

$$\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}W_{rs}\overline{U}^{sk}\left(\frac{\partial\overline{L}}{\partial q_k}-\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial^2\overline{L}}{\partial\dot{q}_k\partial q_l}\dot{q}_l-\frac{\partial^2\overline{L}}{\partial\dot{q}_k\partial t}\right)$$
$$=\frac{\partial L}{\partial q_r}-\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial^2 L}{\partial\dot{q}_r\partial q_s}\dot{q}_s-\frac{\partial^2 L}{\partial\dot{q}_r\partial t}(r=1,2,\cdots,n) \tag{22.1.11}$$

于是有

判据 如果两个 Lagrange 函数 L 和$\overline{L}$满足方程(22.1.11),那么对称性就是 Lagrange 对称性。

22.1.3 Lagrange 对称性导致的守恒量

下面利用 Lagrange 对称性来导出相应的守恒量。

将式(22.1.11)代入式(22.1.5),得到

$$\mathscr{L}_r=\sum_{s=1}^{n}W_{rs}\ddot{q}_s-\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}W_{rs}\overline{U}^{sk}\left(\frac{\partial\overline{L}}{\partial q_k}-\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial^2\overline{L}}{\partial\dot{q}_k\partial q_l}\dot{q}_l-\frac{\partial^2\overline{L}}{\partial\dot{q}_k\partial t}\right)$$

$$
=\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}W_{rs}\overline{U}^{sk}\Big(\sum_{l=1}^{n}W_{kl}\ddot{q}_l+\sum_{m=1}^{n}\frac{\partial^2\overline{L}}{\partial\dot{q}_k\partial q_m}\dot{q}_m+\frac{\partial^2\overline{L}}{\partial\dot{q}_k\partial t}-\frac{\partial\overline{L}}{\partial q_k}\Big)
$$

$$
=\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}W_{rs}\overline{U}^{sk}\overline{\mathscr{L}}_k \tag{22.1.12}
$$

令

$$
\sum_{s=1}^{n}\overline{W}_{rs}U^{sk}=A_r^k \tag{22.1.13}
$$

其中

$$
\sum_{s=1}^{n}W_{rs}U^{sk}=\delta_r^k \tag{22.1.14}
$$

式(22.1.12)可写成形式

$$
\overline{\mathscr{L}}_k=\sum_{r=1}^{n}A_k^r\mathscr{L}_r \tag{22.1.15}
$$

由式(22.1.13),有

$$
\overline{W}_{rs}=\sum_{k=1}^{n}A_r^kW_{ks} \tag{22.1.16}
$$

将式(22.1.16)对$\dot{q}_l$ 求偏导数,得到

$$
\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial A_r^k}{\partial\dot{q}_l}W_{ks}=\frac{\partial^3\overline{L}}{\partial\dot{q}_r\partial\dot{q}_s\partial\dot{q}_l}-\sum_{k=1}^{n}A_r^k\frac{\partial^3L}{\partial\dot{q}_k\partial\dot{q}_s\partial\dot{q}_l}
$$

$$
=\frac{\partial\overline{W}_{rl}}{\partial\dot{q}_s}-\sum_{k=1}^{n}A_r^k\frac{\partial W_{lk}}{\partial\dot{q}_s}
$$

$$
=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial A_r^k}{\partial\dot{q}_s}W_{kl} \tag{22.1.17}
$$

将式(22.1.16)对q_l求偏导数,再乘以$\dot{q}_l$ 并对 l 求和,得到

$$
\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}A_r^k\frac{\partial W_{ks}}{\partial q_l}\dot{q}_l-\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial\overline{W}_{rs}}{\partial q_l}\dot{q}_l=-\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial A_r^k}{\partial q_l}W_{ks}\dot{q}_l \tag{22.1.18}
$$

式(22.1.11)可表示为形式

$$
\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2\overline{L}}{\partial\dot{q}_s\partial q_k}\dot{q}_k+\frac{\partial^2\overline{L}}{\partial\dot{q}_s\partial t}-\frac{\partial\overline{L}}{\partial q_s}=\sum_{r=1}^{n}A_s^r\Big(\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2L}{\partial\dot{q}_r\partial q_k}\dot{q}_k-\frac{\partial^2L}{\partial\dot{q}_r\partial t}-\frac{\partial L}{\partial q_r}\Big) \tag{22.1.19}
$$

将式(22.1.19)对 $\dot{q}_l$ 求偏导数,得

$$
\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^3\overline{L}}{\partial\dot{q}_s\partial q_k\partial\dot{q}_l}\dot{q}_k+\frac{\partial^2\overline{L}}{\partial\dot{q}_s\partial q_l}+\frac{\partial^3\overline{L}}{\partial\dot{q}_s\partial t\partial\dot{q}_l}-\frac{\partial^2\overline{L}}{\partial q_s\partial\dot{q}_l}=
$$

$$
\sum_{r=1}^{n}\frac{\partial A_s^r}{\partial\dot{q}_l}\Big(\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2L}{\partial\dot{q}_r\partial q_k}\dot{q}_k+\frac{\partial^2L}{\partial\dot{q}_r\partial t}-\frac{\partial L}{\partial q_r}\Big)+
$$

$$\sum_{r=1}^{n} A_s^r \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^3 L}{\partial \dot{q}_r \partial q_k \partial \dot{q}_l} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_r \partial q_l} + \frac{\partial^3 L}{\partial \dot{q}_r \partial t \partial \dot{q}_l} - \frac{\partial^2 L}{\partial q_r \partial \dot{q}_l} \right) \tag{22.1.20}$$

由 $L_r=0$ 以及式(22.1.5),有

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_s \partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_s \partial t} - \frac{\partial L}{\partial q_s} = -\sum_{r=1}^{n} W_{sr} \ddot{q}_r \tag{22.1.21}$$

将式(22.1.17),(22.1.18)和(22.2.21)代入式(22.1.20),得到

$$\frac{\partial^2 \overline{L}}{\partial \dot{q}_s \partial q_k} - \frac{\partial^2 \overline{L}}{\partial q_s \partial \dot{q}_k} + \frac{\partial \overline{W}_{ks}}{\partial t} =$$
$$-\sum_{r=1}^{n} \frac{\mathrm{d}A_s^r}{\mathrm{d}t} W_{rk} + \sum_{r=1}^{n} \frac{\partial A_s^r}{\partial t} W_{rk} + \sum_{r=1}^{n} A_s^r \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_r \partial q_k} - \frac{\partial^2 L}{\partial q_r \partial \dot{q}_k} + \frac{\partial W_{kr}}{\partial t} \right) \tag{22.1.22}$$

考虑到

$$\sum_{r=1}^{n} \frac{\partial A_s^r}{\partial t} W_{rk} = \frac{\partial \overline{W}_{sk}}{\partial t} - \sum_{r=1}^{n} A_s^r \frac{\partial W_{rk}}{\partial t} \tag{22.1.23}$$

则式(22.1.22)可表示为

$$\frac{\partial^2 \overline{L}}{\partial \dot{q}_s \partial q_k} - \frac{\partial^2 \overline{L}}{\partial q_s \partial \dot{q}_k} = -\sum_{r=1}^{n} \frac{\mathrm{d}A_s^r}{\mathrm{d}t} W_{rk} + \sum_{r=1}^{n} A_s^r \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_r \partial q_k} - \frac{\partial^2 L}{\partial q_r \partial \dot{q}_k} \right) \tag{22.1.24}$$

引进矩阵 $\boldsymbol{T}$ 和 $\overline{\boldsymbol{T}}$,其元素表示为

$$T_{rk} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_r \partial q_k} - \frac{\partial^2 L}{\partial q_r \partial \dot{q}_k}$$
$$\overline{T}_{rk} = \frac{\partial^2 \overline{L}}{\partial \dot{q}_r \partial q_k} - \frac{\partial^2 \overline{L}}{\partial q_r \partial \dot{q}_k} \tag{22.1.25}$$

则式(22.1.24)可写成矩阵形式

$$\dot{\boldsymbol{A}} = -\overline{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{U} + \boldsymbol{A}\boldsymbol{T}\boldsymbol{U} \tag{22.1.26}$$

其中 $\boldsymbol{A}=(A_s^r)$,$\boldsymbol{U}=(U^{sk})$为 $n\times n$ 矩阵。考虑到 $\boldsymbol{T}$ 和 $\overline{\boldsymbol{T}}$ 是反对称的,$\boldsymbol{U}$ 和 $\overline{\boldsymbol{W}}$ 是对称的,而 $\boldsymbol{A}=\overline{\boldsymbol{W}}\boldsymbol{U}$,利用矩阵迹的性质,对任何正整数 m,有

$$\dot{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{A}^{m-1} = (-\overline{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{U} + \overline{\boldsymbol{W}}\boldsymbol{U}\boldsymbol{T}\boldsymbol{U})\boldsymbol{A}^{m-1}$$
$$= -\overline{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{U}(\overline{\boldsymbol{W}}\boldsymbol{U})^{m-1} + \overline{\boldsymbol{W}}\boldsymbol{U}\boldsymbol{T}\boldsymbol{U}(\overline{\boldsymbol{W}}\boldsymbol{U})^{m-1}$$
$$\mathrm{tr}[\overline{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{U}(\overline{\boldsymbol{W}}\boldsymbol{U})^{m-1}] = 0$$
$$\mathrm{tr}[\overline{\boldsymbol{W}}\boldsymbol{U}\boldsymbol{T}\boldsymbol{U}(\overline{\boldsymbol{W}}\boldsymbol{U})^{m-1}] = 0$$

以及

$$\mathrm{tr}(\dot{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{A}^{m-1}) = 0$$

因此有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^m)] = \mathrm{tr}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{A}^m)\right] = m\,\mathrm{tr}(\dot{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{A}^{m-1}) = 0$$

由此得守恒量

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^m)=\mathrm{const.} \tag{22.1.27}$$

于是有如下结果

命题[2] 对 Lagrange 系统，Lagrange 对称性导致守恒量式(22.1.27)。

22.1.4 应用举例

例 1 单自由度系统的 Lagrange 函数为

$$L=\frac{1}{2}(\dot{q}^2-q^2)$$

试研究 Lagrange 对称性与守恒量。

解:取

$$\overline{L}=\frac{1}{6}\dot{q}^3\cos t+\frac{1}{2}q\dot{q}^2\sin t-q^2\dot{q}\cos t$$

$$\overline{L}'=2\frac{\dot{q}}{q}\arctan\left(\frac{\dot{q}}{q}\right)-\ln(\dot{q}^2+q^2)$$

可以验证$\overline{L}$与 L，$\overline{L}'$与 L 具有 Lagrange 对称性。由 $L,\overline{L},\overline{L}'$得

$$W_{11}=\frac{\partial^2 L}{\partial\dot{q}^2}=1,\overline{W}_{11}=\frac{\partial^2\overline{L}}{\partial\dot{q}^2}=\dot{q}\cos t+q\sin t,\overline{W}'_{11}=\frac{\partial^2\overline{L}^1}{\partial\dot{q}^2}=\frac{2}{\dot{q}^2+q^2}$$

又由

$$W_{11}U^{11}=1$$

得

$$U^{11}=1$$

式(22.1.13)给出

$$A_1^1=\overline{W}_{11}U^{11}=\dot{q}\cos t+q\sin t$$

$$(A_1^1)=\overline{W}'_{11}U^{11}=\frac{2}{\dot{q}^2+q^2}$$

守恒量式(22.1.27)分别给出

$$(\dot{q}\cos t+q\sin t)^m=\mathrm{const.}$$

$$\left(\frac{2}{\dot{q}^2+q^2}\right)^m=\mathrm{const.} \qquad (m=1,2,\cdots)$$

例 2 二自由度系统的 Lagrange 函数为

$$L=\frac{1}{2}\left[\dot{q}_1+\frac{1}{b}\arctan bt\right]^2+\frac{1}{2}\left[\dot{q}_2+\frac{1}{2b}\ln(1+b^2t^2)\right]^2$$

其中 b 为常数，试研究 Lagrange 对称性与守恒量。

解:取另一 Lagrange 函数

$$\overline{L}=\frac{1}{6}\left[\dot{q}_1+\frac{1}{b}\arctan bt\right]^3+\frac{1}{2}\left[\dot{q}_2+\frac{1}{2b}\ln(1+b^2t^2)\right]^2$$

于是有

$$W_{11}=\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_1^2}=1, W_{12}=\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_1 \partial \dot{q}_2}=0=W_{21}, W_{22}=\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_2^2}=1$$

$$(W_{sk})=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, (U^{sk})=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\overline{W}_{11}=\frac{\partial^2 \overline{L}}{\partial \dot{q}_1^2}=\dot{q}_1+\frac{1}{b}\arctan bt$$

$$\overline{W}_{12}=\overline{W}_{21}=0, \overline{W}_{22}=\frac{\partial^2 \overline{L}}{\partial \dot{q}_2^2}=1$$

可以验证，$\overline{L}$与L具有 Lagrange 对称性。式(22.1.13)给出

$$A_1^1=\sum_{k=1}^{2}\overline{W}_{1k}U^{k1}=\overline{W}_{11}U^{11}=\dot{q}_1+\frac{1}{b}\arctan bt$$

$$A_1^2=A_2^1=0, \qquad A_2^2=1$$

守恒量式(22.1.27)给出

$$\mathrm{tr}(A^m)=(A_1^1)^m+(A_2^2)^m=\left(q_1+\frac{1}{b}\arctan bt\right)^m+1=\text{const.}$$

再取另一 Lagrange 函数

$$\overline{L}'=\frac{1}{2}\left[\dot{q}_1+\frac{1}{b}\arctan bt\right]^2+\frac{1}{6}\left[\dot{q}_2+\frac{1}{2b}\ln(1+b^2t^2)\right]^3$$

它与L有 Lagrange 对称性，得到守恒量

$$\mathrm{tr}(A^m)=\left[\dot{q}_2+\frac{1}{2b}\ln(1+b^2t^2)\right]^m+1=\text{const.}$$

将两个积分表为

$$\dot{q}_1+\frac{1}{b}\arctan bt=C_1$$

$$\dot{q}_2+\frac{1}{2b}\ln(1+b^2t^2)=D_1$$

积分得到问题的解

$$q_1=-\frac{t}{b}\arctan bt+\frac{1}{2b^2}\ln(1+b^2t^2)+C_1t+C_2$$

$$q_2=\frac{t}{b}-\frac{1}{b^2}\arctan bt-\frac{t}{2b}\ln(1+b^2t^2)+D_1t+D_2$$

其中C_1, C_2, D_1, D_2为积分常数。

§22.2 一般完整系统

本节讨论一般完整系统的 Lagrange 对称性以及由此对称性导致的守恒量,包括系统的运动微分方程、Lagrange 对称性的定义和判据,以及导致的守恒量等。

22.2.1 运动微分方程

一般完整力学系统的运动微分方程有形式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial L}{\partial q_s}=Q_s \qquad (s=1,2,\cdots,n) \tag{22.2.1}$$

展开方程(22.2.1),得到

$$\sum_{s=1}^{n}W_{rs}\ddot{q}_s+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_r\partial q_s}\dot{q}_s+\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_r\partial t}-\frac{\partial L}{\partial q_r}-Q_r=0 \quad (r=1,2,\cdots,n) \tag{22.2.2}$$

其中

$$W_{rs}=\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_r\partial \dot{q}_s} \tag{22.2.3}$$

并设

$$\det(W_{rs})\neq 0 \tag{22.2.4}$$

22.2.2 Lagrange 对称性的定义和判据

令

$$\mathscr{L}_r=\sum_{s=1}^{n}W_{rs}\ddot{q}_s+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_r\partial q_s}\dot{q}_s+\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_r\partial t}-\frac{\partial L}{\partial q_r}-Q_r \tag{22.2.5}$$

$$\overline{\mathscr{L}}_r=\sum_{s=1}^{n}\overline{W}_{rs}\ddot{q}_s+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial^2 \overline{L}}{\partial \dot{q}_r\partial q_s}\dot{q}_s+\frac{\partial^2 \overline{L}}{\partial \dot{q}_r\partial t}-\frac{\partial \overline{L}}{\partial q_r}-\overline{Q}_r \qquad (r=1,2,\cdots,n)$$

其中,$\overline{L}$,$\overline{Q}_r$ 为满足方程(22.2.1)的另一组动力学函数。

定义 对方程(22.2.1),如果由 $\mathscr{L}_r=0(r=1,2,\cdots,n)$ 可得到 $\overline{\mathscr{L}}_s=0(s=1,2,\cdots,n)$,反之亦然,则这种对称性称为 Lagrange 对称性。

类似于导出式(22.1.11)的步骤,可得到

$$\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}W_{rs}\overline{U}^{sk}\left(\overline{Q}_k+\frac{\partial \overline{L}}{\partial q_k}-\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial^2 \overline{L}}{\partial \dot{q}_k\partial q_l}\dot{q}_l-\frac{\partial^2 \overline{L}}{\partial \dot{q}_k\partial t}\right)=$$
$$Q_r+\frac{\partial L}{\partial q_r}-\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_r\partial q_s}\dot{q}_s-\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_r\partial t} \qquad (r=1,2,\cdots,n) \tag{22.2.6}$$

于是有如下判据:

判据 如果两组动力学函数 L,Q_s 和 $\overline{L}$,$\overline{Q}_s$ 满足方程(22.2.6),则对称性是

Lagrange 对称性。

22.2.3 Lagrange 对称性导致的守恒量

类似于导出式(22.1.24)的步骤，对一般完整系统，可得到

$$\frac{\partial^2 \overline{L}}{\partial \dot{q}_s \partial q_k}-\frac{\partial^2 \overline{L}}{\partial q_s \partial \dot{q}_k}-\frac{\partial \overline{Q}_s}{\partial \dot{q}_k}=-\sum_{r=1}^{n}\frac{\mathrm{d}A_s^r}{\mathrm{d}t}W_{rk}+\sum_{r=1}^{n}A_s^r\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_r \partial q_k}-\frac{\partial^2 L}{\partial q_r \partial \dot{q}_k}-\frac{\partial Q_r}{\partial \dot{q}_k}\right) \tag{22.2.7}$$

引进两矩阵 $\boldsymbol{T}$ 和 $\overline{\boldsymbol{T}}$，其元素分别为

$$T_{rk}=\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_r \partial q_k}-\frac{\partial^2 L}{\partial q_r \partial \dot{q}_k}$$
$$\overline{T}_{rk}=\frac{\partial^2 \overline{L}}{\partial \dot{q}_r \partial q_k}-\frac{\partial^2 \overline{L}}{\partial q_r \partial \dot{q}_k} \tag{22.2.8}$$

现假设非势广义力满足条件

$$\frac{\partial \overline{Q}_s}{\partial \dot{q}_k}=\sum_{r=1}^{n}A_s^r\frac{\partial Q_r}{\partial \dot{q}_k}\qquad (s,k=1,2,\cdots,n) \tag{22.2.9}$$

则式(22.2.7)可表示为矩阵形式

$$\dot{\boldsymbol{A}}=-\overline{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{U}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}\boldsymbol{U} \tag{22.2.10}$$

于是有如下结论：

命题[3] 对一般完整系统(22.2.1)，如果条件(22.2.9)满足，则 Lagrange 对称性导致守恒量

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^m)=\mathrm{const.} \tag{22.2.11}$$

对 Lagrange 系统，条件(22.2.9)自动成立，于是有

推论 对 Lagrange 系统，Lagrange 对称性将导致守恒量式(22.2.11)。

22.2.4 **应用举例**

例 1 单自由度系统为

$$L=\frac{1}{2}\dot{q}^2,Q=\dot{q}$$

试研究 Lagrange 对称性与守恒量。

解 取另一组动力学函数为

$$\overline{L}=\frac{1}{6}\dot{q}^3-\frac{1}{2}q\dot{q}^2,\overline{Q}=\dot{q}\left(\frac{1}{2}\dot{q}-q\right)$$

则有

$$\overline{\mathscr{L}}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \overline{L}}{\partial \dot{q}}-\frac{\partial \overline{L}}{\partial q}-\overline{Q}$$
$$=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\dot{q}^2-q\dot{q}\right)+\frac{1}{2}\dot{q}^2-\dot{q}\left(\frac{1}{2}\dot{q}-q\right)$$

$$=(\dot{q}-q)(\ddot{q}-\dot{q})$$
$$=(\dot{q}-q)\mathscr{L}$$

因此，$\overline{L}$，$\overline{Q}$与L，Q具有Lagrange对称性，并且有

$$A_1^1=\dot{q}-q$$
$$\frac{\partial\overline{Q}}{\partial\dot{q}}=(\dot{q}-q)\frac{\partial Q}{\partial\dot{q}}$$

守恒量式(22.2.11)给出

$$(\dot{q}-q)^m=\text{const.}\qquad(m=1,2,\cdots)$$

例2 单自由度系统为

$$L=\frac{1}{2}\dot{q}^2,Q=\dot{q}^2$$

试研究Lagrange对称性与守恒量。

解：取另一组动力学函数为

$$\overline{L}=\frac{1}{6}\dot{q}^3\exp(-q),\overline{Q}=\frac{2}{3}\dot{q}^3\exp(-q)$$

则有

$$W_{11}=1,U^{11}=1$$
$$\overline{W}_{11}=\dot{q}\exp(-q),A_1^1=\overline{W}_{11}U^{11}=\dot{q}\exp(-q)$$

可以验证，$\overline{L}$，$\overline{Q}$与L，Q具有Lagrange对称性。又

$$\frac{\partial\overline{Q}}{\partial\dot{q}}=2\dot{q}^2\exp(-q),\frac{\partial Q}{\partial\dot{q}}=2\dot{q}$$

因此，式(22.2.9)成立。守恒量式(22.2.11)给出

$$\{\dot{q}\exp(-q)\}^m=\text{const.}\qquad(m=1,2,\cdots)$$

§22.3 有多余坐标完整系统

本书讨论有多余坐标完整系统的Lagrange对称性与守恒量，包括系统运动微分方程、系统Lagrange对称性的定义和判据，以及对称性导致的守恒量等。

22.3.1 运动微分方程

假设力学系统的位形由n个广义坐标$q_s(s=1,2,\cdots,n)$来确定。为方便计算和某些需要，选m个多余坐标$q_{n+\gamma}(\gamma=1,2,\cdots,m)$，并受有$m$个双面理想完整约束

$$f_\beta(t,q_s,q_{n+\gamma})=0 \qquad (\beta=1,2,\cdots,m) \tag{22.3.1}$$

系统的运动微分方程表示为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_u}-\frac{\partial L}{\partial q_u}=Q_u+\sum_{\beta=1}^{m}\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial q_u} \qquad (u=1,2,\cdots,n+m) \tag{22.3.2}$$

假设系统非奇异,即设

$$\det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_u\partial \dot{q}_v}\right)\neq 0 \tag{22.3.3}$$

则在运动微分方程积分之前,可由式(22.3.1)和(22.3.2)解出所有 λ_β 作为 $t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}$ 的函数,于是得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_u}-\frac{\partial L}{\partial q_u}=Q_u+\Lambda_u \qquad (u=1,2,\cdots,n+m) \tag{22.3.4}$$

其中

$$\Lambda_u=\Lambda_u(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})=\sum_{\beta=1}^{m}\lambda_\beta(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\frac{\partial f_\beta}{\partial q_u} \tag{22.3.5}$$

代表广义约束力。

22.3.2 Lagrange 对称性的定义和判据

研究满足方程(22.3.4)的两组动力学函数 L,Q_u,Λ_u 和 $\overline{L},\overline{Q}_u,\overline{\Lambda}_u$。令

$$\mathscr{L}_u=\sum_{v=1}^{n+m}W_{uv}\ddot{q}_v+\sum_{v=1}^{n+m}\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_u\partial q_v}\dot{q}_v+\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_u\partial t}-\frac{\partial L}{\partial q_u}-Q_u-\Lambda_u$$

$$\overline{\mathscr{L}}_u=\sum_{v=1}^{n+m}\overline{W}_{uv}\ddot{q}_v+\sum_{v=1}^{n+m}\frac{\partial^2 \overline{L}}{\partial \dot{q}_u\partial q_v}\dot{q}_v+\frac{\partial^2 \overline{L}}{\partial \dot{q}_u\partial t}-\frac{\partial \overline{L}}{\partial q_u}-\overline{Q}_u-\overline{\Lambda}_u \tag{22.3.6}$$

其中

$$W_{uv}=\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_u\partial \dot{q}_u},\overline{W}_{uv}=\frac{\partial^2 \overline{L}}{\partial \dot{q}_u\partial \dot{q}_v} \tag{22.3.7}$$

并设

$$\det(W_{uv})\neq 0,\det(\overline{W}_{uv})\neq 0 \tag{22.3.8}$$

定义 对方程(22.3.4),如果由 $\mathscr{L}_u=0\,(u=1,2,\cdots,n+m)$ 可得到 $\overline{\mathscr{L}}_v=0$ $(v=1,2,\cdots,n+m)$,反之亦然,则这种对称性称为系统的 Lagrange 对称性。

类似于导出判据式(22.1.11)的步骤,对有多余坐标完整系统,可得到

$$\sum_{v=1}^{n+m}\sum_{w=1}^{n+m}W_{uv}\overline{U}^{vw}\left(\overline{Q}_w+\overline{\Lambda}_w+\frac{\partial \overline{L}}{\partial q_w}-\sum_{t=1}^{n+m}\frac{\partial^2 \overline{L}}{\partial \dot{q}_w\partial q_t}\dot{q}_t-\frac{\partial^2 \overline{L}}{\partial \dot{q}_w\partial t}\right)$$

$$=Q_u+\Lambda_u+\frac{\partial L}{\partial q_u}-\sum_{v=1}^{n+m}\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_u\partial q_v}\dot{q}_v-\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_u\partial t} \tag{22.3.9}$$

于是有

判据 如果两组动力学函数 L,Q_u,Λ_u 和 $\overline{L},\overline{Q}_u,\overline{\Lambda}_u$ 满足式(22.3.9),则相应对称性是系统的 Lagrange 对称性。

22.3.3 Lagrange 对称性导致的守恒量

类似于 § 22.2 中的讨论，对有多余坐标完整系统，有如下结果：

命题 对有多余坐标完整系统(22.3.4)，如果满足如下条件

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_v}(\overline{Q}_u+\overline{\Lambda}_u)=\sum_{w=1}^{n+m}A_u^w\frac{\partial}{\partial \dot{q}_v}(Q_w+\Lambda_w)\qquad (u,v=1,2,\cdots,n+m)\tag{22.3.10}$$

其中 A_u^v 满足

$$\overline{\mathscr{L}}_u=\sum_{v=1}^{n+m}A_u^v\mathscr{L}_v\qquad (u=1,2,\cdots,n+m)\tag{22.3.11}$$

则 Lagrange 对称性导致守恒量

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^m)=\mathrm{const.}\tag{22.3.12}$$

推论 如果没有多余坐标，则上述命题成为 § 22.2 中的命题。

22.3.4 应用举例

例 研究陀螺在水平面上运动的 Lagrange 对称性与守恒量。

解：陀螺的动能为[4,5]

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{q}_4^2+\dot{q}_5^2+\dot{q}_6^2)+\frac{1}{2}A(\dot{q}_2^2+\dot{q}_1^2\sin^2 q_2)+\frac{1}{2}C(\dot{q}_3+\dot{q}_1\cos q_2)^2$$

势能为

$$V=mgq_6$$

约束方程为

$$f=q_6-l\cos q_2=0$$

其中 m 为陀螺质量；A 和 C 为惯性矩；l 为质心与支点间距离；q_4,q_5,q_6 为质心坐标；q_1,q_2,q_3 为 Euler 角；g 为重力加速度。方程(22.3.2)给出

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\{A\dot{q}_1\sin^2 q_2+C(\dot{q}_3+\dot{q}_1\cos q_2)\cos q_2\}=0$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(A\dot{q}_2)-A\dot{q}_1^2\sin q_2\cos q_2+C(\dot{q}_3+\dot{q}_1\cos q_2)\dot{q}_1\sin q_2=\lambda l\sin q_2$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\{C(\dot{q}_3+\dot{q}_1\cos q_2)\}=0$$

$$m\ddot{q}_4=0,m\ddot{q}_5=0,m\ddot{q}_6+mg=\lambda$$

于是有

$$Q_u=0\qquad (u=1,2,\cdots,6)$$

$$\Lambda_1=0,\Lambda_2=\lambda l\sin q_2,\Lambda_3=\Lambda_4=\Lambda_5=0,\Lambda_6=\lambda$$

取另一组动力学函数为

$$\overline{L}=\frac{1}{6}m\dot{q}_4^3+\frac{1}{2}m(\dot{q}_5^2+\dot{q}_6^2)+\frac{1}{2}A(\dot{q}_2^2+\dot{q}_1^2\sin^2 q_2)+$$

$$\frac{1}{2}C(\dot{q}_3+\dot{q}_1\cos q_2)^2-mgq_6$$

$$\overline{Q}_u=0,\overline{\Lambda}_u=\Lambda_u\qquad(u=1,2,\cdots,6)$$

则有

$$\overline{\mathscr{L}}_1=\mathscr{L}_1,\overline{\mathscr{L}}_2=\mathscr{L}_2,\overline{\mathscr{L}}_3=\mathscr{L}_3,\overline{\mathscr{L}}_4=\dot{q}_4\mathscr{L}_4$$

$$\overline{\mathscr{L}}_5=\mathscr{L}_5,\overline{\mathscr{L}}_6=\mathscr{L}_6$$

而

$$A_v^v=1(v=1,2,3,5,6),A_4^4=\dot{q}_4,A_u^v=0(v\neq u)$$

守恒量式(22.3.12)给出

$$\dot{q}_4^m+5=\text{const.}\qquad(m=1,2,\cdots)$$

§22.4 相对运动动力学系统

本节讨论相对运动动力学系统的 Lagrange 对称性与守恒量，给出系统 Lagrange对称性的定义和判据，守恒量的形式，并举例说明结果的应用。

22.4.1 运动微分方程

对双面理想完整约束系统，相对运动动力学方程有形式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L_r}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial L_r}{\partial q_s}=Q_s+Q_s^{\dot{\omega}}+\Gamma_s\qquad(s=1,2,\cdots,n)\tag{22.4.1}$$

其中

$$L_r=T_r-V-V^0-V^\omega\tag{22.4.2}$$

为 Lagrange 函数；T_r 为相对运动动能；V 为势能，V^0 为均匀力场势能；V^ω 为离心力势能；Q_s 为非势广义力；Γ_s 为广义陀螺力；$Q_s^{\dot{\omega}}$ 为广义回转惯性力[6,7]。

22.4.2 Lagrange 对称性的定义和判据

研究两组动力学函数 $L_r,Q_s,Q_s^{\dot{\omega}},\Gamma_s$ 和$\overline{L}_r,\overline{Q}_s,\overline{Q}_s^{\dot{\omega}},\overline{\Gamma}_s$，并令

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_s&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L_r}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial L_r}{\partial q_s}-Q_s-Q_s^{\dot{\omega}}-\Gamma_s\\&=\sum_{k=1}^n W_{sk}\ddot{q}_k+\sum_{k=1}^n\frac{\partial^2 L_r}{\partial\dot{q}_s\partial q_k}\dot{q}_k+\frac{\partial^2 L_r}{\partial\dot{q}_s\partial t}-\frac{\partial L_r}{\partial q_s}-Q_s-Q_s^{\dot{\omega}}-\Gamma_s\end{aligned}\tag{22.4.3}$$

$$\overline{\mathscr{L}}_s = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \overline{L}_r}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial \overline{L}_r}{\partial q_s} - \overline{Q}_s - \overline{Q}_s^{\dot{\omega}} - \overline{\Gamma}_s$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \overline{W}_{sk}\ddot{q}_k + \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 \overline{L}_r}{\partial \dot{q}_s \partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial^2 \overline{L}_r}{\partial \dot{q}_s \partial t} - \frac{\partial \overline{L}_r}{\partial q_s} - \overline{Q}_s - \overline{Q}_s^{\dot{\omega}} - \overline{\Gamma}_s \tag{22.4.4}$$

定义 对系统(22.4.1)，如果由 $\mathscr{L}_s=0(s=1,2,\cdots,n)$ 可得到 $\overline{\mathscr{L}}_k=0(k=1,2,\cdots,n)$，反之亦然，则这种对称性称为 Lagrange 对称性。

类似于导出式(22.2.6)的步骤，可得到

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} W_{sk}\overline{U}^{kl}\left(\overline{Q}_l + \overline{Q}_l^{\dot{\omega}} + \Gamma_l + \frac{\partial \overline{L}_r}{\partial q_l} - \sum_{m=1}^{n}\frac{\partial^2 \overline{L}_r}{\partial \dot{q}_l \partial q_m}\dot{q}_m - \frac{\partial^2 \overline{L}_r}{\partial \dot{q}_l \partial t}\right) =$$

$$Q_s + Q_s^{\dot{\omega}} + \Gamma_s + \frac{\partial L_r}{\partial q_s} - \sum_{l=1}^{n}\frac{\partial^2 L_r}{\partial \dot{q}_s \partial q_l}\dot{q}_l - \frac{\partial^2 L_r}{\partial \dot{q}_s \partial t} \quad (s=1,2,\cdots,n) \tag{22.4.5}$$

于是有

判据 如果两组动力学函数 $L_r, Q_s, Q_s^{\dot{\omega}}, \Gamma_s$ 和 $\overline{L}_r, \overline{Q}_s, \overline{Q}_s^{\dot{\omega}}, \overline{\Gamma}_s$ 满足式(22.4.5)，则相应对称性是相对运动动力学系统的 Lagrange 对称性。

22.4.3 Lagrange 对称性导致的守恒量

类似于§22.2 中的讨论，对相对运动动力学系统，有如下结果：

命题 对相对运动动力学系统(22.4.1)，如果满足条件

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}(\overline{Q}_s + \overline{Q}_s^{\dot{\omega}} + \overline{\Gamma}_s) = \sum_{l=1}^{n} A_s^l \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}(Q_l + Q_l^{\dot{\omega}} + \Gamma_l) \quad (s,k=1,2,\cdots,n) \tag{22.4.6}$$

则 Lagrange 对称性导致守恒量

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^m) = \mathrm{const.} \tag{22.4.7}$$

注意到，这里仍有

$$\boldsymbol{A} = (A_s^k)$$

$$\sum_{k=1}^{n} \overline{W}_{sk} U^{kl} = A_s^l \tag{22.4.8}$$

$$\overline{\mathscr{L}}_s = \sum_{l=1}^{n} A_s^l \mathscr{L}_l$$

22.4.4 应用举例

例 三自由度相对运动动力学系统为

$$L_r = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) - \frac{1}{2}\omega^2(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)$$

$$Q_s = Q_s^{\dot\omega} = 0 \qquad (s=1,2,3)$$

$$\Gamma_1 = -\dot q_2,\ \Gamma_2 = \dot q_1,\ \Gamma_3 = 0$$

试研究 Lagrange 对称性与守恒量。

解:取另一组动力学函数为

$$\overline{L}_r = \frac{1}{2}(\dot q_1^2 + \dot q_2^2) + \frac{1}{6}\dot q_3^3 - \frac{1}{2}\omega^2(q_1^2 + q_2^2)$$

$$\overline{Q}_s = Q_s,\ \overline{Q}_s^{\dot\omega} = Q_s^{\dot\omega},\ \overline{\Gamma}_s = \Gamma_s \qquad (s=1,2,3)$$

可以证明,式(22.4.5)满足。由两组动力学函数,知

$$(\overline{W}_{sk}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dot q_3 \end{pmatrix},\ (U^{kl}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(A_s^l) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dot q_3 \end{pmatrix}$$

由此可验证式(22.4.6)成立。守恒量式(22.4.7)给出

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^m) = 1^m + 1^m + \dot q_3^m = 2 + \dot q_3^m = \text{const.}$$

§22.5 变质量完整系统

本节讨论变质量完整力学系统的 Lagrange 对称性与守恒量,给出系统 Lagrange对称性的定义和判据,得到 Lagrange 对称性导致的守恒量,并举例说明结果的应用。

22.5.1 运动微分方程

设系统由 N 个质点组成。在瞬时 t,第 i 个质点的质量为 m_i;在瞬时 $t+\mathrm{d}t$,微粒并入或抛出质点的质量为 $\mathrm{d}m_i$。设系统的位形由 n 个广义坐标 $q_s(s=1,2,\cdots,n)$来确定,并设质量变化为

$$m_i = m_i(t) \qquad (i=1,2,\cdots,N) \tag{22.5.1}$$

系统的微分方程表示为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot q_s} - \frac{\partial L}{\partial q_s} = Q_s + P_s \qquad (s=1,2,\cdots,n) \tag{22.5.2}$$

其中 L 为 Lagrange 函数;Q_s 为非势广义力;P_s 为广义反推力。有

$$P_s = \sum_{i=1}^{N} (\boldsymbol{R}_i + \dot{m}_i \dot{\boldsymbol{r}}_i) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_s} \tag{22.5.3}$$

$$\boldsymbol{R}_i = \dot{m}_i \boldsymbol{u}_i$$

其中 $\boldsymbol{r}_i$ 为第 i 个质点的矢径；$\boldsymbol{u}_i$ 为微粒相对质点的速度。

22.5.2 Lagrange 对称性的定义和判据

研究具有同样解的两组动力学函数 L, Q_s, P_s 和 $\overline{L}, \overline{Q}_s, \overline{P}_s$，令

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_r &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} - \frac{\partial L}{\partial q_r} - Q_r - P_r \\ &= \sum_{s=1}^{n} W_{rs}\ddot{q}_s + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_r \partial q_s}\dot{q}_s + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_r \partial t} + \\ &\quad \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_r \partial m_i}\dot{m}_i - \frac{\partial L}{\partial q_r} - Q_r - P_r\end{aligned} \tag{22.5.4}$$

$$\begin{aligned}\overline{\mathscr{L}}_r &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \overline{L}}{\partial \dot{q}_r} - \frac{\partial \overline{L}}{\partial q_r} - \overline{Q}_r - \overline{P}_r \\ &= \sum_{s=1}^{n} \overline{W}_{rs}\ddot{q}_s + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial_2 \overline{L}}{\partial \dot{q}_r \partial q_s}\dot{q}_s + \frac{\partial^2 \overline{L}}{\partial \dot{q}_r \partial t} + \\ &\quad \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 \overline{L}}{\partial \dot{q}_r \partial m_i}\dot{m}_i - \frac{\partial \overline{L}}{\partial q_r} - \overline{Q}_r - \overline{P}_r\end{aligned} \tag{22.5.5}$$

定义 对变质量系统(22.5.2)，如果由 $\mathscr{L}_r=0(r=1,2,\cdots,n)$ 可得到 $\overline{\mathscr{L}}_s=0$ $(s=1,2,\cdots,n)$，反之亦然，则称这种对称性为系统的 Lagrange 对称性。

类似于导出式(22.2.6)的步骤，可得到

$$\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} W_{rs}\,\overline{U}^{sk}\left(\overline{Q}_k + \overline{P}_k + \frac{\partial \overline{L}}{\partial q_k} - \sum_{l=1}^{n}\frac{\partial^2 \overline{L}}{\partial \dot{q}_k \partial q_l}\dot{q}_l - \frac{\partial^2 \overline{L}}{\partial \dot{q}_k \partial t} - \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 \overline{L}}{\partial \dot{q}_r \partial m_i}\dot{m}_i\right) = \\ Q_r + P_r + \frac{\partial L}{\partial q_r} - \sum_{l=1}^{n}\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_r \partial q_l}\dot{q}_l - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_r \partial t} - \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_r \partial m_i}\dot{m}_i \qquad (r=1,2,\cdots,n) \tag{22.5.6}$$

于是有

判据 如果两组动力学函数 L, Q_s, P_s 和 $\overline{L}, \overline{Q}_s, \overline{P}_s$ 满足方程(22.5.6)，那么对称性是变质量完整系统的 Lagrange 对称性。

22.5.3 Lagrange 对称性导致的守恒量

对变质量完整力学系统，在一定条件下，Lagrange 对称性可导致守恒量。类似于 §22.2 中的讨论，有如下结果：

命题 对变质量完整系统(22.5.2)，如果满足如下条件

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}(\overline{Q}_s + \overline{P}_s) = \sum_{r=1}^{n} A_s^r \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}(Q_r + P_r) \qquad (s,k=1,2,\cdots,n) \tag{22.5.7}$$

则系统的 Lagrange 对称性导致守恒量[9]

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^m)=\mathrm{const.}\qquad (m=1,2,\cdots)\tag{22.5.8}$$

这里有

$$\boldsymbol{A}=(A_s^r)$$

$$\sum_{k=1}^{n}\overline{W}_{sk}U^{kl}=A_s^l\tag{22.5.9}$$

$$\overline{\mathscr{L}}_s=\sum_{l=1}^{n}A_s^l\mathscr{L}_l$$

22.5.4 应用举例

例 变质量系统为

$$L=\frac{1}{2}m(t)(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2)-q_1$$

$$Q_1=0,Q_2=-m\dot{q}_2,P_1=\dot{m}\dot{q}_1,P_2=\dot{m}\dot{q}_2$$

试研究系统 Lagrange 对称性与守恒量。

解:式(22.5.4)给出

$$\mathscr{L}_1=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\dot{q}_1)+1-\dot{m}\dot{q}_1=m\ddot{q}_1+1$$

$$\mathscr{L}_2=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\dot{q}_2)+m\dot{q}_2-\dot{m}\dot{q}_2=m\ddot{q}_2+m\dot{q}_2$$

选另一组动力学函数$\overline{L},\overline{Q}_s,\overline{P}_s$ 为

$$\overline{L}=\frac{1}{6}m\left(\dot{q}_1+\int\frac{\mathrm{d}t}{m}\right)^3+\frac{1}{2}m\dot{q}_2^2$$

$$\overline{Q}_1+\overline{P}_1=\frac{1}{2}\dot{m}\left(\dot{q}_1+\int\frac{\mathrm{d}t}{m}\right)^2,\overline{Q}_2=Q_2,\overline{P}_2=P_2$$

于是有

$$\overline{\mathscr{L}}_1=\left(\dot{q}_1+\int\frac{\mathrm{d}t}{m}\right)\mathscr{L}_1,\overline{\mathscr{L}}_2=\mathscr{L}_2$$

此时式(22.5.6)和式(22.5.7)成立。守恒量式(22.5.8)

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^m)=\left(\dot{q}_1+\int\frac{\mathrm{d}t}{m}\right)+1=\mathrm{const.}$$

再选另一组动力学函数

$$\overline{L}=\frac{1}{2}m\dot{q}_1^2+\frac{1}{6}m(\dot{q}_2+q_2)^3$$

$$\overline{Q}_1+\overline{P}_1=\dot{m}\dot{q}_1,\overline{Q}_2+\overline{P}_2=-\frac{1}{2}m(\dot{q}_2+q_2)^2+\frac{1}{2}\dot{m}(\dot{q}_2+q_2)^2$$

可求得

$$A_1^1=1, A_1^2=A_2^1=0, A_2^2=\dot{q}_2+q_2$$

而守恒量式(22.5.8)给出

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^m)=1+(\dot{q}_2+q_2)^m=\mathrm{const.}$$

§22.6 非完整系统

本节讨论非完整系统的 Lagrange 对称性与守恒量，给出系统 Lagrange 对称性的定义和判据、守恒量的形式，并举例说明结果的应用。

22.6.1 运动微分方程

设系统的位形由 n 个广义坐标 $q_s(s=1,2,\cdots,n)$ 来确定，它的运动受有 g 个双面理想 Четаев 型非完整约束

$$f_\beta(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})=0 \qquad (\beta=1,2,\cdots,g) \tag{22.6.1}$$

系统的微分方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial L}{\partial q_s}=Q_s+\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s} \qquad (s=1,2,\cdots,n) \tag{22.6.2}$$

假设

$$\det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial\dot{q}_s\partial\dot{q}_k}\right)\neq 0 \tag{22.6.3}$$

在运动微分方程积分之前，可由方程(22.6.1)，(22.6.2)求出约束乘子 λ_β 为 t，$\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}$的函数

$$\lambda_\beta=\lambda_\beta(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) \tag{22.6.4}$$

将其代入式(22.6.2)，得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_s}-\frac{\partial L}{\partial q_s}=Q_s+\Lambda_s \qquad (s=1,2\cdots,n) \tag{22.6.5}$$

其中

$$\Lambda_s=\Lambda_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})=\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\frac{\partial f_\beta}{\partial\dot{q}_s} \tag{22.6.6}$$

方程(22.2.5)称为与非完整系统(22.6.1)，(22.6.2)相应的完整系统的方程。非完整系统的运动可在相应完整系统(22.6.5)的解中找到，只要施加非完整约束(22.6.1)对初始条件的限制[10]。因此，可首先研究相应完整系统，然后再施加限制而得到非完整系统的解。

22.6.2 Lagrange 对称性的定义和判据

研究满足方程(22.6.5)的两组动力学函数 L,Q_s,Λ_s 和 $\overline{L},\overline{Q}_s,\overline{\Lambda}_s$，令

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_r &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} - \frac{\partial L}{\partial q_r} - Q_r - \Lambda_r \\ &= \sum_{s=1}^{n} W_{rs}\ddot{q}_s + \sum_{s=1}^{n}\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_r \partial q_s}\dot{q}_s + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_r \partial t} - \frac{\partial L}{\partial q_r} - Q_r - \Lambda_r\end{aligned} \tag{22.6.7}$$

$$\begin{aligned}\overline{\mathscr{L}}_r &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \overline{L}}{\partial \dot{q}_r} - \frac{\partial \overline{L}}{\partial q_r} - \overline{Q}_r - \overline{\Lambda}_r \\ &= \sum_{s=1}^{n} \overline{W}_{rs}\ddot{q}_s + \sum_{s=1}^{n}\frac{\partial^2 \overline{L}}{\partial \dot{q}_r \partial q_s}\dot{q}_s + \frac{\partial^2 \overline{L}}{\partial \dot{q}_r \partial t} - \frac{\partial^2 \overline{L}}{\partial q_r} - \overline{Q}_r - \overline{\Lambda}_r\end{aligned} \tag{22.6.8}$$

其中

$$W_{rs} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_r \partial \dot{q}_s}, \overline{W}_{rs} = \frac{\partial^2 \overline{L}}{\partial \dot{q}_r \partial \dot{q}_s} \tag{22.6.9}$$

定义 对系统(22.6.5),如果由 $\mathscr{L}_r=0(r=1,2,\cdots,n)$ 可得到 $\overline{\mathscr{L}}_s=0(s=1,2,\cdots,n)$,反之亦然,则这种对称性称为系统的 Lagrange 对称性。

类似于 § 22.2 中的讨论,可得到

$$\begin{aligned}&\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} W_{rs}\overline{U}^{sk}\left(\overline{Q}_k + \overline{\Lambda}_k + \frac{\partial \overline{L}}{\partial q_k} - \sum_{l=1}^{n}\frac{\partial^2 \overline{L}}{\partial \dot{q}_k \partial q_l}\dot{q}_l - \frac{\partial^2 \overline{L}}{\partial \dot{q}_k \partial t}\right) = \\ &Q_r + \Lambda_r + \frac{\partial L}{\partial q_r} - \sum_{s=1}^{n}\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_r \partial q_s}\dot{q}_s - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_r \partial t} \qquad (r=1,2,\cdots,n)\end{aligned} \tag{22.6.10}$$

于是有

判据 如果两组动力学函数 L, Q_s, Λ_s 和 $\overline{L}, \overline{Q}_s, \overline{\Lambda}_s$ 满足方程(22.6.10),则对称性是 Lagrange 对称性。

22.6.3 Lagrange 对称性导致的守恒量

类似于 § 22.2 中的讨论,有如下结果:

命题 对系统(22.6.5),如果满足下述条件

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}(\overline{Q}_s + \overline{\Lambda}_s) = \sum_{r=1}^{n} A_s^r \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}(Q_r + \Lambda_r) \qquad (s,k=1,2,\cdots,n) \tag{22.6.11}$$

则 Lagrange 对称性导致守恒量[11]

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^m) = \mathrm{const.} \tag{22.6.12}$$

这里有

$$\boldsymbol{A} = (A_s^k), \sum_{k=1}^{n} \overline{W}_{sk}U^{kl} = A_s^l, \overline{\mathscr{L}}_s = \sum_{r=1}^{n} A_s^r \mathscr{L}_r \tag{22.6.13}$$

22.6.4 应用举例

例 1 Lagrange 函数为

$$L=\frac{1}{2}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2)$$

非完整约束方程为[10]

$$f=\dot{q}_1+bt\dot{q}_2-bq_2+t=0$$

其中 b 为常数,广义力为 $Q_1=Q_2=0$,试研究系统的 Lagrange 对称性与守恒量。

解:方程(22.6.5)给出

$$\ddot{q}_1=-\frac{1}{1+b^2t^2},\ddot{q}_2=-\frac{bt}{1+b^2t^2}$$

其中

$$Q_1=Q_2=0,\Lambda_1=-\frac{1}{1+b^2t^2},\Lambda_2=-\frac{bt}{1+b^2t^2}$$

式(22.6.7)给出

$$\mathscr{L}_1=\ddot{q}_1+\frac{1}{1+b^2t^2},\mathscr{L}_2=\ddot{q}_2+\frac{bt}{1+b^2t^2}$$

今取另一组动力学函数

$$\bar{L}=\frac{1}{6}(\dot{q}_1+\frac{1}{b}\arctan bt)^3+\frac{1}{2}\left\{\dot{q}_2+\frac{1}{2b}\ln(1+b^2t^2)\right\}^2$$

$$\bar{Q}_1=\bar{Q}_2=0,\bar{\Lambda}_1=\bar{\Lambda}_2=0$$

则有

$$\bar{\mathscr{L}}_1=\left(\dot{q}_1+\frac{1}{b}\arctan bt\right)\mathscr{L}_1,\bar{\mathscr{L}}_2=\mathscr{L}_2$$

于是有

$$A_1^1=\dot{q}_1+\frac{1}{b}\arctan bt,A_1^2=A_2^1=0,A_2^2=1$$

容易验证式(22.6.11)成立。守恒量式(22.6.12)给出

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^m)=\left(\dot{q}_1+\frac{1}{b}\arctan bt\right)^m+1^m=\text{const.}$$

即

$$\dot{q}_1+\frac{1}{b}\arctan bt=C_1$$

另取一组动力学函数

$$\bar{L}=\frac{1}{2}\left(\dot{q}_1+\frac{1}{b}\arctan bt\right)^2+\frac{1}{6}\left\{\dot{q}_2+\frac{1}{2b}\ln(1+b^2t^2)\right\}^3$$

$$\bar{Q}_1=\bar{Q}_2=0,\bar{\Lambda}_1=\bar{\Lambda}_2=0$$

则可求得守恒量

$$\dot{q}_2+\frac{1}{2b}\ln(1+b^2t^2)=C_2$$

将所得两个积分,再积分一次,得到

$$q_1=-\frac{t}{b}\arctan bt+\frac{1}{2b^2}\ln(1+b^2t^2)+D_1t+D_3$$

$$q_2=\frac{t}{b}-\frac{1}{b^2}\arctan bt-\frac{t}{2b}\ln(1+b^2t^2)+D_2t+D_4$$

其中 $D_1=C_1-1,D_2=C_2-1$。以上是相应完整系统的解,非完整系统的解需施加约束对初始条件的限制

$$D_1-bD_4=0$$

例 2 研究半径为 a 的匀质圆球沿粗糙水平面的滚动问题的 Lagrange对称性与守恒量。

解 球的位置由球心坐标(x,y)和 Euler 角 ψ,θ,φ 来确定,表示纯滚动的非完整约束方程为

$$f_1=\dot{x}+a(\dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi-\dot{\theta}\sin\psi)=0$$

$$f_2=\dot{y}+a(\dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi+\dot{\theta}\cos\psi)=0$$

系统的 Lagrange 函数为

$$L=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)+\frac{1}{2}\frac{2}{5}ma^2(\dot{\psi}^2+\dot{\theta}^2+\dot{\varphi}^2+2\dot{\psi}\dot{\varphi}\cos\theta)$$

令

$$q_1=\psi,q_2=\theta,q_3=\varphi,q_4=x,q_5=y$$

则有

$$L=\frac{1}{2}m(\dot{q}_4^2+\dot{q}_5^2)+\frac{1}{2}\frac{2}{5}ma^2(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2+\dot{q}_3^2+2\dot{q}_1\dot{q}_3\cos q_2)$$

方程(22.6.2)给出

$$\frac{2}{5}ma^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{q}_1+\dot{q}_3\cos q_2)=0$$

$$\frac{2}{5}ma^2(\ddot{q}_2+\dot{q}_1\dot{q}_3\sin q_2)=\lambda_1(-a\sin q_1)+\lambda_2(a\cos q_1)$$

$$\frac{2}{5}ma^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{q}_3+\dot{q}_1\cos q_2)=\lambda_1a\sin q_2\cos q_1+\lambda_2a\sin q_2\sin q_1$$

$$m\ddot{q}_4=\lambda_1,m\ddot{q}_5=\lambda_2$$

其中 λ_1,λ_2 为约束乘子。将约束方程对 t 求导数,并代入运动方程,可求得

$$\lambda_1=\lambda_2=0$$

于是有

$$Q_s=\Lambda_s=0 \qquad (s=1,2,\cdots,5)$$

为研究 Lagrange 对称性，现取另一组动力学函数

$$\overline{L}=\frac{1}{6}m\dot{q}_4^3+\frac{1}{2}m\dot{q}_5^2+\frac{1}{2}\frac{2}{5}ma^2(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2+\dot{q}_3^2+2\dot{q}_1\dot{q}_3\cos q_2)$$

$$\overline{Q}_s=\overline{\Lambda}_s=0 \qquad (s=1,2,\cdots,5)$$

于是有

$$\overline{\mathscr{L}}_1=\mathscr{L}_1,\overline{\mathscr{L}}_2=\mathscr{L}_2,\overline{\mathscr{L}}_3=\mathscr{L}_3,\overline{\mathscr{L}}_4=\dot{q}_4\mathscr{L}_4,\overline{\mathscr{L}}_5=\mathscr{L}_5$$

$$A_1^1=A_2^2=A_3^3=A_5^5=1,A_4^4=\dot{q}_4$$

而守恒量式(22.6.12)给出

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^m)=\dot{q}_4^m+4=\text{const.}$$

取 $m=1$，则有

$$\dot{q}_4=C_1$$

类似地，取动力学函数为

$$\overline{L}=\frac{1}{2}m\dot{q}_4^2+\frac{1}{6}m\dot{q}_5^3+\frac{1}{2}\frac{2}{5}ma^2(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2+\dot{q}_3^2+2\dot{q}_1\dot{q}_3\cos q_2)$$

$$\overline{Q}_s=\overline{\Lambda}_s=0 \qquad (s=1,2,\cdots,5)$$

则 Lagrange 对称性导致守恒量

$$\dot{q}_5=C_2$$

§22.7 Birkhoff 系统的 Birkhoff 对称性

本节讨论 Birkhoff 系统的一种新对称性，称为 Birkhoff 对称性，给出系统 Birkhoff 对称性的定义和判据、守恒量的形式等。

22.7.1 运动微分方程

Birkhoff 系统的微分方程为

$$\sum_{\nu=1}^{2n}\Omega_{\mu\nu}\dot{a}^\nu-\frac{\partial B}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu}{\partial t}=0 \qquad (\mu=1,2,\cdots,2n) \tag{22.7.1}$$

其中

$$\Omega_{\mu\nu}=\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu} \tag{22.7.2}$$

假设

$$\det(\Omega_{\mu\nu})\neq0 \tag{22.7.3}$$

则由式(22.7.1)可解出

$$\dot{a}^{\mu}=\sum_{\nu=1}^{2n}\Omega^{\mu\nu}\left(\frac{\partial B}{\partial a^{\nu}}+\frac{\partial R_{\nu}}{\partial t}\right)\qquad(\mu=1,2,\cdots,2n)\tag{22.7.4}$$

其中

$$\sum_{\nu=1}^{2n}\Omega^{\mu\nu}\Omega_{\nu\rho}=\delta_{\rho}^{\mu}\tag{22.7.5}$$

22.7.2 Birkhoff 对称性的定义和判据

研究满足方程(22.7.1)的两组动力学函数 B,R_u 和 $\overline{B},\overline{R}_u$，令

$$S_{\mu}=\sum_{\nu=1}^{2n}\Omega_{\mu\nu}\dot{a}^{\nu}-\frac{\partial B}{\partial a^{\mu}}-\frac{\partial R_{\mu}}{\partial t}\tag{22.7.6}$$

$$\overline{S}_{\mu}=\sum_{\nu=1}^{2n}\overline{\Omega}_{\mu\nu}\dot{a}^{\nu}-\frac{\partial \overline{B}}{\partial a^{\mu}}-\frac{\partial \overline{R}_{\mu}}{\partial t}\tag{22.7.7}$$

其中

$$\overline{\Omega}_{\mu\nu}=\frac{\partial\overline{R}_{\nu}}{\partial a^{\mu}}-\frac{\partial\overline{R}_{\mu}}{\partial a^{\nu}}\tag{22.7.8}$$

定义 如果由 $S_{\mu}=0(\mu=1,2,\cdots,2n)$ 可以得到 $\overline{S}_{\nu}=0(\nu=1,2,\cdots,n)$，反之亦然，则这种对称性称为 **Birkhoff 对称性**。

判据 如果两组动力学函数 B,R_{μ} 和 $\overline{B},\overline{R}_{\mu}$ 满足条件

$$\sum_{\nu=1}^{2n}\sum_{\rho=1}^{2n}\Omega_{\mu\nu}\overline{\Omega}^{\nu\rho}\left(\frac{\partial \overline{B}}{\partial a^{\rho}}+\frac{\partial \overline{R}_{\rho}}{\partial t}\right)=\frac{\partial B}{\partial a^{\mu}}+\frac{\partial R_{\mu}}{\partial t}\qquad(\mu=1,2,\cdots,2n)\tag{22.7.9}$$

则相应对称性称为 Birkhoff 对称性。

22.7.3 Birkhoff 对称性导致的守恒量

下面导出由 Birkhoff 对称性导致的守恒量。

将式(22.7.9)代入(22.7.6)，得

$$\begin{aligned}S_{\mu}&=\sum_{\nu=1}^{2n}\Omega_{\mu\nu}\dot{a}^{\nu}-\sum_{\nu=1}^{2n}\sum_{\rho=1}^{2n}\Omega_{\mu\nu}\overline{\Omega}^{\nu\rho}\left(\frac{\partial \overline{B}}{\partial a^{\rho}}+\frac{\partial \overline{R}_{\rho}}{\partial t}\right)\\&=\sum_{\nu=1}^{2n}\sum_{\rho=1}^{2n}\Omega_{\mu\nu}\overline{\Omega}^{\nu\rho}\left(\sum_{\tau=1}^{2n}\overline{\Omega}_{\rho\tau}\dot{a}^{\tau}-\frac{\partial \overline{B}}{\partial a^{\rho}}-\frac{\partial \overline{R}_{\rho}}{\partial t}\right)\\&=\sum_{\nu=1}^{2n}\sum_{\rho=1}^{2n}\Omega_{\mu\nu}\overline{\Omega}^{\nu\rho}\overline{S}_{\rho}\end{aligned}\tag{22.7.10}$$

令

$$\sum_{\nu=1}^{2n}\overline{\Omega}_{\mu\nu}\Omega^{\nu\rho}=A_{\mu}^{\rho}\tag{22.7.11}$$

则有

$$\overline{S}_{\mu}=\sum_{\nu=1}^{2n}A_{\mu}^{\nu}S_{\nu} \tag{22.7.12}$$

$$\sum_{\nu=1}^{2n}A_{\mu}^{\nu}\Omega_{\nu\rho}=\overline{\Omega}_{\mu\rho} \tag{22.7.13}$$

将式(22.7.13)对 a^{τ} 求偏导数,得

$$\sum_{\nu=1}^{2n}\frac{\partial A_{\mu}^{\nu}}{\partial a^{\tau}}\Omega_{\nu\rho}+\sum_{\nu=1}^{2n}A_{\mu}^{\nu}\frac{\partial\Omega_{\nu\rho}}{\partial a^{\tau}}=\frac{\partial\,\overline{\Omega}_{\mu\rho}}{\partial a^{\tau}}$$

于是有

$$\sum_{\nu=1}^{2n}\frac{\partial A_{\mu}^{\nu}}{\partial a^{\tau}}\Omega_{\nu\rho}=\frac{\partial^2\overline{R}_{\rho}}{\partial a^{\mu}\partial a^{\tau}}-\frac{\partial^2\overline{R}_{\mu}}{\partial a^{\rho}\partial a^{\tau}}-\sum_{\nu=1}^{2n}A_{\mu}^{\nu}\left(\frac{\partial^2 R_{\rho}}{\partial a^{\nu}\partial a^{\tau}}-\frac{\partial^2 R_{\nu}}{\partial a^{\rho}\partial a^{\tau}}\right)$$

类似地,有

$$\sum_{\nu=1}^{2n}\frac{\partial A_{\mu}^{\nu}}{\partial a^{\rho}}\Omega_{\nu\tau}=\frac{\partial^2\overline{R}_{\tau}}{\partial a^{\mu}\partial a^{\rho}}-\frac{\partial^2\overline{R}_{\mu}}{\partial a^{\tau}\partial a^{\rho}}-\sum_{\nu=1}^{2n}A_{\mu}^{\nu}\left(\frac{\partial^2 R_{\tau}}{\partial a^{\nu}\partial a^{\rho}}-\frac{\partial^2 R_{\nu}}{\partial a^{\tau}\partial a^{\rho}}\right)$$

两式相减,得

$$\sum_{\nu=1}^{2n}\left(\frac{\partial A_{\mu}^{\nu}}{\partial a^{\tau}}\Omega_{\nu\rho}-\frac{\partial A_{\mu}^{\nu}}{\partial a^{\rho}}\Omega_{\nu\tau}\right)=\frac{\partial\,\overline{\Omega}_{\tau\rho}}{\partial a^{\mu}}-\sum_{\nu=1}^{2n}A_{\mu}^{\nu}\frac{\partial\Omega_{\tau\rho}}{\partial a^{\nu}} \tag{22.7.14}$$

利用式(22.7.11),方程(22.7.9)可表示为

$$\frac{\partial\overline{B}}{\partial a^{\rho}}+\frac{\partial\overline{B}_{\rho}}{\partial t}=\sum_{\nu=1}^{2n}A_{\rho}^{\nu}\left(\frac{\partial B}{\partial a^{\nu}}+\frac{\partial R_{\nu}}{\partial t}\right) \tag{22.7.15}$$

将式(22.7.15)对 a^{τ} 求偏导数,得

$$\frac{\partial^2\overline{B}}{\partial a^{\rho}\partial a^{\tau}}+\frac{\partial^2\overline{R}_{\rho}}{\partial t\partial a^{\tau}}=\sum_{\nu=1}^{2n}\frac{\partial A_{\rho}^{\nu}}{\partial a^{\tau}}\left(\frac{\partial B}{\partial a^{\nu}}+\frac{\partial R_{\nu}}{\partial t}\right)+\sum_{\mu=1}^{2n}A_{\rho}^{\nu}\left(\frac{\partial^2 B}{\partial a^{\nu}\partial a^{\tau}}+\frac{\partial^2 R_{\nu}}{\partial t\partial a^{\tau}}\right) \tag{22.7.16}$$

利用 $S_{\nu}=0$,有

$$\frac{\partial B}{\partial a^{\nu}}+\frac{\partial R_{\nu}}{\partial t}=\sum_{\mu=1}^{2n}\Omega_{\nu\mu}\dot{a}^{\mu}$$

将其代入式(22.7.16),得

$$\frac{\partial^2\,\overline{B}}{\partial a^{\rho}\partial a^{\tau}}+\frac{\partial^2\,\overline{R}_{\rho}}{\partial t\partial a^{\tau}}=\sum_{\nu=1}^{2n}\frac{\partial A_{\rho}^{\nu}}{\partial a^{\tau}}\sum_{\mu=1}^{2n}\Omega_{\nu\mu}\dot{a}^{\mu}+\sum_{\nu=1}^{2n}A_{\rho}^{\nu}\left(\frac{\partial^2 B}{\partial a^{\nu}\partial a^{\tau}}+\frac{\partial^2 R_{\nu}}{\partial t\partial a^{\tau}}\right) \tag{22.7.17}$$

将式(22.7.14)两端乘以 $\dot{a}^{\mu}$,并对 μ 求和,得

$$\begin{aligned}\sum_{\nu=1}^{2n}\sum_{\mu=1}^{2n}\frac{\partial A_{\rho}^{\nu}}{\partial a^{\tau}}\Omega_{\nu\mu}\dot{a}^{\mu}&=\sum_{\mu=1}^{2n}\left(\sum_{\nu=1}^{2n}\frac{\partial A_{\rho}^{\nu}}{\partial a^{\mu}}\Omega_{\nu\tau}+\frac{\partial^2\overline{\Omega}_{\tau\mu}}{\partial a^{\rho}}-\sum_{\nu=1}^{2n}A_{\rho}^{\nu}\frac{\partial\,\overline{\Omega}_{\tau\mu}}{\partial a^{\nu}}\right)\dot{a}^{\mu}\\&=\sum_{\nu=1}^{2n}\left(\frac{\mathrm{d}A_{\rho}^{\nu}}{\mathrm{d}t}-\frac{\partial A_{\rho}^{\nu}}{\partial t}\right)\Omega_{\nu\tau}+\frac{\partial}{\partial a^{\rho}}\left(\frac{\partial\,\overline{B}}{\partial a^{\tau}}+\frac{\partial\,\overline{R}_{\tau}}{\partial\tau}\right)-\\&\quad\sum_{\nu=1}^{2n}A_{\rho}^{\nu}\frac{\partial}{\partial a^{\nu}}\left(\frac{\partial B}{\partial a^{\tau}}+\frac{\partial R_{\tau}}{\partial t}\right)\end{aligned} \tag{22.7.18}$$

将式(22.7.18)代入式(22.7.17),并注意到

$$\sum_{\nu=1}^{2n}\frac{\partial A_{\rho}^{\nu}}{\partial t}\Omega_{\nu\tau}=\frac{\partial^2\overline{R}_{\tau}}{\partial t\partial a^{\rho}}-\frac{\partial^2\overline{R}_{\rho}}{\partial t\partial a^{\tau}}-\sum_{\nu=1}^{2n}A_{\rho}^{\nu}\left(\frac{\partial^2 R_{\tau}}{\partial t\partial a^{\nu}}-\frac{\partial^2 R_{\nu}}{\partial t\partial a^{\tau}}\right)\tag{22.7.19}$$

则得

$$\sum_{\nu=1}^{2n}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(A_{\rho}^{\nu})\Omega_{\nu\tau}=0\tag{22.7.20}$$

写成矩阵形式,有

$$\dot{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{\Omega}=0$$

因此有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\{\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^m)\}=0\tag{22.7.21}$$

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^m)=\mathrm{const.}\tag{22.7.22}$$

于是有如下结果:

命题 1[12] Birkhoff 系统的 Birkhoff 对称性导致守恒量式(22.7.22)。

下面讨论广义 Birkhoff 系统的 Birkhoff 对称性与守恒量。

广义 Birkhoff 方程有形式

$$\sum_{\nu=1}^{2n}\Omega_{\mu\nu}\dot{a}^{\nu}-\frac{\partial B}{\partial a^{\mu}}-\frac{\partial R_{\mu}}{\partial t}=-\Lambda_{\mu}\qquad(\mu=1,2,\cdots,2n)\tag{22.7.23}$$

令

$$\begin{aligned}S_{\mu}&=\sum_{\nu=1}^{2n}\Omega_{\mu\nu}\dot{a}^{\nu}-\frac{\partial B}{\partial a^{\mu}}-\frac{\partial R_{\mu}}{\partial t}+\Lambda_{\mu}\\ \overline{S}_{\mu}&=\sum_{\nu=1}^{2n}\overline{\Omega}_{\mu\nu}\dot{a}^{\nu}-\frac{\partial\overline{B}}{\partial a^{\mu}}-\frac{\partial\overline{R}_{\mu}}{\partial t}+\overline{\Lambda}_{\mu}\end{aligned}\tag{22.7.24}$$

如果由 $S_{\mu}=0(\mu=1,2,\cdots,2n)$ 可得到 $\overline{S}_{\nu}=0(\nu=1,2,\cdots,2n)$,反之亦然,则称 B,R_{μ} 和 $\overline{B},\overline{R}_{\mu}$ 具有 Birkhoff 对称性。

类似于式(22.7.9),得到判据方程

$$\sum_{\nu=1}^{2n}\sum_{\rho=1}^{2n}\Omega_{\mu\nu}\overline{\Omega}^{\nu\rho}\left(\frac{\partial\overline{B}}{\partial a^{\rho}}+\frac{\partial\overline{R}_{\rho}}{\partial t}-\overline{\Lambda}^{\rho}\right)=\frac{\partial B}{\partial a^{\mu}}+\frac{\partial R_{\mu}}{\partial t}-\Lambda_{\mu}\qquad(\mu=1,2,\cdots,2n)\tag{22.7.25}$$

类似于式(22.7.10)~式(22.7.14),仍有

$$S_{\mu}=\sum_{\nu=1}^{2n}\sum_{\rho=1}^{2n}\Omega_{\mu\nu}\overline{\Omega}^{\nu\rho}\overline{S}_{\rho}\tag{22.7.26}$$

$$\sum_{\nu=1}^{2n}\overline{\Omega}_{\mu\nu}\Omega^{\nu\rho}=A_{\mu}^{\rho}\tag{22.7.27}$$

$$\overline{S}_{\mu}=\sum_{\rho=1}^{2n}A_{\mu}^{\rho}S_{\rho}\tag{22.7.28}$$

$$\sum_{\nu=1}^{2n} A_{\mu}^{\nu}\Omega_{\nu\rho} = \overline{\Omega}_{\mu\rho} \tag{22.7.29}$$

$$\sum_{\nu=1}^{2n}\left(\frac{\partial A_{\mu}^{\nu}}{\partial a^{\tau}}\Omega_{\nu\rho} - \frac{\partial A_{\mu}^{\nu}}{\partial a^{\rho}}\Omega_{\nu\tau}\right) = \frac{\partial\,\overline{\Omega}_{\tau\rho}}{\partial a^{\mu}} + \sum_{\nu=1}^{2n} A_{\mu}^{\nu}\frac{\partial\Omega_{\tau\rho}}{\partial a^{\nu}} \tag{22.7.30}$$

对广义 Birkhoff 系统,式(22.7.15)改为

$$\frac{\partial\,\overline{B}}{\partial a^{\rho}} + \frac{\partial\,\overline{R}_{\rho}}{\partial t} - \overline{\Lambda}_{\rho} = \sum_{\nu=1}^{2n} A_{\rho}^{\nu}\left(\frac{\partial B}{\partial a^{\nu}} + \frac{\partial R_{\nu}}{\partial t} - \Lambda_{\nu}\right) \tag{22.7.31}$$

式(22.7.17)改为

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2\overline{B}}{\partial a^{\rho}\partial a^{\tau}} + \frac{\partial^2\,\overline{R}_{\rho}}{\partial t\partial a^{\tau}} - \frac{\partial\,\overline{\Lambda}_{\rho}}{\partial a^{\tau}}\\ &= \sum_{\nu=1}^{2n}\frac{\partial A_{\rho}^{\nu}}{\partial a^{\tau}}\sum_{\mu=1}^{2n}\Omega_{\nu\mu}\,\dot{a}^{\mu} + \sum_{\nu=1}^{2n} A_{\rho}^{\nu}\left(\frac{\partial^2 B}{\partial a^{\nu}\partial a^{\tau}} + \frac{\partial^2 R_{\nu}}{\partial t\partial a^{\tau}} - \frac{\partial\Lambda_{\nu}}{\partial a^{\tau}}\right)\end{aligned} \tag{22.7.32}$$

式(22.7.18)改为

$$\begin{aligned}\sum_{\nu=1}^{2n}\sum_{\mu=1}^{2n}\frac{\partial A_{\rho}^{\nu}}{\partial a^{\tau}}\Omega_{\nu\mu}\,\dot{a}^{\mu} &= \sum_{\nu=1}^{2n}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}A_{\rho}^{\nu} - \frac{\partial A_{\rho}^{\nu}}{\partial t}\right)\Omega_{\nu\tau} + \\ \frac{\partial}{\partial a^{\rho}}\left(\frac{\partial\,\overline{B}}{\partial a^{\tau}} + \frac{\partial\,\overline{R}_{\tau}}{\partial t} - \overline{\Lambda}_{\tau}\right) &+ \sum_{\nu=1}^{2n} A_{\rho}^{\nu}\frac{\partial}{\partial a^{\nu}}\left(\frac{\partial B}{\partial a^{\tau}} + \frac{\partial R_{\tau}}{\partial t} - \Lambda_{\tau}\right)\end{aligned} \tag{22.7.33}$$

将式(22.7.33)代入式(22.7.32),并注意到式(22.7.19),得到

$$\sum_{\nu=1}^{2n}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(A_{\rho}^{\nu})\Omega_{\nu\tau} = -\frac{\partial\,\overline{\Lambda}_{\rho}}{\partial a^{\tau}} + \frac{\partial\,\overline{\Lambda}_{\tau}}{\partial a^{\rho}} - \sum_{\nu=1}^{2n} A_{\rho}^{\nu}\left(\frac{\partial\Lambda_{\tau}}{\partial a^{\nu}} - \frac{\partial\Lambda_{\nu}}{\partial a^{\tau}}\right) \tag{22.7.34}$$

因此,当

$$\frac{\partial\overline{\Lambda}_{\tau}}{\partial a^{\rho}} - \frac{\partial\overline{\Lambda}_{\rho}}{\partial a^{\tau}} = 0,\ \frac{\partial\Lambda_{\tau}}{\partial a^{\rho}} - \frac{\partial\Lambda_{\rho}}{\partial a^{\tau}} = 0 \qquad (\rho,\tau = 1,2,\cdots,2n) \tag{22.7.35}$$

时,有

$$\sum_{\nu=1}^{2n}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(A_{\rho}^{\nu})\Omega_{\nu\tau} = 0 \tag{22.7.36}$$

写成矩阵形式,有

$$\dot{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{\Omega} = 0$$

于是有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\{\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^{m})\} = 0 \tag{22.7.37}$$

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^{m}) = \mathrm{const.} \tag{22.7.38}$$

命题 2 对广义 Birkhoff 系统(22.7.23),如果附加项 Λ_{μ} 和$\overline{\Lambda}_{\mu}$ 满足条件(22.7.35),则系统 Birkhoff 对称性导致守恒量式(22.7.38)。

22.7.4 应用举例

例 1 4 阶 Birkhoff 系统为

$$R_1=a^3, R_2=a^4, R_3=R_4=0$$

$$B=\frac{1}{2}\left\{a^3-\frac{1}{b}\arctan bt\right\}^2+\frac{1}{2}\left\{a^4-\frac{1}{2b}\ln(1+b^2t^2)\right\}^2$$

试研究其 Birkhoff 对称性与守恒量。

解:方程(22.7.1)给出

$$-\dot{a}^3=0,\ -\dot{a}^4=0$$

$$\dot{a}^1=a^3-\frac{1}{b}\arctan bt,\ \dot{a}^2=a^4-\frac{1}{2b}\ln(1+b^2t^2)$$

于是有

$$(\Omega_{\mu\nu})=\begin{pmatrix}0&0&-1&0\\0&0&0&-1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},\ (\Omega^{\mu\nu})=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\-1&0&0&0\\0&-1&0&0\end{pmatrix}$$

取另一组动力学函数为

$$\overline{R}_1=\frac{1}{2}(a^3)^2, \overline{R}_2=a^4, \overline{R}_3=\overline{R}_4=0$$

$$\overline{B}=\frac{1}{3}(a^3)^3-\frac{1}{2}(a^3)^2\ \frac{1}{b}\arctan bt+\frac{1}{2}\left[a^4-\frac{1}{2b}\ln(1+b^2t^2)\right]^2$$

则有

$$(\overline{\Omega}_{\mu\nu})=\begin{pmatrix}0&0&-a^3&0\\0&0&0&-1\\a^3&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$$

式(22.7.11)给出

$$(A_\mu^\rho)=\begin{pmatrix}0&0&-a^3&0\\0&0&0&-1\\a^3&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\-1&0&0&0\\0&-1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^3&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&a^3&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

Lagrange 对称性导致的守恒量为

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^m)=2(a^3)^m+2=\text{const.}$$

即有

$$a^3=C_1$$

再取另一组动力学函数

$$\overline{R}_1=a^3,\overline{R}_2=\frac{1}{2}(a^4)^2,\overline{R}_3=\overline{R}_4=0$$

$$\overline{B}=\frac{1}{3}(a^4)^3-\frac{1}{2}(a^4)^2\frac{1}{2b}\ln(1+b^2t^2)+\frac{1}{2}\left(a^3-\frac{1}{b}\arctan bt\right)^2$$

则有守恒量

$$a^4=C_2$$

例 2 二阶 Birkhoff 系统为

$$R_1=0,R_2=ta^1,B=\frac{1}{2}(ta^1)^2+\frac{1}{2}(a^2)^2$$

试研究其 Birkhoff 对称性与守恒量。

解:由 R_1,R_2 的表达式,得到

$$(\Omega_{\mu\nu})=\begin{pmatrix}0 & t\\ -t & 0\end{pmatrix},(\Omega^{\mu\nu})=\begin{pmatrix}0 & -\frac{1}{t}\\ \frac{1}{t} & 0\end{pmatrix}$$

取另一组动力学函数为

$$\overline{R}_1=0,\overline{R}_2=\frac{1}{3}t^3(a^1)^3+ta^1(a^2)^2+t(a^2)^3$$

$$\overline{B}=\frac{1}{4}t^3(a^1)^4+\frac{1}{2}t^2(a^1a^2)^2$$

则有

$$(\overline{\Omega}_{\mu\nu})=\begin{pmatrix}0 & t[(ta^1)^2+(a^2)^2]\\ -t[(ta^1)^2+(a^2)^2] & 0\end{pmatrix}$$

于是有

$$(\Lambda_\mu^\nu)=(\overline{\Omega}_{\mu\rho})(\Omega^{\rho\nu})=\begin{pmatrix}(ta^1)^2+(a^2)^2 & 0\\ 0 & (ta^1)^2+(a^2)^2\end{pmatrix}$$

而

$$\mathrm{tr}\boldsymbol{A}=[2(ta^1)^2+(a^2)^2]=\mathrm{const.}$$

即有守恒量

$$(ta^1)^2+(a^2)^2=C$$

例 3 4 阶广义 Birkhoff 系统为

$$R_1=R_2=0,R_3=a^1,R_4=a^2,B=\frac{1}{2}(a^3)^2+\frac{1}{2}(a^4)^2$$

$$\Lambda_1=-t,\Lambda_2=-t,\Lambda_3=a^3,\Lambda_4=a^4$$

试研究其 Birkhoff 对称性与守恒量。

解:选一组动力学函数为

$$\overline{R}_1=\overline{R}_2=0,\overline{R}_3=\frac{1}{2}(a^1)^2,\overline{R}_4=\frac{1}{2}(a^2)^2$$

$$\overline{B}=\frac{1}{2}a^1(a^3)^2+\frac{1}{2}a^2(a^4)^2,\overline{\Lambda}_1=\frac{1}{2}(a^3)^2-a^1t$$

$$\overline{\Lambda}_2=\frac{1}{2}(a^4)^2-a^2t,\overline{\Lambda}_3=a^1a^3,\overline{\Lambda}_4=a^2a^4$$

容易验证,两组动力学函数 B,R_μ 和$\overline{B},\overline{R}_\mu$ 满足判据方程(22.7.25),且 $\Lambda_\mu,\overline{\Lambda}_\nu$ 满足式(22.7.35)。

由

$$(\Omega_{\mu\nu})=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\-1&0&0&0\\0&-1&0&0\end{pmatrix},(\overline{\Omega}_{\mu\nu})=\begin{pmatrix}0&0&a^1&0\\0&0&0&a^2\\-a^1&0&0&0\\0&-a^2&0&0\end{pmatrix}$$

得

$$(A_\mu^\rho)=(\overline{\Omega}_{\mu\nu}\Omega^{\nu\rho})=\begin{pmatrix}0&0&a^1&0\\0&0&0&a^2\\-a^1&0&0&0\\0&-a^2&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&-1&0\\0&0&0&-1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}a^1&0&0&0\\0&a^2&0&0\\0&0&a^3&0\\0&0&0&a^4\end{pmatrix}$$

守恒量式(22.7.38)给出

$$2[(a^1)^m+(a^2)^m]=\text{const.}\qquad (m=1,2,\cdots)$$

即

$$a^1+a^2=C_1$$

选另一组动力学函数为

$$\overline{R}_1=\frac{1}{2}\left(a^3-\frac{1}{2}t^2\right)^2,\overline{R}_2=\frac{1}{2}\left(a^4-\frac{1}{2}t^2\right)^2,\overline{R}_3=\overline{R}_4=0$$

$$\overline{B}=-\frac{1}{3}(a^3)^3+\frac{1}{4}t^2(a^4)^2-\frac{1}{3}(a^4)^3+\frac{1}{4}t^2(a^4)^2$$

$$\overline{\Lambda}_1=\overline{\Lambda}_2=0,\overline{\Lambda}_3=-a^3\left(a^3-\frac{1}{2}t^2\right),\overline{\Lambda}_4=-a^4\left(a^4-\frac{1}{2}t^2\right)$$

则有

$$(A_{\mu}^{\rho})=(\overline{\Omega}_{\mu\nu},\Omega^{\nu\rho})$$

$$=\begin{pmatrix} -\left(a^3-\frac{1}{2}t^2\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\left(a^4-\frac{1}{2}t^2\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\left(a^3-\frac{1}{2}t^2\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\left(a^4-\frac{1}{2}t^2\right) \end{pmatrix}$$

而守恒量有形式

$$a^3-\frac{1}{2}t^2+a^4-\frac{1}{2}t^2=C_2$$

无论怎样的约束力学系统——Lagrange 系统、一般完整系统、有多余坐标的完整系统、相对运动动力学系统、变质量完整系统、非完整系统等，其 Lagrange对称性导致的守恒量都有统一的形式，区别仅在于 Lagrange 对称性的判据以及守恒量存在的条件。对 Birkhoff 系统和广义 Birkhoff 系统的 Birkhoff对称性也有类似结果。有关研究可参见文献[13～15]。

思考题

22.1 Lagrange 对称性与 Noether 对称性、Lie 对称性和形式不变性有何区别？

22.2 Birkhoff 对称性与 Noether 对称性、Lie 对称性和形式不变性有何区别？

22.3 Lagrange 对称性与 Birkhoff 对称性有何区别？

22.4 一维谐振子的运动，可用 Lagrange 系统 $L=\frac{1}{2}(\dot{q}^2-q^2)$，也可用一般完整系统 $L=\frac{1}{2}\dot{q}^2, Q=-q$ 来描述。在研究系统 Lagrange 对称性时，哪个系统方便些？

22.5 一维谐振子的运动，可表示为 Lagrange 系统 $L=\frac{1}{2}(\dot{q}^2-q^2)$，也可表示为 Birkhoff 系统 $R_1=a^2, R_2=0, B=\frac{1}{2}(a^1)^2+\frac{1}{2}(a^2)^2(a^1=q, a^2=\dot{q})$。用

Lagrange对称性好,还是用 Birkhoff 对称性好?

习题

22.1 三自由度系统的 Lagrange 函数为

$$L=\frac{1}{2}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2+\dot{q}_3^2+2\dot{q}_1\dot{q}_3\cos q_2)$$

试研究其 Lagrange 对称性与守恒量。

22.2 微分方程为

$$\ddot{q}=\dot{q}$$

试将其化为 Lagrange 方程,然后研究其 Lagrange 对称性与守恒量。

22.3 微分方程为

$$\ddot{q}_1=\gamma\dot{q}_1,\ddot{q}_2=\gamma\dot{q}_2$$

其中 γ 为常数,试研究 Lagrange 对称性与守恒量。

22.4 两个一阶方程为

$$\dot{a}^1=-ca^2,\dot{a}^2=ca^1$$

试将其 Birkhoff 化并研究 Birkhoff 对称性与守恒量。

22.5 二阶 Birkhoff 系统为

$$R_1=a^2,R_2=0,B=\frac{1}{2}\frac{1}{m+f(t)}\{k_2(a^2)^2-k_1(a^1)^2\}$$

其中 m,k_1,k_2 为常数,试研究其 Birkhoff 对称性与守恒量。

参考文献

[1]Currie DF, Saletan EJ. Q-equivalent particle Hamiltonians I. The classical one-dimensional case[J]. J Math Phys,1966,7(6):963-974.

[2]Hojman S, Harleston H. Equiralent Lagrangians: multidimensional case [J]. J Math Phys,1981,22(7):1414-1419.

[3]赵跃宇,梅凤翔. 力学系统的对称性与不变量[M]. 北京:科学出版社,1999.

[4]Суслов ГК. Теоретическая Механика[M]. Москва:Гостехиздат,1946.

[5]梅凤翔. 约束力学系统的对称性与守恒量[M]. 北京:北京理工大学出版社,2004.

[6]Лурье АИ. Аналитическая Механика[M]. Москва:ГИФМЛ,1961.

[7]梅凤翔. 李群和李代数对约束力学系统的应用[M]. 北京:科学出版社,1999.

[8]梅凤翔,吴惠彬. 相对运动动力学系统的 Lagrange 对称性[J]. 物理学报,

2009,58(9):5919-5922.
[9]WuHB,Mei FX. Symmetry of Lagrangians of a holonomic variable mass system[J]. Chin Phys B,2012,21(6):0640501.
[10]Новосёлов ВС. Вариационные Методы в Механике[M]. Ленинград:ЛГУ,1966.
[11]Mei FX, Wu HB. Symmetry of Lagrangians of non holonomic systems [J]. Phys Lett A, 2008,392:2141-2147.
[12]Mei FX,Gang TQ, Xie JF. A symmetry and conserved quantity for the Birkhoff system[J]. Chin Phys, 2006,15(8):1698-1681.
[13]Wu HB,Mei FX. Symmetry of Lagrangians of holonomic system in terms of quasi-coordinates[J]. Chin Phys,2009,18(8):3145-3149.
[14]Wu HB,Mei FX. Symmetry of Lagrangians of non holonomic systems of non-Chetaev's type[J]. Chin Phys B. 2010,19(3):030303.
[15]梅凤翔,吴惠彬. 微分方程的分析力学方法[M]. 北京:科学出版社,2012.

23

力学系统与梯度系统

专著[1]第 9 章"大范围的非线性技巧"中研究了两类重要系统：一类是梯度系统；另一类是 Hamilton 系统。**梯度系统**是微分方程和动力系统中的重要问题，特别适合用 Ляпунов 函数来研究。如果一个力学系统能够成为梯度系统，那么就可利用梯度系统的特性来研究力学系统的性质，特别是运动稳定性质。

文献[2]指出，给出一个或几个积分，或 Ляпунов 函数，则常微分方程可写成线梯度系统。**斜梯度系统**是线梯度系统的特殊情形。如果一个力学系统可以成为斜梯度系统，那么就可利用斜梯度系统的性质来研究力学系统的积分和稳定性。

§23.1 梯度系统与斜梯度系统

本节介绍梯度系统与斜梯度系统的微分方程，以及梯度系统与斜梯度系统的主要性质。

23.1.1 微分方程

梯度系统的微分方程为

$$\dot{x}_i = -\frac{\partial V}{\partial x_i} \qquad (i=1,2,\cdots,n) \tag{23.1.1}$$

其中 $V=V(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 称为势函数。方程(23.1.1)可表示为矢量形式

$$\dot{\boldsymbol{X}} = -\text{grad}\ V(\boldsymbol{X}) = -\nabla V(\boldsymbol{X}) \tag{23.1.2}$$

其中

$$\boldsymbol{X} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

$$\nabla V = \left(\frac{\partial V}{\partial x_1}, \frac{\partial V}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial V}{\partial x_n}\right)$$

斜梯度系统的微分方程为

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\boldsymbol{X}) \frac{\partial V}{\partial x_j} \qquad (i = 1,2,\cdots,n) \tag{23.1.3}$$

其中 $a_{ij}=-a_{ji}$。方程(23.1.3)可表示为矢量形式

$$\dot{\boldsymbol{X}}=A(\boldsymbol{X})\nabla V \tag{23.1.4}$$

其中 $A(\boldsymbol{X})$ 为反对称矩阵，而 V 称为能量函数[2]。

23.1.2 梯度系统的性质

梯度系统有如下重要性质[1]：

1)函数 V 是系统(23.1.2)的一个 Ляпунов 函数，并且$\dot{V}=0$，当且仅当 $\boldsymbol{X}$ 是一个平衡点；

2)设 Z 是一个梯度流的解的 α 极限点，或 ω 极限点，则 Z 为平衡点；

3)对于梯度系统(23.1.2)，任一平衡点处的线性化系统都只有实特征值。

以上性质，特别是第一条和第三条性质，可用来研究可化成梯度系统的力学系统的平衡位置及其稳定性。

与第一条性质相关，只要势函数 V 成为 Ляпунов 函数，那么就有可能由$\dot{V}$的形式，按 Ляпунов 定理研究系统的稳定性，或按 **Румянцев 定理**研究部分变量稳定性。

与第三条性质相关，据 Ляпунов 一次近似理论知，如果线性化系统的特征根全为负实根，则系统是渐近稳定的；如果有正实根，则是不稳定的。

23.1.3 斜梯度系统的性质

斜梯度系统有如下重要性质[2]：

1)函数 V 是斜梯度系统(23.1.4)的积分；

2)若函数 V 是一个 Ляпунов 函数，则零解是稳定的。

以上两条性质可用来研究可化成斜梯度系统的力学系统的积分和稳定性。

§23.2 Lagrange 系统与梯度系统

本节讨论 Lagrange 系统可成为梯度系统和斜梯度系统的条件，并利用梯度系统和斜梯度系统的性质来研究 Lagrange 系统的积分和稳定性。

23.2.1 运动微分方程

Lagrange 系统的运动微分方程表示为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial L}{\partial q_s}=0 \qquad (s=1,2,\cdots,n) \tag{23.2.1}$$

完整保守系统、广义力有广义势的系统，以及 Lagrange 逆问题系统的方程都可表示为式(23.2.1)。为讨论方程(23.2.1)能否成为梯度系统，假设 $L=L(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$，引进广义动量 p_s 和 Hamilton 函数 H，有

$$p_s=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s},H=\sum_{s=1}^{n}p_s\dot{q}_s-L \tag{23.2.2}$$

则方程(23.2.1)表示为一阶形式

$$\dot{q}_s=\frac{\partial H}{\partial p_s},\dot{p}_s=-\frac{\partial H}{\partial q_s}\qquad(s=1,2,\cdots,n)\tag{23.2.3}$$

进而,将方程表示为如下形式

$$\dot{a}^\mu=\sum_{\nu=1}^{2n}\omega^{\mu\nu}\frac{\partial H}{\partial a^\nu}\qquad(u=1,2,\cdots,2n)\tag{23.2.4}$$

其中

$$a^s=q_s,a^{n+s}=p_s\qquad(s=1,2,\cdots,n)$$

$$(\omega^{\mu\nu})=\begin{pmatrix}0_{n\times n} & 1_{n\times n}\\ -1_{n\times n} & 0_{n\times n}\end{pmatrix}\tag{23.2.5}$$

23.2.2 化成梯度系统

方程(23.2.4)一般不是一个梯度系统,仅在一定条件下才能成为梯度系统。

对方程(23.2.4),如果满足条件

$$\frac{\partial}{\partial a^\rho}\left(\sum_{\nu=1}^{2n}\omega^{\mu\nu}\frac{\partial H}{\partial a^\nu}\right)-\frac{\partial}{\partial a^\mu}\left(\sum_{\nu=1}^{2n}\omega^{\rho\nu}\frac{\partial H}{\partial a^\nu}\right)=0\qquad(\mu,\rho=1,2,\cdots,2n)\tag{23.2.6}$$

或

$$\sum_{\nu=1}^{2n}\omega^{\mu\nu}\frac{\partial^2 H}{\partial a^\rho\partial a^\nu}-\sum_{\nu=1}^{2n}\omega^{\rho\nu}\frac{\partial^2 H}{\partial a^\mu\partial a^\nu}=0\qquad(\mu,\rho=1,2,\cdots,2n)\tag{23.2.7}$$

则它是一个梯度系统。此时可求得势函数 $V=V(\boldsymbol{a})$,使得

$$\sum_{\nu=1}^{2n}\omega^{\mu\nu}\frac{\partial H}{\partial a^\nu}=-\frac{\partial V}{\partial a^\mu}\qquad(\mu=1,2,\cdots,2n)\tag{23.2.8}$$

值得注意的是,如果条件(23.2.6)不满足,还不能断定它不是一个梯度系统,因为这依赖于方程的一阶表示形式。

23.2.3 稳定性

对 Lagrange 系统,在满足条件(23.2.7)下,可由式(23.2.8)求得势函数 V。如果势函数 V 成为 Ляпунов 函数,便可利用 Ляпунов 定理研究系统的稳定性,或用 Румянцев 定理研究部分变量稳定性。

Lagrange 系统成为梯度系统后,由于平衡点处的线性化系统都只有实特征值,根据 Ляпунов 一次近似理论知,如果特征值全是负的,则系统平衡是渐近稳定的;如果特征值至少有一个是正的,则系统平衡是不稳定的。

23.2.4 化成斜梯度系统

比较式(23.2.4)与式(23.1.3),容易看出 Lagrange 系统必定是斜梯度系统。化成斜梯度系统后,可知函数 V 是系统的积分,进而,如果函数 V 是

Ляпунов 函数，则系统的零解是稳定的。

23.2.5 应用举例

例 1 二自由度系统的 Lagrange 函数为

$$L=\frac{1}{2}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2)+\frac{1}{2}(q_1^2+q_2^2)$$

试将其化为梯度系统，并研究零解的稳定性。

解：令

$$a^1=q_1, a^2=q_2, a^3=\dot{q}_1, a^4=\dot{q}_2$$

则微分方程表示为

$$\dot{a}^1=a^3, \dot{a}^2=a^4\ \dot{a}^3=a^1, \dot{a}^4=a^2$$

显然，它是一个梯度系统。由或(23.2.8)可求得势函数

$$V=-a^1a^3-a^2a^4$$

它还不能成为 Ляпунов 函数。但是，特征方程有正的实根，因此，零解 $a^1=a^2=a^3=a^4=0$ 是不稳定的。

例 2 二自由度 Lagrange 系统的 Lagrange 函数为

$$L=\frac{1}{2}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2)-\frac{1}{2}(q_1^2+q_2^2)-\frac{1}{3}(q_1^3+q_2^3)$$

试将其化为斜梯度系统，并研究零解的稳定性。

解：Lagrange 方程给出

$$\ddot{q}_1=-q_1-q_1^2, \ddot{q}_2=-q_2-q_2^2$$

令
$$x_1=q_1, x_2=q_2, x_3=\dot{q}_1, x_4=\dot{q}_2$$

则有

$$\dot{x}_1=x_3, \dot{x}_2=x_4, \dot{x}_3=-x_1-x_1^2, \dot{x}_4=-x_2-x_2^2$$

取

$$V=\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)+\frac{1}{3}(x_1^3+x_2^3)$$

则有

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\\ \dot{x}_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\-1&0&0&0\\0&-1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{\partial V}{\partial x_1}\\ \dfrac{\partial V}{\partial x_2}\\ \dfrac{\partial V}{\partial x_3}\\ \dfrac{\partial V}{\partial x_4}\end{pmatrix}$$

它是一个斜梯度系统，其函数 V 是一积分，又是一 Ляпунов 函数，故有

$$\dot{V}=0$$

而零解 $x_1=x_2=x_3=x_4=0$ 是稳定的。

§23.3 Hamilton 系统与梯度系统

本节讨论 Hamilton 系统可成为梯度系统和斜梯度系统的条件，并利用梯度系统和斜梯度系统的性质来研究 Hamilton 系统的积分和稳定性。

23.3.1 运动微分方程

Hamilton 系统的微分方程表示为

$$\dot{q}_s=\frac{\partial H}{\partial p_s},\dot{p}_s=-\frac{\partial H}{\partial q_s}\qquad(s=1,2,\cdots,n)\tag{23.3.1}$$

其中 $H=H(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})$。方程(23.3.1)可表示为

$$\dot{a}^\mu=\sum_{\nu=1}^{2n}\omega^{\mu\nu}\frac{\partial H}{\partial a^\nu}\qquad(\mu=1,2,\cdots,2n)\tag{23.3.2}$$

其中

$$\begin{aligned}&a^s=q_s,a^{n+s}=p_s\qquad(s=1,2,\cdots,n)\\&(\omega^{\mu\nu})=\begin{pmatrix}0_{n\times n}&1_{n\times n}\\-1_{n\times n}&0_{n\times n}\end{pmatrix}\end{aligned}\tag{23.3.3}$$

23.3.2 化成梯度系统

对 Hamilton 方程(23.3.2)，如果满足条件

$$\sum_{\nu=1}^{2n}\left(\omega^{\mu\nu}\frac{\partial^2 H}{\partial a^\rho\partial a^\nu}-\omega^{\rho\nu}\frac{\partial^2 H}{\partial a^\mu\partial a^\nu}\right)=0\qquad(\mu,\rho=1,2,\cdots,2n)\tag{23.3.4}$$

则它是一个梯度系统。此时，可求得势函数 $V=V(\boldsymbol{a})$，使得

$$\sum_{\nu=1}^{2n}\omega^{\mu\nu}\frac{\partial H}{\partial a^\nu}=-\frac{\partial V}{\partial a^\mu}\qquad(\mu=1,2,\cdots,2n)\tag{23.3.5}$$

当 $n=1$ 时，式(23.3.4)成为

$$\frac{\partial^2 H}{\partial(a^1)^2}+\frac{\partial^2 H}{\partial(a^2)^2}=0\tag{23.3.6}$$

23.3.3 稳定性

化成梯度系统后，如果势函数 V 能成为 Ляпунов 函数，便可利用 Ляпунов 定理研究系统零解的稳定性，或利用 Румянцев 定理研究部分变量稳定性。同时，可

利用梯度系统第三条性质和 Ляпунов 一次近似理论来研究零解的稳定性。

23.3.4 化成斜梯度系统

比较方程(23.3.2)与方程(23.1.3)，容易看出，Hamilton 系统必定是斜梯度系统。化成斜梯度系统后，可知能量函数 V 是系统的积分，进而，如果函数 V 是 Ляпунов 函数，则系统的零解是稳定的。

23.3.5 应用举例

例 1 Hamilton 系统为

$$H=pq$$

试将其化成梯度系统，并研究零解的稳定性。

解：方程(23.3.2)给出

$$\dot{a}^1=a^1,\dot{a}^2=-a^2$$

它是一个梯度系统，其势函数为

$$V=-\frac{1}{2}(a^1)^2+\frac{1}{2}(a^2)^2$$

按方程求$\dot{V}$，得

$$\dot{V}=-(a^1)^2-(a^2)^2$$

由 Румянцев 定理知，系统的零解 $a^1=a^2=0$ 相对部分变量 a^2 是稳定的，相对部分变量 a^1 是不稳定的[3]。

例 2 Hamilton 函数为

$$H=\frac{1}{2}(q^2+p^2)$$

试将其化成斜梯度系统，并研究零解的稳定性。

解：方程(23.3.2)给出

$$\begin{pmatrix}\dot{a}^1\\ \dot{a}^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{\partial H}{\partial a^1}\\ \dfrac{\partial H}{\partial a^2}\end{pmatrix}$$

其中 H 是积分，并且 H 是一 Ляпунов 函数，因此，零解 $a^1=a^2=0$ 是稳定的。

§ 23.4 一般完整系统与梯度系统

本节讨论一般完整系统可成为梯度系统和斜梯度系统的条件，并利用梯度系统和斜梯度系统的性质来研究完整系统的积分和稳定性。

23.4.1 运动微分方程

一般完整系统的微分方程表示为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial L}{\partial q_s}=Q_s \qquad (s=1,2,\cdots,n) \tag{23.4.1}$$

假设 Lagrange 函数 L 和非势广义力 Q_s 都不显含 t，即 $L=L(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$，$Q_s=Q_s(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$。为讨论方程(23.4.1)能否成为梯度系统，引进广义动量 p_s 和 Hamilton 函数 H，有

$$p_s=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s},H=\sum_{s=1}^{n}p_s\dot{q}_s-L \tag{23.4.2}$$

则方程(23.4.1)表示为一阶形式

$$\dot{q}_s=\frac{\partial H}{\partial p_s},\dot{p}_s=-\frac{\partial H}{\partial q_s}+\widetilde{Q}_s \qquad (s=1,2,\cdots,n) \tag{23.4.3}$$

其中

$$\widetilde{Q}_s(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})=Q_s(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})) \tag{23.4.4}$$

进而，将方程(23.4.3)表示为

$$\dot{a}^{\mu}=\sum_{\nu=1}^{2n}\omega^{\mu\nu}\frac{\partial H}{\partial a^{\nu}}+\Gamma_{\mu} \qquad (\mu=1,2,\cdots,2n) \tag{23.4.5}$$

其中

$$a^s=q_s,a^{n+s}=p_s,(\omega^{\mu\nu})=\begin{pmatrix}0_{n\times n} & 1_{n\times n}\\ -1_{n\times n} & 0_{n\times n}\end{pmatrix} \qquad (s=1,2,\cdots,n)$$
$$\Gamma_s=0,\Gamma_{n+s}=\widetilde{Q}_s(\boldsymbol{a}) \tag{23.4.6}$$

23.4.2 化成梯度系统

方程(23.4.5)一般不是一个梯度系统，仅在一定条件下才能成为梯度系统。对方程(23.4.5)，如果满足条件

$$\frac{\partial}{\partial a^{\rho}}\left(\sum_{\nu=1}^{2n}\omega^{\mu\nu}\frac{\partial H}{\partial a^{\nu}}+\Gamma_{\mu}\right)-\frac{\partial}{\partial a^{\mu}}\left(\sum_{\nu=1}^{2n}\omega^{\rho\nu}\frac{\partial H}{\partial a^{\nu}}+\Gamma_{\rho}\right)=0 \qquad (\mu,\rho=1,2,\cdots,2n) \tag{23.4.7}$$

则它是一个梯度系统。此时，可求得的势函数 $V=V(\boldsymbol{a})$，使得

$$\sum_{\nu=1}^{2n}\omega^{\mu\nu}\frac{\partial H}{\partial a^{\nu}}+\Gamma_{\mu}=-\frac{\partial V}{\partial a^{\mu}} \qquad (\mu=1,2,\cdots,2n) \tag{23.4.8}$$

注意到，如果条件(23.4.7)不满足，还不能断定它不是一个梯度系统，因为这依赖于方程(23.4.1)的一阶表示形式。在一阶表示(23.4.5)，(23.4.6)下，系统不是梯度系统；在另一种一阶表示下，系统可能是一个梯度系统。

23.4.3 稳定性

如果由式(23.4.8)求得势函数 V 可以成为 Ляпунов 函数，便可利用

Ляпунов 直接法研究完整系统零解的稳定性，或利用 Румянцев 定理研究系统部分变量稳定性。

由梯度系统第三条性质和 Ляпунов 一次近似理论可知，如果线性化系统的特征值全为负的，则零解是渐近稳定的；如果特征值有正的，则零解是不稳定的。

23.4.4 化成斜梯度系统

对方程(23.4.5)，如果存在某函数$\widetilde{H}$满足

$$\sum_{\nu=1}^{2n}\omega^{\mu\nu}\frac{\partial H}{\partial a^{\nu}}+\Gamma_{\mu}=\sum_{\nu=1}^{2n}\omega^{\mu\nu}\frac{\partial\widetilde{H}}{\partial a^{\nu}}\qquad(\mu=1,2,\cdots,2n)\tag{23.4.9}$$

则可化成斜梯度系统

$$\dot{a}^{\mu}=\sum_{\nu=1}^{2n}\omega^{\mu\nu}\frac{\partial\widetilde{H}}{\partial a^{\nu}}\qquad(\mu=1,2,\cdots,2n)\tag{23.4.10}$$

23.4.5 应用举例

例 1 二自由度完整系统的 Lagrange 函数和非势广义力分别为

$$L=\frac{1}{2}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2)+\frac{1}{2}(q_1^2+q_2^2),Q_1=\dot{q}_1^2,Q_2=\dot{q}_2^2$$

试将其化为梯度系统，并研究零解的稳定性。

解：令

$$a^1=q_1,a^2=q_2,a^3=\dot{q}_1,a^4=\dot{q}_2$$

则微分方程(23.4.5)给出

$$\dot{a}^1=a^3,\dot{a}^2=a^4,\dot{a}^3=a^1+(a^3)^2,\dot{a}^4=a^2+(a^4)^2$$

这是一个梯度系统。由式(23.4.8)可求得势函数

$$V=-a^1a^3-a^2a^4-\frac{1}{3}(a^3)^3-\frac{1}{3}(a^4)^3$$

它还不能成为 Ляпунов 函数。但是，方程的线性化系统有正实特征值，据 Ляпунов 一次近似理论知，零解 $a^1=a^2=a^3=a^4=0$ 是不稳定的。

例 2 单自由度系统为

$$L=\frac{1}{2}\dot{q}^2-\frac{3}{2}q^2,Q=-4\dot{q}$$

试将其化为梯度系统，并研究零解的稳定性。

解：微分方程为

$$\ddot{q}=-3q-4\dot{q}$$

若取

$$a^1=q, a^2=\dot{q}$$

则有

$$\dot{a}^1=a^2, \dot{a}^2=-3a^1-4a^2$$

它还不是一个梯度系统。现取

$$a^1=q, a^2=2q+\dot{q}$$

则有

$$\dot{a}^1=a^2-2a^1, \dot{a}^2=a^1-2a^2$$

这是一个梯度系统。梯度系统的势函数为

$$V=(a^1)^2+(a^2)^2-a^1a^2$$

它在 $a^1=a^2=0$ 的邻域内是正定的，可取为 Ляпунов 函数。按方程求$\dot{V}$，得

$$\dot{V}=-5(a^1)^2-5(a^2)^2+8a^1a^2$$

它在 $a^1=a^2=0$ 的邻域内是负定的。由 Ляпунов 定理知，零解 $a^1=a^2=0$ 是渐近稳定的。同时，由方程的两个特征值都是负实的，也可判断零解 $a^1=a^2=0$ 是渐近稳定的。

例 3 二自由度完整系统为[4]

$$L=\frac{1}{2}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2)+\frac{1}{2}(q_1^2+q_2^2)$$

$$Q_1=-2\dot{q}_2, Q_2=2\dot{q}_1$$

试将其化为斜梯度系统，并研究其积分。

解：令

$$p_1=\dot{q}_1+q_2, p_2=\dot{q}_2-q_1$$

则系统可化为 Hamilton 系统，Hamilton 函数为

$$H=\frac{1}{2}p_1^2+\frac{1}{2}p_2^2+p_2q_1-p_1q_2$$

这就是斜梯度系统了，而 Hamilton 函数 H 是系统的积分。

§23.5 Birkhoff 系统与梯度系统

本节讨论 Birkhoff 系统和广义 Birkhoff 系统可成为梯度系统和斜梯度系统的条件，并利用梯度系统和斜梯度系统的性质来研究系统的积分和稳定性。

23.5.1 运动微分方程

Birkhoff 方程有如下形式[5,6]

$$\dot{a}^{\mu}=\sum_{\nu=1}^{2n}\Omega^{\mu\nu}\left(\frac{\partial B}{\partial a^{\nu}}+\frac{\partial R_{\nu}}{\partial t}\right)\qquad(\mu=1,2,\cdots,2n)\tag{23.5.1}$$

其中

$$\begin{gathered}\sum_{\nu=1}^{2n}\Omega^{\mu\nu}\Omega_{\nu\rho}=\delta_{\rho}^{\mu}\\ \Omega_{\mu\nu}=\frac{\partial R_{\nu}}{\partial a^{\mu}}-\frac{\partial R_{\mu}}{\partial a^{\nu}}\end{gathered}\tag{23.5.2}$$

对自治情形，有

$$R_{\mu}=R_{\mu}(\boldsymbol{a}),B=B(\boldsymbol{a})$$

方程(23.5.1)给出

$$\dot{a}^{\mu}=\sum_{\nu=1}^{2n}\Omega^{\mu\nu}\frac{\partial B}{\partial a^{\nu}}\qquad(\mu=1,2,\cdots,2n)\tag{23.5.3}$$

一阶 Lagrange 系统的 Lagrange 函数为[3]

$$L=\sum_{s=1}^{k}A_{s}(t,\boldsymbol{q})\,\dot{q}_{s}-B(t,\boldsymbol{q})\tag{23.5.4}$$

当 A_s 和 B 不显含 t，且 $k=2n$ 时，取 $a^k=q_k$，则方程有形式

$$\sum_{\nu=1}^{2n}\left(\frac{\partial A_{\nu}}{\partial a^{\mu}}-\frac{\partial A_{\mu}}{\partial a^{\nu}}\right)\dot{a}^{\nu}-\frac{\partial B}{\partial a^{\mu}}=0\qquad(\mu=1,2,\cdots,2n)\tag{23.5.5}$$

它实际上就是 Birkhoff 方程。

广义 Birkhoff 系统的方程有如下形式[7]

$$\dot{a}^{\mu}=\sum_{\nu=1}^{2n}\Omega^{\mu\nu}\left(\frac{\partial B}{\partial a^{\nu}}+\frac{\partial R_{\nu}}{\partial t}-\Lambda_{\nu}\right)\qquad(\mu=1,2,\cdots,2n)\tag{23.5.6}$$

其中 $\Lambda_{\mu}=\Lambda_{\mu}(t,\boldsymbol{a})$ 为附加项。对自治情形，有

$$R_{\mu}=R_{\mu}(\boldsymbol{a}),B=B(\boldsymbol{a}),\Lambda_{\nu}=\Lambda_{\nu}(\boldsymbol{a})$$

则方程(23.5.6)成为

$$\dot{a}^{\mu}=\sum_{\nu=1}^{2n}\Omega^{\mu\nu}\frac{\partial B}{\partial a^{\nu}}-\widetilde{\Lambda}_{\mu}\qquad(\mu=1,2,\cdots,2n)\tag{23.5.7}$$

其中

$$\widetilde{\Lambda}_\mu = \sum_{\nu=1}^{2n} \Omega^{\mu\nu}\Lambda_\nu \tag{23.5.8}$$

23.5.2 化成梯度系统

Birkhoff 方程(23.5.3)和广义 Birkhoff 方程(23.5.7)一般都不是梯度系统的方程。

对方程(23.5.3),如果满足条件

$$\frac{\partial}{\partial a^\rho}\left(\sum_{\nu=1}^{2n}\Omega^{\mu\nu}\frac{\partial B}{\partial a^\nu}\right)-\frac{\partial}{\partial a^\mu}\left(\sum_{\nu=1}^{2n}\Omega^{\rho\nu}\frac{\partial B}{\partial a^\nu}\right)=0 \qquad (\mu,\rho=1,2,\cdots,2n) \tag{23.5.9}$$

则它是一个梯度系统。此时,可求得势函数 $V=V(\boldsymbol{a})$,使得

$$\sum_{\nu=1}^{2n}\Omega^{\mu\nu}\frac{\partial B}{\partial a^\nu}=-\frac{\partial V}{\partial a^\mu} \qquad (\mu=1,2,\cdots,2n) \tag{23.5.10}$$

对方程(23.5.7),如果满足条件

$$\frac{\partial}{\partial a^\rho}\left(\sum_{\nu=1}^{2n}\Omega^{\mu\nu}\frac{\partial B}{\partial a^\nu}-\widetilde{\Lambda}_\mu\right)-\frac{\partial}{\partial a^\mu}\left(\sum_{\nu=1}^{2n}\Omega^{\rho\nu}\frac{\partial B}{\partial a^\nu}-\widetilde{\Lambda}_\rho\right)=0 \qquad (\mu,\rho=1,2,\cdots,2n) \tag{23.5.11}$$

则它是一个梯度系统。此时,可求得势函数 $V=V(\boldsymbol{a})$,使得

$$\sum_{\nu=1}^{2n}\Omega^{\mu\nu}\frac{\partial B}{\partial a^\nu}-\widetilde{\Lambda}_\mu=-\frac{\partial V}{\partial a^\mu} \qquad (\mu=1,2,\cdots,2n) \tag{23.5.12}$$

23.5.3 稳定性

Birkhoff 系统化成梯度系统后,如果势函数能够成为 Ляпунов 函数,就可利用 Ляпунов 定理来研究系统零解的稳定性,或用 Румянцев 定理研究部分变量稳定性。

如果势函数不能成为 Ляпунов 函数,那么可利用梯度系统第三条性质以及 Ляпунов 一次近似理论来研究系统零解的稳定性。

23.5.4 化成斜梯度系统

Birkhoff 系统(23.5.3)是一个斜梯度系统。广义 Birkhoff 系统(23.5.7)一般不是斜梯度系统,如果存在函数$\widetilde{B}=\widetilde{B}(\boldsymbol{a})$,使得

$$\frac{\partial B}{\partial a^\mu}-\Lambda_\mu=\frac{\partial \widetilde{B}}{\partial a^\mu} \qquad (\mu=1,2,\cdots,2n) \tag{23.5.13}$$

则它是一个斜梯度系统。

23.5.5 应用举例

例 1 Birkhoff 系统为

$$R_1=\frac{1}{2}a^2,R_2=-\frac{1}{2}a^1,B=a^1a^2$$

试将其化为梯度系统和斜梯度系统，并研究积分和零解的稳定性。

解：方程(23.5.3)给出

$$\dot{a}^1=a^1,\dot{a}^2=-a^2$$

它是一个梯度系统，其势函数为

$$V=-\frac{1}{2}(a^1)^2+\frac{1}{2}(a^2)^2$$

按方程求$\dot{V}$，得

$$\dot{V}=-(a^1)^2-(a^2)^2$$

可见，V 相对变量 a^1 是负定的，相对变量 a^2 是正定的；而$\dot{V}$相对 a^1 是负定的，相对 a^2 也是负定的。由 Румянцев 定理知，系统零解 $a^1=a^2=0$ 相对变量 a^1 是不稳定的，而相对变量 a^2 是稳定的，并且是渐近稳定的。

这个 Birkhoff 系统是一个斜梯度系统，表示为

$$\begin{pmatrix}\dot{a}^1\\ \dot{a}^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{\partial V}{\partial a^1}\\ \dfrac{\partial V}{\partial a^2}\end{pmatrix}$$

其中函数 $V=a^1a^2=B$，它是系统的一个积分。

例 2 Birkhoff 系统为

$$R_1=\frac{1}{2}(a^2+1)^2,R_2=0,B=\frac{1}{2}(a^1)^2+\frac{1}{2}(a^2)^2+\frac{1}{3}(a^1)^3+\frac{1}{3}(a^2)^3$$

试将其化为梯度系统和斜梯度系统，并研究积分和零解的稳定性。

解：Birkhoff 方程(23.5.3)给出

$$\dot{a}^1=\frac{1}{a^2+1}[a^2+(a^2)^2]$$

$$\dot{a}^2=-\frac{1}{a^2+1}[a^1+(a^1)^2]$$

这不是一个梯度系统。这是一个斜梯度系统，其函数 $V=B$ 是积分，又是 Ляпунов 函数，因此，零解 $a^1=a^2=0$ 是稳定的。

例 3 Birkhoff 系统为

$$R_1=0,R_2=a^1,B=\frac{1}{2}(a^1)^2-\frac{1}{2}(a^2)^2+ta^1+2ta^2$$

试将其化为梯度系统,并研究解的稳定性。

解:方程(23.5.3)给出

$$\dot{a}^1=a^2-2t,\dot{a}^2=a^1+t$$

它有解

$$a_0^1=2-t,a_0^2=2t-1$$

作变换,令

$$a^1=a_0^1+\xi_1,a^2=a_0^2+\xi_2$$

则方程表示为

$$\dot{\xi}_1=\xi_2,\dot{\xi}_2=\xi_1$$

它是一个梯度系统,其势函数为

$$V=-\xi_1\xi_2$$

对 ξ_1,ξ_2 的方程,有正实的特征值,因此,零解 $\xi_1=\xi_2=0$,即解 $a_0^1=2-t,a_0^2=2t-1$ 是不稳定的。

例 4 广义 Birkhoff 系统为

$$R_1=a^2,R_2=0,B=\frac{1}{2}(a^2)^2-\frac{1}{2}(a^1)^2,\Lambda_1=-2a^2,\Lambda_2=a^1$$

试将其化为梯度系统,并研究零解的稳定性。

解:方程(23.5.7)给出

$$\dot{a}^1=a^2-a^1,\dot{a}^2=a^1-2a^2$$

这不是一个斜梯度系统,而是一个梯度系统。由式(23.5.12)可求得势函数为

$$V=\frac{1}{2}(a^1)^2+(a^2)^2-a^1a^2$$

它在 $a^1=a^2=0$ 的邻域内是正定的。按方程求 $\dot{V}$,得

$$\dot{V}=-2(a^1)^2-5(a^2)^2+6a^1a^2$$

它在 $a^1=a^2=0$ 的邻域内是负定的。取 V 为 Ляпунов 函数,由 Ляпунов 定理知,零解 $a^1=a^2=0$ 是渐近稳定的。

系统是线性的,特征方程表示为

$$\begin{vmatrix}\lambda+1 & -1\\ -1 & \lambda+2\end{vmatrix}=\lambda^2+3\lambda-1=0$$

它的两个特征值都是负的,因此,零解 $a^1=a^2=0$ 是渐近稳定的。

例 5 广义 Birkhoff 系统为

$$R_1=a^2,R_2=0,B=\frac{1}{2}(a^1)^2+\frac{1}{2}(a^2)^2,\Lambda_1=(a^1)^2,\Lambda_2=(a^2)^2$$

试将其化为斜梯度系统，并研究零解的稳定性。

解：式(23.5.13)给出

$$a^1-(a^1)^2=\frac{\partial\widetilde{B}}{\partial a^1},a^2-(a^2)^2=\frac{\partial\widetilde{B}}{\partial a^2}$$

它有解

$$\widetilde{B}=\frac{1}{2}(a^1)^2+\frac{1}{2}(a^2)^2-\frac{1}{3}(a^1)^3-\frac{1}{3}(a^2)^3$$

它在 $a^1=a^2=0$ 的邻域内是正定的。同时，$\widetilde{B}$是系统的积分，因此有

$$\dot{\widetilde{B}}=0$$

取$\widetilde{B}$为 Ляпунов 函数，由 Ляпунов 定理知，零解 $a^1=a^2=0$ 是稳定的。

§23.6 广义 Hamilton 系统与梯度系统

本节讨论广义 Hamilton 系统成为梯度系统和斜梯度系统的条件，并利用梯度系统和斜梯度系统的性质来研究广义 Hamilton 系统的积分和稳定性。

23.6.1 运动微分方程

广义 Hamilton 系统的微分方程为[8]

$$\dot{a}^i=\sum_{j=1}^{m}J_{ij}\frac{\partial H}{\partial a^j}\qquad(i=1,2,\cdots,m)\tag{23.6.1}$$

其中 $J_{ij}=J_{ij}(\boldsymbol{a})$满足

$$J_{ij}=-J_{ji}\tag{23.6.2}$$

$$\sum_{l=1}^{m}\left(J_{il}\frac{\partial J_{jk}}{\partial a^l}+J_{jl}\frac{\partial J_{ki}}{\partial a^l}+J_{kl}\frac{\partial J_{ij}}{\partial a^l}\right)=0\qquad(i,j,k=1,2,\cdots,m)$$

而 $H=H(\boldsymbol{a})$为 Hamilton 函数。

如果 $m=2n$，取

$$\begin{aligned}&J_{\mu\nu}=\omega^{\mu\nu}\\&(\omega^{\mu\nu})=\begin{pmatrix}0_{n\times n}&1_{n\times n}\\-1_{n\times n}&0_{n\times n}\end{pmatrix}\end{aligned}\tag{23.6.3}$$

其中

$$a^\mu=\begin{cases}q_\mu(\mu=1,2,\cdots,n)\\p_{\mu-n}(\mu=n+1,n+2,\cdots,2n)\end{cases}\tag{23.6.4}$$

当

$$\frac{\partial R_\mu}{\partial t}=\frac{\partial B}{\partial t}=0 \qquad (\mu=1,2,\cdots,2n) \tag{23.6.5}$$

时，Birkhoff 系统(23.5.1)成为一个广义 Hamilton 系统。

23.6.2 化成梯度系统

广义 Hamilton 系统在一定条件下可以成为梯度系统。对广义 Hamilton 系统(23.6.1)，如果满足条件

$$\frac{\partial}{\partial a^j}\left(\sum_{k=1}^{m} J_{ik}\frac{\partial H}{\partial a^k}\right)-\frac{\partial}{\partial a^i}\left(\sum_{k=1}^{m} J_{jk}\frac{\partial H}{\partial a^k}\right)=0 \qquad (i,j=1,2,\cdots,m) \tag{23.6.6}$$

则它是一个梯度系统。此时，可求得梯度系统的势函数 $V=V(\boldsymbol{a})$，使得

$$\sum_{j=1}^{m} J_{ij}\frac{\partial H}{\partial a^j}=-\frac{\partial V}{\partial a^i} \qquad (i=1,2,\cdots,m) \tag{23.6.7}$$

23.6.3 稳定性

利用梯度系统的第一条性质，如果广义 Hamilton 系统可成为梯度系统，而势函数可成为 Ляпунов 函数，那么可利用 Ляпунов 定理或 Румянцев 定理来研究系统的稳定性或部分变量稳定性。

利用梯度系统的第三条性质，如果线性化系统的特征值全为负实的，则由 Ляпунов 一次近似理论知，系统的零解是稳定的，并且是渐近稳定的；如果有正实值，则是不稳定的。

23.6.4 化成斜梯度系统

广义 Hamilton 系统(23.6.1)自然是斜梯度系统。Hamilton 函数是系统的积分。如果 Hamilton 函数成为 Ляпунов 函数，那么就可研究系统解的稳定性。

23.6.5 应用举例

例 1 广义 Hamilton 系统为

$$H=-a^1a^2-\frac{1}{2}(a^3)^2$$

$$(J_{ij})=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

试将其化为梯度系统和斜梯度系统，并研究系统的积分和零解的稳定性。

解：方程(23.6.1)给出

$$\dot{a}^1 = a^1 - a^3$$
$$\dot{a}^2 = -a^2 + a^3$$
$$\dot{a}^3 = a^2 - a^1$$

容易验证，它是一个梯度系统，其势函数为

$$V = -\frac{1}{2}(a^1)^2 + \frac{1}{2}(a^2)^2 + a^1 a^3 - a^2 a^3$$

它还不能成为 Ляпунов 函数，但系统有正实的特征值，因此，零解 $a^1 = a^2 = a^3 = 0$ 是不稳定的。这个系统是一个斜梯度系统，H 是一个积分。

例 2 广义 Hamilton 系统为

$$H = \frac{1}{2}(a^1)^2 + \frac{1}{2}(a^2)^2 + \frac{1}{2}(a^3)^2$$

$$(J_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

试将其化为梯度系统和斜梯度系统，并研究系统的积分和零解的稳定性。

解：显然，系统不是一个梯度系统，它是一个斜梯度系统。因 H 是积分，又 H 在 $a^1 = a^2 = a^3 = 0$ 的邻域内是正定的，取 H 为 Ляпунов 函数，据 Ляпунов 定理知，零解 $a^1 = a^2 = a^3 = 0$ 是稳定的。

梯度系统和斜梯度系统是数学系统，具有重要性质，这些性质，如积分、稳定性等都是力学的研究问题。本章讨论了约束力学系统与梯度系统和斜梯度系统的联系。Lagrange 系统(23.2.4)，Hamilton系统(23.3.1)、Birkhoff 系统(23.5.3)、广义 Hamilton 系统(23.6.1)等都是斜梯度系统。这些系统中的函数 H，B 是系统的积分。如果它们能够成为 Ляпунов 函数，那么就知道系统的零解是稳定的。一般完整系统、广义 Birkhoff 系统，一般来说都不是斜梯度系统。在一些限制下，Lagrange 系统、Hamilton 系统、一般完整系统、Birkhoff 系统、广义 Birkhoff 系统、广义 Hamilton 系统等可以成为梯度系统。如果梯度系统的势函数可以成为 Ляпунов 函数，就可研究系统的稳定性。同时，如果梯度系统的线性化系统的特征值全是负实的，则零解是渐近稳定的；如果有正实的特征值，则是不稳定的。

思考题

23.1 Lagrange 系统必是一个斜梯度系统,但不一定是一个梯度系统。对否?

23.2 对一般完整系统

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial L}{\partial q_s}=Q_s \qquad (s=1,2,\cdots,n)$$

如果 Q_s 满足

$$Q_s=\frac{\partial U}{\partial q_s}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_s},U=\sum_{s=1}^{n}A_s(t,\boldsymbol{q})\dot{q}_s+B(t,\boldsymbol{q})$$

则它是一个斜梯度系统。这个结论对否?

23.3 Birkhoff 系统是一个斜梯度系统。对否?

23.4 广义 Birkhoff 系统是一个斜梯度系统。对否?

23.5 广义 Hamilton 系统是一个斜梯度系统,但不一定是一个梯度系统。对否?

习题

23.1 二自由度完整力学系统为

$$L=\frac{1}{2}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2)+\frac{1}{2}(q_1^2+q_2^2),Q_1=\dot{q}_2,Q_2=\dot{q}_1$$

试将其化为梯度系统,并研究其零解的稳定性。

23.2 二自由度 Hamilton 系统为

$$H=\frac{1}{2}(p_1^2+p_2^2)-\frac{1}{2}(q_1^2+q_2^2)$$

试将其化为梯度系统和斜梯度系统,并研究系统的积分和零解的稳定性。

23.3 广义 Birkhoff 系统为

$$R_1=a^2,R_2=0,B=2a^1a^2,\Lambda_1=0,\Lambda_2=3a^1$$

试将其化为梯度系统,并研究零解的稳定性。

23.4 广义 Birkhoff 系统为

$$R_1=a^2,R_2=0,B=\frac{1}{2}(a^1)^2,\Lambda_1=a^1+(a^2)^2,\Lambda_2=0$$

试将其化为梯度系统,并研究其零解的稳定性。

23.5 广义 Birkhoff 系统为

$$R_1=a^2,R_2=0,B=a^1a^2,\Lambda_1=-(a^2)^2,\Lambda_2=2a^1-(a^1)^2$$

试将其化为梯度系统，并研究零解的稳定性。

23.6 广义 Hamilton 系统为

$$H=\frac{1}{2}(a^1)^2+\frac{1}{2}(a^3)^2$$

$$(J_{ij})=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

试研究零解的稳定性。

参考文献

[1] Hirsch MW, Smale S, Devaney RL. Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos[M]. Singapore: Elsevier, 2008.

[2] Mc Lachlan RI, Quispel GRW, Robidoux N. Geometric integration using discrete gradients. [J]. Phil. Tran R Soc Lond A, 1999, 357: 1021-1045.

[3] 梅凤翔. 关于梯度系统[J]. 力学与实践, 2012, 34(1): 89-90.

[4] 梅凤翔，吴惠彬. 微分方程的分析力学方法[M]. 北京：科学出版社, 2012.

[5] Santilli RM. Foundations of Theoretical Mechanics Ⅱ [M]. New York: Springer-Verlag, 1983.

[6] 梅凤翔，史荣昌，张永发，吴惠彬. Birkhoff 系统动力学[M]. 北京：北京理工大学出版社, 1996.

[7] Mei FX. The Noether's theory of Birkhoffian systems [J]. Science in China, Serie A, 1993, 36: 1456-1467.

[8] 李继彬，赵晓华，刘正荣. 广义哈密顿系统的理论及其应用[M]. 北京：科学出版社, 1994.

24

动力学逆问题

Newton 根据行星运动的 Kepler 三定律导出了他的万有引力定律，为 Newton 力学奠定了基础。这是最古老、最著名的动力学逆问题。在刚体动力学、变质量体动力学、分析动力学、转子动力学、结构动力学、弹性体动力学中，都有各种各样的逆问题。随着科学技术的发展，动力学逆问题的提法也在不断扩充与完善，直到 20 世纪六七十年代，动力学逆问题才有了一般提法。专著[1,2]对动力学逆问题给出了较全面、系统的论述。

§24.1 完整系统

本节讨论完整力学系统的各类动力学逆问题，包括广义坐标中 Lagrange 方程的建立、按给定的一个积分确定广义力、Noether 对称性与动力学逆问题、Poisson 方法与动力学逆问题等。

24.1.1 广义坐标中 Lagrange 方程的建立

组建力学系统在广义坐标中的方程，使得按给定性质的运动是系统的一个可能的运动。

逆问题的提法如下：研究一力学系统，其动力学普遍方程，即 d'Alembert-Lagrange 原理有如下形式

$$\sum_{s=1}^{n}\left(Q_s+\frac{\partial T}{\partial q_s}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}\right)\delta q_s=0 \tag{24.1.1}$$

其中 q_s 为广义坐标；T,Q_s 分别为考虑到事先加在系统上的完整约束而计算出的动能和广义力。要求按给定性质

$$\Omega:\omega_\mu(t,\boldsymbol{q})=0 \qquad (\mu=1,2,\cdots,m;m\leqslant n) \tag{24.1.2}$$

的运动是系统的一个可能运动，其中 ω_μ 为对所有 $t\geqslant t_0$ 在某域 $G\{\boldsymbol{q}\}$ 上的独立，有界，连续可微函数，并要求组建广义坐标中的方程。

在组建运动微分方程时，式(24.1.2)应作为补充约束来研究。因此，无论相应代表点沿流形 Ω 的运动，还是在流形 Ω 之外的运动，广义速度满足条件

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial\omega_\mu}{\partial q_s}\dot{q}_s+\frac{\partial\omega_\mu}{\partial t}=\Phi_\mu(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{q},t)\qquad(\mu=1,2,\cdots,m)\tag{24.1.3}$$

式中，**Еругин 函数** $\Phi_\mu(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{q},t)$是任意函数，而当满足条件(24.1.2)时它们为零。

苏联力学家 Еругин НП 在研究按给定积分曲线构造微分方程组的所有集合时，引进了一个函数[3]，文献[1]称之为 Еругин 函数。当给定积分是通积分时，这个函数简单地取为零；当给定积分是特殊积分时，这个函数在积分流形上变为零，但仍然是任意的。

下面导出问题(24.1.1)，(24.1.2)的运动方程。约束(24.1.2)加在虚位移 δq_s 上的限制为

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial\omega_\mu}{\partial q_s}\delta q_s=0\qquad(\mu=1,2,\cdots,m)\tag{24.1.4}$$

假设由式(24.1.4)可将不独立的变分 $\delta q_\mu(\mu=1,2,\cdots,m)$用独立的变分 $\delta q_\rho(\rho=m+1,m+2,\cdots,n)$表示出来，记作

$$\delta q_\mu=\sum_{\rho=m+1}^{n}C_{\mu\rho}\delta q_\rho\qquad(\mu=1,2,\cdots,m)\tag{24.1.5}$$

将式(24.1.5)代入式(24.1.1)，并注意到 δq_ρ 的独立性，得到

$$Q_\rho+\frac{\partial T}{\partial q_\rho}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_\rho}+\sum_{\mu=1}^{m}\Big(Q_\mu+\frac{\partial T}{\partial q_\mu}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_\mu}\Big)C_{\mu\rho}=0\qquad(\rho=m+1,m+2,\cdots,n)\tag{24.1.6}$$

这样，问题的运动方程就由式(24.1.6)和式(24.1.3)来给出。

所得到的方程允许系统按给定性质 Ω 而运动，并且仅当初始条件 $t=t_0$，$\boldsymbol{q}=\boldsymbol{q}_0$ 满足条件

$$\omega_\mu(t_0,\boldsymbol{q}_0)=0\qquad(\mu=1,2,\cdots,m)\tag{24.1.7}$$

时，这个运动才存在。自然可假设条件(24.1.7)实际上不满足。因此，要求当系统有对条件(24.1.7)的初始偏离时，相对给定性质(24.1.2)是稳定的，或渐近稳定的。这个要求可用来选取尚未确定的函数 Φ_μ。

例 1 质量为 m 的质点在重力作用下在铅垂平面 Oxy 上运动，其中轴 Oy 铅垂向上，要求按给定性质

$$\omega=\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}-1=0\tag{a}$$

的运动是一个可能运动，其中 a,b 为常数。试组建问题的运动微分方程。

解:d'Alembert-Lagrange 原理(24.1.1)给出

$$(-m\ddot{x})\delta x+(-m\ddot{y}-mg)\delta y=0$$

式(24.1.4)给出

$$\frac{y}{b^2}\delta y-\frac{x}{a^2}\delta x=0$$

消去 δy,得

$$\left\{-m\ddot{x}+(-m\ddot{y}-mg)\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y}\right\}\delta x=0$$

由 δx 任意,得

$$m\ddot{x}+(m\ddot{y}+mg)\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y}=0 \tag{b}$$

式(24.1.3)给出

$$\frac{y}{b^2}\dot{y}-\frac{x}{a^2}\dot{x}=\Phi(\omega,x,y,t) \tag{c}$$

式(b),(c)就是问题的解。如果限于沿曲线(a)的运动,则有 $\Phi=0$。

24.1.2 按给定的一个积分确定广义力

在 Whittaker ET(1873—1956)的经典著作中[4],提到 Bertrand J(1822—1900)于 1852 年得到的一个定理:已知系统的一个第一积分,便可确定作用在系统上的力。假设力仅依赖于坐标,而不依赖于速度。这是有关动力系统积分的一个重要性质,也是一个重要的动力学逆问题。Whittaker 指出:"但是,这个积分不能随意选取,而必须满足某些条件。"[4]

研究完整力学系统,其位形由 n 个广义坐标 $q_s(s=1,2,\cdots,n)$ 来确定。假设已知系统动能,表示为

$$T=\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}A_{sk}(t,\boldsymbol{q})\,\dot{q}_s\,\dot{q}_k+\sum_{s=1}^{n}B_s(t,\boldsymbol{q})\,\dot{q}_s+T_o(t,\boldsymbol{q})$$

系统的运动微分方程有如下形式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_s}-\frac{\partial T}{\partial q_s}=Q_s\qquad(s=1,2,\cdots,n) \tag{24.1.8}$$

其展开式为

$$\sum_{k=1}^{n}A_{sk}\ddot{q}_k=-\sum_{k=1}^{n}\sum_{r=1}^{n}[k,r;s]\,\dot{q}_k\dot{q}_r+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial B_k}{\partial q_s}-\frac{\partial B_s}{\partial q_k}\right)\dot{q}_k-$$

$$\frac{\partial B_s}{\partial t}+\frac{\partial T_o}{\partial q_s}-\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial A_{sk}}{\partial t}\,\dot{q}_k+Q_s$$

其中

$$[k,r;s]=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial A_{ks}}{\partial q_r}+\frac{\partial A_{rs}}{\partial q_k}-\frac{\partial A_{kr}}{\partial q_s}\right)$$

为动能二次型系数 A_{ks} 的第一类 Christoffel 记号。于是,可解出所有广义加速度

$$\ddot{q}_l=\sum_{s=1}^{n}\frac{\Delta_{sl}}{\Delta}\left\{-\sum_{k=1}^{n}\sum_{r=1}^{n}[k,r;s]\dot{q}_k\dot{q}_r+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial B_k}{\partial q_s}-\frac{\partial B_s}{\partial q_k}\right)\dot{q}_k+\right.$$
$$\left.Q_s-\frac{\partial B_s}{\partial t}+\frac{\partial T_o}{\partial q_s}-\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial A_{sk}}{\partial t}\dot{q}_k\right\}\quad(l=1,2,\cdots,n)\qquad(24.1.9)$$

其中 $\Delta=\det(A_{sk})\neq0$;Δ_{sl} 为 Δ 元素 (s,l) 的代数余子式。

假设系统有一个第一积分

$$\omega=\omega(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)=\text{const.}\qquad(24.1.10)$$

将其对 t 求导数,得到

$$\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial\omega}{\partial q_l}\dot{q}_l+\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial\omega}{\partial\dot{q}_l}\ddot{q}_l+\frac{\partial\omega}{\partial t}=0$$

将式(24.1.9)代入上式,消去 $\ddot{q}_l$,得到

$$\sum_{s=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\frac{\Delta_{sl}}{\Delta}\frac{\partial\omega}{\partial\dot{q}_l}Q_s+\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial\omega}{\partial q_l}\dot{q}_l+\frac{\partial\omega}{\partial t}+\sum_{s=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial\omega}{\partial\dot{q}_l}\frac{\Delta_{sl}}{\Delta}\left\{-\sum_{s=1}^{n}\sum_{r=1}^{n}[k,r;s]\dot{q}_k\dot{q}_r+\right.$$
$$\left.\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial B_k}{\partial q_s}-\frac{\partial B_s}{\partial q_k}\right)\dot{q}_k+\frac{\partial T_0}{\partial q_s}-\frac{\partial B_s}{\partial t}-\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial A_{sk}}{\partial t}\dot{q}_k\right\}=0$$
$$(24.1.11)$$

将上式简写成

$$\sum_{s=1}^{n}a_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})Q_s+b(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})=0\qquad(24.1.12)$$

其中

$$a_s=\sum_{l=1}^{n}\frac{\Delta_{sl}}{\Delta}\frac{\partial\omega}{\partial\dot{q}_l}$$

$$b=\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial\omega}{\partial q_l}\dot{q}_l+\frac{\partial\omega}{\partial t}+\sum_{s=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial\omega}{\partial\dot{q}_l}\frac{\Delta_{sl}}{\Delta}\left\{-\sum_{k=1}^{n}\sum_{r=1}^{n}[k,r;s]\dot{q}_k\dot{q}_r+\right.$$
$$\left.\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial B_k}{\partial q_s}-\frac{\partial B_s}{\partial\dot{q}_k}\right)\dot{q}_k+\frac{\partial T_0}{\partial q_s}-\frac{\partial B_s}{\partial t}-\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial A_{sk}}{\partial t}\dot{q}_k\right\}$$

现在假设广义力 $Q_s(s=1,2,\cdots,n)$ 不依赖于广义速度 $\dot{\boldsymbol{q}}$。关系式(24.1.12)对出现于其中任意独立的量应是一个恒等式。因此,它对任意一个 $\dot{q}_k(k=1,2,\cdots,n)$ 的偏导数应等于零。于是,得到

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial a_s}{\partial\dot{q}_k}Q_s+\frac{\partial b}{\partial\dot{q}_k}=0\qquad(k=1,2,\cdots,n)\qquad(24.1.13)$$

解方程组(24.1.13),便有可能求出广义力 Q_s。于是,有

命题1 若已知完整系统(24.1.8)的结构,但不知道广义力 $Q_s(s=1,2,\cdots,n)$。假设 Q_s 不依赖于广义速度。当已知第一积分(24.1.10)时,系统的广义力 Q_s 由式(24.1.13)来确定。

这个命题1就是 Bertrand 定理。根据这个定理,只要给出一个第一积分,在确定的条件下就足以求得广义力。

上述定理可推广到积分为特殊积分的情形。设方程(24.1.8)有一个特殊积分

$$\omega(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)=a \tag{24.1.14}$$

其中 a 为某固定常数。将式(24.1.14)对 t 求导数,并引进 Еругин 函数 Φ,则有

$$\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial\omega}{\partial q_l}\dot{q}_l+\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial\omega}{\partial\dot{q}_l}\ddot{q}_l+\frac{\partial\omega}{\partial t}=\Phi(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t) \tag{24.1.15}$$

其中 Еругин 函数 Φ 除去集合

$$\Omega\{\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t\,|\,\omega(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)=a\}$$

之外处处任意,而在 Ω 上变为零。类似于式(24.1.12),此时有

$$\sum_{s=1}^{n}a_s(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)Q_s+b_s(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)-\Phi(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)=0 \tag{24.1.16}$$

现在假设广义力 Q_s 不依赖于广义速度 $\dot{\boldsymbol{q}}$。关系式(24.1.16)对出现于其中任意独立的量应是一个恒等式。因此,它对任意一个 $\dot{q}_k(k=1,2,\cdots,n)$ 的偏导数应等于零。于是,得到

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial a_s}{\partial\dot{q}_k}Q_s+\frac{\partial b}{\partial\dot{q}_k}-\frac{\partial\Phi}{\partial\dot{q}_k}=0\qquad(k=1,2,\cdots,n) \tag{24.1.17}$$

解代数方程组(24.1.17),便有可能确定广义力 Q_s。于是,有

命题2 若已知完整系统(24.1.8)的结构,但不知道广义力 $Q_s(s=1,2,\cdots,n)$。假设 Q_s 不依赖于广义速度。当已知积分为特殊积分(24.1.14)时,广义力 Q_s 由方程(24.1.17)确定。

命题2已由文献[1]给出。

例2 已知三自由度系统的动能为

$$T=\frac{1}{2}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2+\dot{q}_3^2)$$

系统有一个第一积分

$$\omega=\frac{1}{2}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2+\dot{q}_3^2)+q_1q_2=\text{const.}$$

试用 Bertrand 定理求广义力 $Q_s(s=1,2,3)$。

解:假设待求广义力不依赖于广义速度。由动能表达式得

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{vmatrix}$$

因此,有

$$a_1=\sum_{l=1}^{3}\frac{\Delta_{1l}}{\Delta}\frac{\partial\omega}{\partial\dot{q}_l}=\frac{\Delta_{11}}{\Delta}\frac{\partial\omega}{\partial\dot{q}_1}=\dot{q}_1$$

$$a_2=\dot{q}_2,a_3=\dot{q}_3,b=\dot{q}_1q_2+\dot{q}_2q_1$$

式(24.1.12)给出

$$\dot{q}_1Q_1+\dot{q}_2Q_2+\dot{q}_3Q_3+\dot{q}_1q_2+\dot{q}_2q_1=0$$

式(24.1.13)给出

$$Q_1+q_2=0,Q_2+q_1=0,Q_3=0$$

于是有

$$Q_1=-q_2,Q_2=-q_1,Q_3=0$$

24.1.3 Noether 对称性与动力学逆问题

取时间和坐标的无限小变换

$$t^*=t+\varepsilon\xi_0(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}),q_s^*(t^*)=q_s(t)+\varepsilon\xi_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) \tag{24.1.18}$$

一般完整系统(24.1.8)的 Noether 等式表示为

$$L\dot{\xi}_0+\frac{\partial L}{\partial t}\xi_0+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial q_s}\xi_s+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_s}(\dot{\xi}_s-\dot{q}_s\dot{\xi}_0)+$$

$$\sum_{s=1}^{n}Q_s(\xi_s-\dot{q}_s\xi_0)+\dot{G}_N=0 \tag{24.1.19}$$

其中 ξ_0,ξ_s 为无限小生成元;G_N 为规范函数。与 Noether 等式(24.1.19)相应的 Killing 方程为

$$\frac{\partial L}{\partial t}\xi_0+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial q_s}\xi_s+\left(L-\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_s}\dot{q}_s\right)\left(\frac{\partial\xi_0}{\partial t}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\xi_0}{\partial q_k}\dot{q}_k\right)+$$

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_s}\left(\frac{\partial\xi_s}{\partial t}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\xi_s}{\partial q_k}\dot{q}_k\right)+\sum_{s=1}^{n}Q_s(\xi_s-\dot{q}_s\xi_0)=-\frac{\partial G_N}{\partial t}-\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial G_N}{\partial q_k}\dot{q}_k \tag{24.1.20}$$

$$\left(L-\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_s}\dot{q}_k\right)\frac{\partial\xi_0}{\partial\dot{q}_k}+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_s}\frac{\partial\xi_s}{\partial\dot{q}_k}=-\frac{\partial G_N}{\partial\dot{q}_k}\qquad(k=1,2,\cdots,n)$$

Noether 定理指出,如果无限小变换的生成元 ξ_0,ξ_s 和规范函数 G_N 满足

Noether 等式(24.1.19)或满足 Killing 方程(24.1.20),则系统存在 Noether 守恒量

$$I_N = L\xi_0 + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) + G_N = \text{const.} \tag{24.1.21}$$

Noether 逆定理指出,如果已知一个积分,便可找到与之相应的对称变换。假设一般完整系统(24.1.8)有一个第一积分

$$I(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)=C \tag{24.1.22}$$

则相应的无限小生成元由下式确定

$$\bar{\xi}_s = \sum_{k=1}^{n} \tilde{h}_{sk} \frac{\partial I}{\partial \dot{q}_k} \tag{24.1.23}$$

$$\xi_0 = \frac{1}{L}\left(I - \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\bar{\xi}_s - G_N\right) \tag{24.1.24}$$

其中

$$\bar{\xi}_s=\xi_s-\dot{q}_s\xi_0 \tag{24.1.25}$$

$$\tilde{h}_{sk}h_{kr}=\delta_s^r, h_{sk}=\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_s \partial \dot{q}_k} \tag{24.1.26}$$

根据 Noether 定理和 Noether 逆定理,可提出如下动力学逆问题:根据形如

$$\omega(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)=C \tag{24.1.27}$$

的给定运动性质以及 Killing 方程(24.1.20)来构造系统的 Lagrange 函数 L 和广义力 Q_s 以及无限小生成元 ξ_0,ξ_s 和规范函数 G_N。

为解上述逆问题,首先,取积分(24.1.27)为 Noether 守恒量,即令

$$L\xi_0 + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) + G_N = \omega(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t) \tag{24.1.28}$$

然后,按式(24.1.23)和式(24.1.24)建立生成元 ξ_0,ξ_s 与 Lagrange 函数 L 以及规范函数 G_N 的关系。最后,利用 Noether 等式或 Killing 方程组成关于 Lagrange函数的偏微分方程组,并求解。容易看出,逆问题的解是一个解集。在具体应用时,上述步骤亦可调整。

例 3 单自由度 Lagrange 系统有一个第一积分

$$\omega=-\frac{t^2}{2}\left(\frac{t}{3}q^6+q\dot{q}+t\dot{q}^2\right)=\text{const.}$$

试确定系统的 Lagrange 函数 L 以及无限小变换的生成元 ξ_0,ξ 和规范函数 G_N。

解:假设待求 Lagrange 函数有如下形式

$$L=\varphi(t)\dot{q}^2+U(t,q)$$

并设无限小生成元不依赖于$\dot{q}$，其形式为

$$\xi_0=\xi_0(t,q),\xi=\xi(t,q)$$

在这些假设下，Killing 方程(24.1.20)给出

$$\left(\varphi\dot{q}^2+\frac{\partial U}{\partial t}\right)\xi_0+\frac{\partial U}{\partial q}\xi+(U-\varphi\dot{q}^2)\left(\frac{\partial \xi_0}{\partial t}+\frac{\partial \xi_0}{\partial q}\dot{q}\right)+2\varphi\dot{q}\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}+\frac{\partial \xi}{\partial q}\dot{q}\right)=0$$

比较$\dot{q}$同次幂系数，得到

$$\begin{aligned}&\frac{\partial U}{\partial t}\xi_0+\frac{\partial U}{\partial q}\xi+U\frac{\partial \xi_0}{\partial t}=0\\&U\frac{\partial \xi_0}{\partial q}+2\varphi\frac{\partial \xi}{\partial t}=0\\&\varphi\xi_0-\varphi\frac{\partial \xi_0}{\partial t}+2\varphi\frac{\partial \xi}{\partial q}=0\\&\varphi\frac{\partial \xi_0}{\partial q}=0\end{aligned}\tag{a}$$

由第二和第四个方程知

$$\xi_0=\xi_0(t),\xi=\xi(q)$$

式(24.1.28)给出

$$(\varphi\dot{q}^2+U)\xi_0+2\varphi\dot{q}(\xi-\dot{q}\xi_0)+G_N=-\frac{t^2}{2}\left(\frac{t}{3}q^6+q\dot{q}+t\dot{q}^2\right)$$

取

$$G_N=0$$

则有

$$(\varphi\dot{q}^2+U)\xi_0+2\varphi\dot{q}(\xi-\dot{q}\xi_0)=-\frac{t^2}{2}\left(\frac{t}{3}q^6+q\dot{q}+t\dot{q}^2\right)$$

比较$\dot{q}$同次幂系数，得到

$$\begin{aligned}&U\xi_0+\frac{t^3}{6}q^6=0\\&2\varphi\xi+\frac{t^2}{2}q=0\\&\varphi\xi_0-\frac{t^3}{2}=0\end{aligned}\tag{b}$$

式(a)，(b)有如下解

$$\xi_0=t,\xi=-\frac{1}{2}q,\varphi=\frac{1}{2}t^2,U=-\frac{1}{6}t^2q^6$$

于是得到一个可能的 Lagrange 函数[5]

$$L=\frac{1}{2}t^2\left(\dot{q}^2-\frac{1}{3}q^6\right)$$

例 4 已知二自由度非保守系统的一个积分

$$\omega=\dot{q}_2-q_1=\text{const.}$$

试利用 Noether 对称性求系统的 Lagrange 函数 L，广义力 Q_1，Q_2 以及无限小变换的生成元 ξ_0，ξ_1，ξ_2 和规范函数 G_N。

解：式(24.1.23)给出

$$\bar{\xi}_1=\tilde{h}_{11}\frac{\partial\omega}{\partial\dot{q}_1}+\tilde{h}_{12}\frac{\partial\omega}{\partial\dot{q}_2}=\tilde{h}_{12}$$

$$\bar{\xi}_2=\tilde{h}_{21}\frac{\partial\omega}{\partial\dot{q}_1}+\tilde{h}_{22}\frac{\partial\omega}{\partial\dot{q}_2}=\tilde{h}_{22}$$

式(24.1.28)给出

$$L\xi_0+\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_1}\bar{\xi}_1+\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_2}\bar{\xi}_2+G_N=\dot{q}_2-q_1 \tag{a}$$

取

$$\tilde{h}_{12}=0,\tilde{h}_{22}=1$$

则有

$$\bar{\xi}_1=0,\bar{\xi}_2=1$$

不妨取

$$\xi_0=\xi_1=0,\xi_2=1$$

将其代入式(a)，得

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_2}+G_N=\dot{q}_2-q_1$$

取

$$G_N=-q_1$$

则有

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_2}=\dot{q}_2$$

积分得

$$L=\frac{1}{2}\dot{q}_2^2+f(q_1,q_2,\dot{q}_1) \tag{b}$$

Killing 方程(24.1.20)给出

$$\frac{\partial L}{\partial q_2}+Q_2=\dot{q}_1$$

考虑到式(b),有

$$\frac{\partial f}{\partial q_2}+Q_2=\dot{q}_1$$

取

$$Q_2=\dot{q}_1 \tag{c}$$

则

$$f=f(q_1,\dot{q}_1)$$

于是,Lagrange 函数的集合为

$$L=\frac{1}{2}\dot{q}_2^2+f(q_1,\dot{q}_1) \tag{d}$$

由式(c),(d)给出的运动微分方程为

$$\begin{aligned}&\ddot{q}_2=\dot{q}_1\\&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial f}{\partial\dot{q}_1}-\frac{\partial f}{\partial q_1}=Q_1\end{aligned} \tag{e}$$

为最终求得 f 和 Q_1,尚需补充另一个积分。假设这个积分有如下形式

$$\omega=\dot{q}_1\exp t-q_1\exp t=\text{const.}$$

将其对 t 求导数,得到

$$\ddot{q}_1-q_1=0 \tag{f}$$

对比方程(f)与(e),可求得

$$f=\frac{1}{2}\dot{q}_1^2+\frac{1}{2}q_1^2,Q_1=0$$

这样,可取

$$L=\frac{1}{2}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2)+\frac{1}{2}q_1^2,Q_1=0,Q_2=\dot{q}_1 \tag{g}$$

与此相应的方程就是著名的 Whittaker 方程。这只是问题的一个可能解。

24.1.4 Poisson 方法与动力学逆问题

完整保守系统的正则方程为

$$\dot{q}_s=\frac{\partial H}{\partial p_s},\dot{p}_s=-\frac{\partial H}{\partial q_s}\qquad(s=1,2,\cdots,n) \tag{24.1.29}$$

而非保守系统的正则方程有如下形式

$$\dot{q}_s=\frac{\partial H}{\partial p_s},\dot{p}_s=-\frac{\partial H}{\partial q_s}+\widetilde{Q}_s(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},t) \tag{24.1.30}$$

其中$\widetilde{Q}_s$ 为正则变量表示的非势广义力,有

$$\widetilde{Q}_s(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},t)=Q_s(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},t),t) \tag{24.1.31}$$

对方程(24.1.29)，$I=I(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},t)$是第一积分的充分必要条件为

$$\frac{\partial I}{\partial t}+(I,H)=0 \tag{24.1.32}$$

对方程(24.1.30)，$I=I(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},t)$是第一积分的充分必要条件为

$$\frac{\partial I}{\partial t}+(I,H)+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial I}{\partial p_s}\widetilde{Q}_s=0 \tag{24.1.33}$$

式(24.1.32)，式(24.1.33)称为 Poisson 条件，(，)为 **Poisson 括号**。

与 Poisson 条件(24.1.32)相关的正问题是指，在已知系统的 Hamilton 函数 H 下，用式(24.1.32)来判断或确定积分 I。与 Poisson 条件(24.1.33)相关的正问题是指，在已知系统的 Hamilton 函数 H 和广义力 $\widetilde{Q}_s$ 下，用式(24.1.33)来判断或确定积分 I。

对系统(24.1.29)，与 Poisson 条件相关的动力学逆问题提法如下：已知独立积分的总合

$$\omega_\mu(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},t)=c_\mu \qquad (\mu=1,2,\cdots,m;m\leqslant n) \tag{24.1.34}$$

根据 Poisson 条件(24.1.32)来求 Hamilton 函数 H。

为解上述逆问题，令 $I_\mu=\omega_\mu$，Poisson 条件(24.1.32)成为

$$\frac{\partial\omega_\mu}{\partial t}+(\omega_\mu,H)=0 \qquad (\mu=1,2,\cdots,m) \tag{24.1.35}$$

解此偏微分方程组就可确定待求的 Hamilton 函数 H。由方程(24.1.35)来求 Hamilton 函数 H，一般来说没有单一解。因此，常常通过施加一些补充条件来求解，或者仅求方程的特解。

对一般完整系统(24.1.30)，与 Poisson 条件相关的逆问题提法如下：根据已知运动性质(24.1.34)来确定系统的 Hamilton 函数 H 和非势广义力 $\widetilde{Q}_s$。

为解上述逆问题，令 $I_\mu=\omega_\mu$，Poisson 条件(24.1.33)成为

$$\frac{\partial\omega_\mu}{\partial t}+(\omega_\mu,H)+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial\omega_\mu}{\partial p_s}\widetilde{Q}_s=0 \qquad (\mu=1,2,\cdots,m) \tag{24.1.36}$$

由此有可能求得 H 和 $\widetilde{Q}_s$。这类逆问题也没有单一解。

例 5 已知单自由度保守系统有积分

$$\omega=\frac{1}{6}t^3q^6+\frac{1}{2}qp+\frac{1}{2t}p^2=\text{const.}$$

试求系统的 Hamilton 函数 H。

解：方程(24.1.35)给出

$$\frac{1}{2}t^2q^6-\frac{1}{2t^2}p^2+\left(t^2q^5+\frac{1}{2}p\right)\frac{\partial H}{\partial p}-\left(\frac{1}{2}q+\frac{1}{t}p\right)\frac{\partial H}{\partial q}=0$$

如果要求

$$\frac{\partial H}{\partial p}=\frac{p}{t^2} \tag{a}$$

并设

$$\frac{1}{2}q+\frac{1}{t}p\neq 0$$

则有

$$\frac{\partial H}{\partial q}=t^2 q^5$$

积分得

$$H=\frac{1}{6}t^2 q^6+P(p,t) \tag{b}$$

由式(a),(b)得

$$P(p,t)=\frac{1}{2t^2}p^2$$

于是有

$$H=\frac{1}{2t^2}p^2+\frac{1}{6}t^2 p^6$$

§24.2 非完整系统

本节讨论非完整力学系统动力学逆问题,包括运动方程的组建、运动方程的修改、Bertrand 定理的推广、Noether 对称性与动力学逆问题等。

24.2.1 运动方程的组建

设力学系统的位形由 n 个广义坐标 $q_s(s=1,2,\cdots,n)$ 来确定,它的运动受有 g 个双面理想 Четаев 型非完整约束

$$f_\beta(q_s,\dot{q}_s,t)=0 \qquad (\beta=1,2,\cdots,g;s=1,2,\cdots,n) \tag{24.2.1}$$

已知系统有 $(m-g)$ 个第一积分

$$\omega_\nu(q_s,\dot{q}_s,t)=C_\nu \qquad (\nu=g+1,g+2,\cdots,m;m\leqslant n) \tag{24.2.2}$$

假设这 m 个函数 f_β,ω_ν 彼此独立、相容,且对其中的变量有连续一阶偏导数。

提出非完整动力学的一个基本逆问题:已知非完整约束方程(24.2.1)和积分(24.2.2),来组建非完整系统的运动微分方程。

为解上述逆问题,将式(24.2.1),(24.2.2)统一表示为

$$\omega_\mu(q_s,\dot{q}_s,t)=c_\mu \qquad (\mu=1,2,\cdots,m) \tag{24.2.3}$$

其中 $\omega_\beta=f_\beta, c_\beta=0(\beta=1,2,\cdots,g)$。将式(24.2.3)对 t 求导数,并引进 Ерутин 函数,得

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial\omega_\mu}{\partial q_s}\dot{q}_s+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial\omega_\mu}{\partial\dot{q}_s}\ddot{q}_s+\frac{\partial\omega_\mu}{\partial t}=\Phi_\mu(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)\qquad(\mu=1,2,\cdots,m)\tag{24.2.4}$$

其中 Φ_μ 为 Ерутин 函数。当 c_μ 为任意常数时,$\Phi_\mu=0$;当 c_μ 为固定常数时,为满足

$$\Phi_\mu(0,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)=0\tag{24.2.5}$$

的任意函数。式(24.2.4)是力学系统按运动性质(24.2.1),(24.2.2)而运动的必要条件。组建运动方程的问题,归结为寻求系统的广义加速度 $\ddot{q}_s(s=1,2,\cdots,n)$。由式(24.2.4)可解出 m 个 $\ddot{\boldsymbol{q}}$,记作

$$\ddot{q}_r=\sum_{l=1}^{m}\frac{\Delta_{lr}}{\Delta}\left(\Phi_l-\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial\omega_l}{\partial q_s}\dot{q}_s-\frac{\partial\omega_l}{\partial t}\right)-\sum_{k=m+1}^{n}\frac{\Delta^{rk}}{\Delta}\ddot{q}_k\tag{24.2.6}$$

$$(r=1,2,\cdots,m;k=m+1,m+2,\cdots,n)$$

其中

$$\Delta=\det\left(\frac{\partial\omega_k}{\partial\dot{q}_r}\right)_{m\times m}\neq0$$

而 Δ_{lr} 为行列式 Δ 元素 (l,r) 的代数余子式,Δ^{rk} 为 Δ 中第 r 列用式(24.2.4)中矩阵第 k 列替代所得表达式。

所组建的方程(24.2.6)的左端为广义加速度,右端则包含广义力、广义约束力,甚至还包括一部分广义加速度。组建运动方程的逆问题,一般来说没有唯一解。这是因为,首先,当 $m\leqslant n$ 时,不能由式(24.2.6)求出全部广义加速度 $\ddot{q}_s(s=1,2,\cdots,n)$;其次,式(24.2.6)中包含一些 Ерутин 函数,它们仅满足式(24.2.5),但仍然是任意函数。这种非单一解允许根据具体问题的其他需求(如稳定性、优化等)施加一些补充条件,而最终建立起非完整系统的运动方程。

例 1 一质量为 m 的质点在空间中运动,令 $q_1=x, q_2=y, q_3=z$,它的运动受有一个双面理想 Четаев 型非完整约束

$$\omega_1=\dot{q}_3-\frac{b}{a}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2)^{\frac{1}{2}}=0\tag{a}$$

已知系统有两个第一积分

$$\omega_2=\frac{1}{2}m(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2+\dot{q}_3^2)+mgq_3=h\neq0\tag{b}$$

$$\omega_3=\frac{\dot{q}_2}{\dot{q}_1}=c\neq0\tag{c}$$

试组建系统的运动方程。

解:由 $\omega_1,\omega_2,\omega_3$ 的表达式,可求得 $\left(\frac{\partial\omega_l}{\partial\dot{q}_r}\right)_{3\times3}$,有

$$\left(\frac{\partial\omega_l}{\partial\dot{q}_r}\right)_{3\times3}=\begin{pmatrix}-\frac{b}{a}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2)^{-\frac{1}{2}}\dot{q}_1 & -\frac{b}{a}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2)^{-\frac{1}{2}}\dot{q}_2 & 1\\ m\dot{q}_1 & m\dot{q}_2 & m\dot{q}_3\\ -\frac{\dot{q}_2}{\dot{q}_1^2} & \frac{1}{\dot{q}_1} & 0\end{pmatrix}$$

于是有

$$\Delta=\det\left(\frac{\partial\omega_l}{\partial\dot{q}_r}\right)=m\left(1+\frac{\dot{q}_2^2}{\dot{q}_1^2}\right)\left[1+\frac{b}{a}\dot{q}_3(\dot{q}_1+\dot{q}_2^2)^{-\frac{1}{2}}\right]$$

$$\Delta_{11}=-m\frac{\dot{q}_3}{\dot{q}_1},\Delta_{12}=-m\frac{\dot{q}_2\dot{q}_3}{\dot{q}_1^2},\Delta_{13}=m\left(1+\frac{\dot{q}_2^2}{\dot{q}_1^2}\right)$$

$$\Delta_{21}=\frac{1}{\dot{q}_1},\Delta_{22}=\frac{\dot{q}_2}{\dot{q}_1^2},\Delta_{23}=\frac{b}{a}\dot{q}_3^2(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Delta_{31}=-m\frac{b}{a}\dot{q}_2\dot{q}_3(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2)^{-\frac{1}{2}}-m\dot{q}_2$$

$$\Delta_{32}=m\frac{b}{a}\dot{q}_1\dot{q}_3(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2)^{-\frac{1}{2}}+m\dot{q}_1,\Delta_{33}=0$$

因 $m=n=3$,故

$$\Delta^{rk}=0$$

因 h,c 为任意常数,故相应的 Еругин 函数为

$$\Phi_2=\Phi_3=0 \tag{d}$$

方程(24.2.6)给出

$$\begin{aligned}\ddot{q}_1&=\frac{m}{\Delta}\left\{-\frac{\dot{q}_3}{\dot{q}_1}(\Phi_1+g)\right\}\\ \ddot{q}_2&=\frac{m}{\Delta}\left\{-\frac{\dot{q}_2\dot{q}_3}{\dot{q}_1^2}(\Phi_1+g)\right\}\\ \ddot{q}_3&=\frac{m}{\Delta}\left\{\left(1+\frac{\dot{q}_2^2}{\dot{q}_1^2}\right)\Phi_1-g\frac{b\dot{q}_3}{a\dot{q}_1^2}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2)^{\frac{1}{2}}\right\}\end{aligned} \tag{e}$$

其中

$$\Phi_1\bigg|_{\omega_1=0}=0 \tag{f}$$

式(e)就是逆问题的解集。特别地，如果限于研究质点必须在超曲面(a)上运动，则可将

$$\dot{q}_3=\frac{b}{a}(\dot{q}_1^2+\dot{q}^2)^{\frac{1}{2}}$$

代入式(e)，此时有 $\Phi_1=0$，于是得到

$$\ddot{q}_1=-\frac{abg\,\dot{q}_1}{(a^2+b^2)(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\ddot{q}_2=-\frac{abg\,\dot{q}_2}{(a^2+b^2)(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\ddot{q}_3=-\frac{b^2}{a^2+b^2}g$$

这就是著名的 Appell-Hamel 例的方程。

24.2.2 运动方程的修改

假设力学系统的位形由 n 个广义坐标 $q_s(s=1,2,\cdots,n)$ 来确定，它的运动受有 g 个双面理想 Четаев 型非完整约束

$$\omega_\beta=f_\beta(q_s,\dot{q}_s,t)=0\qquad(\beta=1,2,\cdots,g)\tag{24.2.7}$$

系统的运动方程可表示为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_s}-\frac{\partial T}{\partial q_s}=Q_s+\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial\dot{q}_s}\qquad(s=1,2,\cdots,n)\tag{24.2.8}$$

其中 T 为系统的动能；Q_s 为广义力；λ_β 为约束乘子。展开方程(24.2.8)为显式，有

$$\ddot{q}_l=\sum_{s=1}^{n}\frac{\Delta_{sl}}{\Delta}\left\{-\sum_{k=1}^{n}\sum_{r=1}^{n}[k,r;s]\,\dot{q}_k\,q_r+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial B_k}{\partial q_s}-\frac{\partial B_s}{\partial q_k}\right)\dot{q}_k+Q_s-\frac{\partial B_s}{\partial t}+\frac{\partial T_0}{\partial q_s}-\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial A_{sk}}{\partial t}\dot{q}_k+\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial\dot{q}_s}\right\}\tag{24.2.9}$$

$$(l=1,2,\cdots,n)$$

其中 $\Delta=\det(A_{sk})\neq0$；A_{sk} 为动能中广义速度二次型系数；Δ_{sl} 为 Δ 元素 (s,l) 的代数余子式；B_s 为动能中广义速度一次型系数；T_0 为动能中不含广义速度的项；

$$[k,r;s]=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial A_{ks}}{\partial q_r}+\frac{\partial A_{rs}}{\partial q_k}-\frac{\partial A_{kr}}{\partial q_s}\right)\tag{24.2.10}$$

为系数 A_{sk} 的第一类 Christoffel 记号。

非完整系统运动方程的修改问题有以下两种提法[2]。

第一种提法：已知系统的动能 T、约束方程(24.2.7)，以及$(m-g)$个第一积分

$$\omega_{\nu}(q_s,\dot{q}_s,t)=c_{\nu} \qquad (\nu=g+1,g+2,\cdots m) \tag{24.2.11}$$

需要确定广义力 Q_s 和约束乘子 λ_{β}。

第二种提法：已知系统的 m 个积分

$$\omega_{\mu}(q_s,\dot{q}_s,t)=c_{\mu} \qquad (\mu=1,2,\cdots,m) \tag{24.2.12}$$

需要确定加在系统上的非完整约束。

为解第一种逆问题，将式(24.2.7)和式(24.2.11)对 t 求导数，并引入 Еругин 函数 Φ_{μ}，有

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial\omega_{\mu}}{\partial q_s}\dot{q}_s+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial\omega_{\mu}}{\partial\dot{q}_s}\ddot{q}_s+\frac{\partial\omega_{\mu}}{\partial t}=\Phi_{\mu}(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t) \qquad (\mu=1,2,\cdots,m) \tag{24.2.13}$$

将式(24.2.9)代入式(24.2.13)，便给出为确定待求参数 Q_s，λ_{β} 的 m 个代数方程。解这些代数方程，就有可能找到逆问题的解。这类逆问题，一般来说也没有唯一解。

为解第二种逆问题，将式(24.2.12)对 t 求导数，仍得式(24.2.13)。由式(24.2.13)解出一部分广义加速度，记作

$$\ddot{q}_r=\sum_{l=1}^{m}\frac{\Delta_{lr}}{\Delta}\left(\Phi_l-\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial\omega_l}{\partial q_s}\dot{q}_s-\frac{\partial\omega_l}{\partial t}\right)-\sum_{k=m+1}^{n}\frac{\Delta^{rk}}{\Delta}\ddot{q}_k \qquad (r=1,2,\cdots,m) \tag{24.2.14}$$

假设系统所受非完整约束有如下形式

$$f_{\beta}(q_s,\dot{q}_s,t)=0 \qquad (\beta=1,2,\cdots,g;s=1,2,\cdots,n) \tag{24.2.15}$$

下面建立 f_{β} 应满足的微分方程。将式(24.2.15)对 t 求导数，并引入 Еругин 函数 Ψ_{β}，有

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial f_{\beta}}{\partial q_s}\dot{q}_s+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial f_{\beta}}{\partial\dot{q}_s}\ddot{q}_s+\frac{\partial f_{\beta}}{\partial t}=\Psi_{\beta}(\boldsymbol{f},\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t) \qquad (\beta=1,2,\cdots,g) \tag{24.2.16}$$

其中 Ψ_{β} 满足

$$\Psi_{\beta}(\boldsymbol{0},\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)=0 \tag{24.2.17}$$

将式(24.2.14)代入式(24.2.16)，得到

$$\sum_{r=1}^{n}\frac{\partial f_{\beta}}{\partial\dot{q}_r}\left\{\sum_{l=1}^{m}\frac{\Delta_{lr}}{\Delta}\left(\Phi_l-\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial\omega_l}{\partial q_s}\dot{q}_s-\frac{\partial\omega_l}{\partial t}\right)-\sum_{k=m+1}^{n}\frac{\Delta^{rk}}{\Delta}\ddot{q}_k\right\}+$$
$$\sum_{k=m+1}^{n}\frac{\partial f_{\beta}}{\partial\dot{q}_k}\ddot{q}_k+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial f_{\beta}}{\partial q_s}\dot{q}_s+\frac{\partial f_{\beta}}{\partial t}=\Psi_{\beta}(\boldsymbol{f},\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t) \qquad (\beta=1,2,\cdots,g) \tag{24.2.18}$$

方程(24.2.18)就是系统上施加的非完整约束 f_β 应满足的偏微分方程。在一般情形下,由方程(24.2.18)还不能得到 f_β 的具体形式。

研究一些特殊情形。当 $m=n$ 时,方程(24.2.18)成为

$$\sum_{r=1}^{n}\frac{\partial f_\beta}{\partial\dot{q}_r}\left\{\sum_{l=1}^{n}\frac{\Delta_{lr}}{\Delta}\left(\Phi_l-\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial\omega_l}{\partial q_s}\dot{q}_s-\frac{\partial\omega_l}{\partial t}\right)\right\}+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial f_\beta}{\partial q_s}\dot{q}_s+\frac{\partial f_\beta}{\partial t}=\boldsymbol{\Psi}_\beta(\boldsymbol{f},\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)$$
$$(\beta=1,2,\cdots,g)\qquad(24.2.19)$$

进而,如果所有常数 c_μ 都是任意常数,则 $\Psi_l=0\,(l=1,2,\cdots,n)$,而方程(24.2.18)成为

$$-\sum_{r=1}^{n}\frac{\partial f_\beta}{\partial\dot{q}_r}\sum_{l=1}^{n}\frac{\Delta_{lr}}{\Delta}\left(\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial\omega_l}{\partial q_s}\dot{q}_s+\frac{\partial\omega_l}{\partial t}\right)+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial f_\beta}{\partial q_s}\dot{q}_s+\frac{\partial f_\beta}{\partial t}=\boldsymbol{\Psi}_\beta(\boldsymbol{f},\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)$$
$$(\beta=1,2,\cdots,g)\qquad(24.2.20)$$

最后,如果仅限于研究满足约束(24.2.15)的运动,那么 $\Psi_\beta=0(\beta=1,2,\cdots,g)$,而方程(24.2.18)成为

$$-\sum_{r=1}^{n}\frac{\partial f_\beta}{\partial\dot{q}_r}\sum_{l=1}^{n}\frac{\Delta_{lr}}{\Delta}\left(\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial\omega_l}{\partial q_s}\dot{q}_s+\frac{\partial\omega_l}{\partial t}\right)+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial f_\beta}{\partial q_s}\dot{q}_s+\frac{\partial f_\beta}{\partial t}=0\qquad(\beta=1,2,\cdots,g)$$
$$(24.2.21)$$

解偏微分方程(24.2.21),就有可能找到约束 f_β 的具体表达式。

例 2 假设单位质量质点受到一个非完整约束在空间运动,已知系统有三个积分

$$\omega_1=\frac{1}{2}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2+\dot{q}_3^2)+gq_3=c_1\qquad(a)$$

$$\omega_2=\frac{\dot{q}_2}{\dot{q}_1}=c_2\qquad(b)$$

$$\omega_3=\dot{q}_1\dot{q}_3+gq_1=c_3\qquad(c)$$

其中 c_1,c_2,c_3 为任意常数;g 为重力加速度。试研究非完整约束的形式。

解:首先,求广义加速度。将式(a),(b),(c)对 t 求导数,因 c_1,c_2,c_3 为任意常数,故 Еругип 函数 Φ_1,Φ_2,Φ_3 简单地取为零,有

$$\dot{q}_1\ddot{q}_1+\dot{q}_2\ddot{q}_2+\dot{q}_3\ddot{q}_3+g\dot{q}_3=0\qquad(d)$$

$$\dot{q}_1\ddot{q}_2-\dot{q}_2\ddot{q}_1=0\qquad(e)$$

$$\dot{q}_3\ddot{q}_1+\dot{q}_1\ddot{q}_3+g\dot{q}_1=0\qquad(f)$$

由式(b),(e)解得

$$\ddot{q}_2=c_2\ddot{q}_1$$

将其代入式(a),得

$$\dot{q}_1\ddot{q}_1(1+c_2^2)+\dot{q}_3\ddot{q}_3=-g\dot{q}_3 \tag{g}$$

当

$$\Delta=\dot{q}_1^2(1+c_2^2)-\dot{q}_3^2\neq 0$$

时,由式(f),(g)可求得第一组解

$$\ddot{q}_1=0,\ddot{q}_2=0,\ddot{q}_3=-g \tag{h}$$

当 $\Delta=0$ 时,可求得第二组解

$$\begin{aligned}\ddot{q}_1&=-\frac{g\dot{q}_1\dot{q}_3}{2(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2)}\\ \ddot{q}_2&=-\frac{g\dot{q}_2\dot{q}_3}{2(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2)}\\ \ddot{q}_3&=-g+\frac{g\dot{q}_3^2}{2(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2)}\end{aligned} \tag{i}$$

其次,研究非完整约束的形式。假设非完整约束方程有如下形式

$$f(\dot{q}_1,\dot{q}_2,\dot{q}_3,t)=0$$

如果仅限于沿上述超曲面的运动,则有

$$\frac{\partial f}{\partial\dot{q}_1}\ddot{q}_1+\frac{\partial f}{\partial\dot{q}_2}\ddot{q}_2+\frac{\partial f}{\partial\dot{q}_3}\ddot{q}+\frac{\partial f}{\partial t}=0 \tag{j}$$

将问题的第一组解(h)代入,得

$$-\frac{\partial f}{\partial\dot{q}_3}g+\frac{\partial f}{\partial t}=0$$

于是,f 有如下形式

$$f=\varphi(\dot{q}_1,\dot{q}_2,\dot{q}_3+t)$$

其中 φ 为任意函数。再将第二组解(i)代入式(j),得到偏微分方程

$$\frac{\partial f}{\partial\dot{q}_1}\left(-\frac{g\dot{q}_1\dot{q}_3}{2(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2)}\right)+\frac{\partial f}{\partial\dot{q}_2}\left(-\frac{g\dot{q}_2\dot{q}_3}{2(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2)}\right)+\frac{\partial f}{\partial\dot{q}_3}\left(-g+\frac{g\dot{q}_3^2}{2(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2)}\right)+\frac{\partial f}{\partial t}=0$$

可找到它的一个解

$$f=\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2-\dot{q}_3^2$$

24.2.3 Bertrand 定理的推广

下面将 § 24.1 中的命题 1 和命题 2 推广到非完整系统。

将非完整约束方程(24.2.7)对时间 t 求导数,得

$$\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial f_\gamma}{\partial q_l}\dot q_l+\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial f_\gamma}{\partial \dot q_l}\ddot q_l+\frac{\partial f_\gamma}{\partial t}=0 \qquad (\gamma=1,2,\cdots,g) \quad (24.2.22)$$

将式(24.2.9)代入上式,得到为确定约束乘子 λ_β 的代数方程

$$\sum_{l=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\frac{\Delta_{sl}}{\Delta}\frac{\partial f_\gamma}{\partial \dot q_l}\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot q_s}\lambda_\beta+\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial f_\gamma}{\partial q_l}\dot q_l+\frac{\partial f_\gamma}{\partial t}+$$
$$\sum_{l=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial f_\gamma}{\partial \dot q_l}\frac{\Delta_{sl}}{\Delta}\Big\{-\sum_{k=1}^{n}\sum_{r=1}^{n}[k,r;s]\dot q_k\dot q_r+\sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{\partial B_k}{\partial q_s}-\frac{\partial B_s}{\partial q_k}\Big)\dot q_k+$$
$$Q_s+\frac{\partial T_0}{\partial q_s}-\frac{\partial B_s}{\partial t}-\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial A_{sk}}{\partial t}\dot q_k\Big\}=0 \qquad (\gamma=1,2,\cdots,g)$$
$$(24.2.23)$$

由此解得乘子 λ_β,简记作

$$\lambda_\beta=\sum_{s=1}^{n}a_{\beta s}(\boldsymbol q,\dot{\boldsymbol q},t)Q_s+b_\beta(\boldsymbol q,\dot{\boldsymbol q},t) \qquad (\beta=1,2,\cdots,g) \quad (24.2.24)$$

再将式(24.2.24)代入式(24.2.9),消去乘子,得到 n 个二阶常微分方程。这 n 个二阶常微分方程称为与非完整系统(24.2.7),(24.2.8)相应的完整系统的运动方程。

假设已知非完整系统的一个积分

$$\omega(\boldsymbol q,\dot{\boldsymbol q},t)=c \qquad (24.2.25)$$

其中 ω 对其所有变量有连续的偏导数。当 c 为任意常数时,式(24.2.25)为系统的第一积分,或通积分;当 c 为固定常数时,式(24.2.25)为系统的特殊积分。将式(24.2.25)对 t 求导数,并引入 Еругин 函数,得

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial\omega}{\partial q_s}\dot q_s+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial\omega}{\partial \dot q_s}\ddot q_s+\frac{\partial\omega}{\partial t}=\Phi(\boldsymbol\omega,\boldsymbol q,\dot{\boldsymbol q},t) \qquad (24.2.26)$$

当 c 为任意常数时,$\Phi=0$;当 c 为固定常数时,Φ 为满足条件

$$\Phi\Big|_{\omega=0}=0$$

的任意函数。

将式(24.2.9),(24.2.24)代入式(24.2.26),得到

$$\sum_{l=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\frac{\Delta_{sl}}{\Delta}\frac{\partial\omega}{\partial \dot q_l}Q_s+\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial\omega}{\partial q_l}\dot q_l+\frac{\partial\omega}{\partial t}-\Phi+$$
$$\sum_{l=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial\omega}{\partial \dot q_l}\frac{\Delta_{sl}}{\Delta}\Big\{-\sum_{k=1}^{n}\sum_{r=1}^{n}[k,r;s]\dot q_k\dot q_r+\sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{\partial B_k}{\partial q_s}-\frac{\partial B_s}{\partial q_k}\Big)\dot q_k+\frac{\partial T_0}{\partial q_s}-$$
$$\frac{\partial B_s}{\partial t}-\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial A_{sk}}{\partial t}\dot q_k+\sum_{\beta=1}^{g}\Big[\sum_{k=1}^{n}a_{\beta k}(\boldsymbol q,\dot{\boldsymbol q},t)Q_k+b_\beta(\boldsymbol q,\dot{\boldsymbol q},t)\Big]\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot q_s}\Big\}=0$$
$$(24.2.27)$$

简记作

$$\sum_{s=1}^{n} a_s(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)Q_s + b(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t) - \Phi = 0 \tag{24.2.28}$$

其中

$$a_s = \sum_{l=1}^{n} \frac{\Delta_{sl}}{\Delta}\frac{\partial \omega}{\partial \dot{q}_l} + \sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n} \frac{\partial \omega}{\partial \dot{q}_l}\frac{\Delta_{kl}}{\Delta} a_{\beta s}\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_k}$$

$$b = \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial \omega}{\partial q_l}\dot{q}_l + \frac{\partial \omega}{\partial t} + \sum_{l=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial \omega}{\partial \dot{q}_l}\frac{\Delta_{sl}}{\Delta}\Big\{ - \sum_{k=1}^{n}\sum_{r=1}^{n}[k,r;s]\dot{q}_k\dot{q}_r +$$

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial B_k}{\partial q_s} - \frac{\partial B_s}{\partial q_k}\right)\dot{q}_k + \frac{\partial T_0}{\partial q_s} - \frac{\partial B_s}{\partial t} - \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial A_{sk}}{\partial t}\dot{q}_k + \sum_{\beta=1}^{n} b_\beta \frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\Big\} \tag{24.2.29}$$

关系式(24.2.28)对出现于其中任意独立的量应是一个恒等式。因此,它对任意一个$\dot{q}_k$的偏导数应等于零,这里假设 Q_s 不依赖于$\dot{q}_k(k=1,2,\cdots,n)$,于是得到

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial a_s}{\partial \dot{q}_k}Q_s + \frac{\partial b}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_k} = 0 \qquad (k=1,2,\cdots,n) \tag{24.2.30}$$

方程(24.2.30)就是为确定广义力 Q_s 的 n 个代数方程。解此代数方程,便有可能确定广义力 Q_s。如果给定的积分(24.2.25)是系统的通积分,即 c 为任意常数,那么方程(24.2.30)成为

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial a_s}{\partial \dot{q}_k}Q_s + \frac{\partial b}{\partial \dot{q}_k} = 0 \qquad (k=1,2,\cdots,n) \tag{24.2.31}$$

上述结果归为如下命题。

命题 若已知非完整系统(24.2.7),(24.2.8)的结构,但不知道广义力 Q_s。假设广义力不依赖于广义速度。当已知积分(24.2.25)为第一积分时,系统的广义力 Q_s 由式(24.2.31)确定;当已知积分(24.2.25)为特殊积分时,广义力 Q_s 由方程(24.2.30)确定。

根据上述命题,就有可能在仅仅知道一个积分(第一积分或特殊积分)的情况下,来确定 n 个广义力。上述命题是 Bertrand 定理对非完整系统的推广。

值得注意的是,由式(24.2.30)或式(24.2.31)不一定总能够唯一确定所有的广义力 $Q_s(s=1,2,\cdots,n)$。这是因为:第一,方程(24.2.30)中出现 Еругин 函数 Φ 对$\dot{q}_k$ 的偏导数,而 Φ 除了满足条件 $\Phi\big|_{\omega=0}=0$ 外,仍是任意的;第二,如果 $\partial a_s/\partial \dot{q}_k$ 有一些是零,如$\partial a_1/\partial \dot{q}_k=0$,则式(24.2.30)或式(24.2.31)中将不出现 Q_1;第三,如果 $\det(\partial a_s/\partial \dot{q}_k)=0$,则式(24.2.30)或所有(24.2.31)将不出现所有 $Q_s(s=1,2,\cdots,n)$。

例 3 一雪橇在水平面上滑动。雪橇质心 C 在平面上的投影和雪橇与平面接触点相重合。令 m 和 J 分别表示雪橇质量和它对质心轴的转动惯量。系统的位置由三个参数确定:质心在平面上投影的坐标(x,y),以及雪橇对称轴与固定轴 Ox 的夹角 θ。已知系统的一个第一积分

$$\omega=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)+\frac{1}{2}J\dot{\theta}^2+V(x,y,\theta)=h$$

假设广义力 Q_x,Q_y,Q_θ 仅依赖于坐标,试确定这些广义力。

解:令

$$q_1=x,q_2=y,q_3=\theta$$

则积分表示为

$$\omega=\frac{1}{2}m(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2)+\frac{1}{2}J\dot{q}_3^2+V(q_1,q_2,q_3)=h$$

而

$$Q_1=Q_x,Q_2=Q_y,Q_3=Q_\theta$$

系统的动能为

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2)+\frac{1}{2}J\dot{q}_3^2$$

表示雪橇无横滑的非完整约束为

$$f=\dot{q}_2-\dot{q}_1\tan q_3=0$$

运动方程(24.2.8)给出

$$m\ddot{q}_1=Q_1-\lambda\tan q_3$$

$$m\ddot{q}_2=Q_2+\lambda$$

$$J\ddot{q}_3=Q_3$$

将约束方程对 t 求导数,得到

$$\ddot{q}_2-\ddot{q}_1\tan q_3-\frac{\dot{q}_1\dot{q}_3}{\cos^2 q_3}=0$$

与运动方程联合,可求得约束乘子

$$\lambda=m\dot{q}_1\dot{q}_3+Q_1\sin q_3\cos q_3-Q_2\cos^2 q_3$$

将积分 $\omega=h$ 对 t 求导数,得到

$$m\dot{q}_1\ddot{q}_1+m\dot{q}_2\ddot{q}_2+J\dot{q}_3\ddot{q}_3+\frac{\partial V}{\partial q_1}\dot{q}_1+\frac{\partial V}{\partial q_2}\dot{q}_2+\frac{\partial V}{\partial q_3}\dot{q}_3=0$$

代入运动方程,消去 $\ddot{q}_1,\ddot{q}_2,\ddot{q}_3$,得到

$$\dot{q}_1 Q_1 + \dot{q}_2 Q_2 + \dot{q}_3 Q_3 + \frac{\partial V}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial V}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \frac{\partial V}{\partial q_3}\dot{q}_3 = 0$$

这就是方程(24.2.28),其中 $\Phi=0$。方程(24.2.31)给出

$$Q_1 + \frac{\partial V}{\partial q_1} = 0, Q_2 + \frac{\partial V}{\partial q_2} = 0, Q_3 + \frac{\partial V}{\partial q_3} = 0$$

由此求得广义力

$$Q_1 = -\frac{\partial V}{\partial q_1}, Q_2 = -\frac{\partial V}{\partial q_2}, Q_3 = -\frac{\partial V}{\partial q_3}$$

24.2.4 Noether 对称性与动力学逆问题

取时间和坐标的无限小变换

$$t^* = t + \varepsilon\xi_0(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}), q_s^*(t^*) = q_s(t) + \varepsilon\xi_s(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) \qquad (24.2.32)$$

Noether 定理指出[6],如果无限小生成元 ξ_0, ξ_s 和规范函数 $G_N = G_N(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$ 满足 Noether 等式

$$L\dot{\xi}_0 + \frac{\partial L}{\partial t}\xi_0 + \sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial q_s}\xi_s + \sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}(\dot{\xi}_s - \dot{q}_s\dot{\xi}_0) + \sum_{s=1}^{n}Q_s(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) + \dot{G}_N = 0 \qquad (24.2.33)$$

同时满足限制条件

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) = 0 \qquad (24.2.34)$$

则非完整系统存在 Noether 守恒量

$$I_N = L\xi_0 + \sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) + G_N = \text{const.} \qquad (24.2.35)$$

与 Noether 等式(24.2.33)相应的 Killing 方程有如下形式

$$\frac{\partial L}{\partial t}\xi_0 + \sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial q_s}\xi_s + \left(L - \sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s\right)\left(\frac{\partial \xi_0}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial \xi_0}{\partial q_k}\dot{q}_k\right) +$$
$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\left(\frac{\partial \xi_s}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial \xi_s}{\partial q_k}\dot{q}_k\right) + \sum_{s=1}^{n}Q_s(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) = -\frac{\partial G_N}{\partial t} - \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial G_N}{\partial q_k}\dot{q}_k \qquad (24.2.36)$$

$$\left(L - \sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s\right)\frac{\partial \xi_0}{\partial \dot{q}_k} + \sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\frac{\partial \xi_s}{\partial \dot{q}_k} = -\frac{\partial G_N}{\partial \dot{q}_k} \qquad (k = 1, 2, \cdots, n) \qquad (24.2.37)$$

与 Noether 对称性相关的动力学逆问题有如下提法:已知非完整系统的第一积分

$$\omega(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)=c \tag{24.2.38}$$

利用 Killing 方程(24.2.36),(24.2.37)来求无限小变换的生成元 ξ_0,ξ_s 和规范函数 G_N,并求出系统的 Lagrange 函数 L、非势广义力 Q_s 以及非完整约束方程的形式 f_β。

为解上述逆问题,首先令积分(24.2.38)为 Noether 守恒量,即令

$$L\xi_0+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_s}(\xi_s-\dot{q}_s\xi_0)+G_N=\omega \tag{24.2.39}$$

将式(24.2.39)对 $\dot{q}_k$ 求偏导数,得

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_k}\xi_0+L\frac{\partial\xi_0}{\partial\dot{q}_k}+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial^2 L}{\partial\dot{q}_k\partial\dot{q}_s}(\xi_s-\dot{q}_s\xi_0)+$$
$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_s}\left(\frac{\partial\xi_s}{\partial\dot{q}_k}-\delta_s^k\xi_0-\dot{q}_s\frac{\partial\xi_0}{\partial\dot{q}_k}\right)+\frac{\partial G_N}{\partial\dot{q}_k}=\frac{\partial\omega}{\partial\dot{q}_k} \tag{24.2.40}$$

将式(24.2.40)与式(24.2.37)相减,得

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial^2 L}{\partial\dot{q}_k\partial\dot{q}_s}(\xi_s-\dot{q}_s\xi_0)=\frac{\partial\omega}{\partial\dot{q}_k} \tag{24.2.41}$$

令

$$W_{sk}=\frac{\partial^2 L}{\partial\dot{q}_s\partial\dot{q}_k} \tag{24.2.42}$$

由式(24.2.41)求得

$$\bar{\xi}_s=\xi_s-\dot{q}_s\xi_0=\sum_{k=1}^{n}W^{sk}\frac{\partial\omega}{\partial\dot{q}_k}\qquad(s=1,2,\cdots,n) \tag{24.2.43}$$

其中

$$\sum_{r=1}^{n}W^{sr}W_{rk}=\delta_k^s \tag{24.2.44}$$

其次,将式(24.2.39)对 t 求偏导数,得

$$\frac{\partial L}{\partial t}\xi_0+L\frac{\partial\xi_0}{\partial t}+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial^2 L}{\partial t\partial\dot{q}_s}(\xi_s-\dot{q}_s\xi_0)+$$
$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_s}\left(\frac{\partial\xi_s}{\partial t}-\dot{q}_s\frac{\partial\xi_0}{\partial t}\right)+\frac{\partial G_N}{\partial t}=\frac{\partial\omega}{\partial t} \tag{24.2.45}$$

再将式(24.2.39)对 q_k 求偏导数,再乘以 $\dot{q}_k$ 并对 k 求和,得

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial q_k}\dot{q}_k\xi_0+L\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\xi_0}{\partial q_k}\dot{q}_k+\sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial^2 L}{\partial\dot{q}_s\partial\dot{q}_k}\dot{q}_k(\xi_s-\dot{q}_s\xi_0)+$$
$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_s}\left(\frac{\partial\xi_s}{\partial q_k}\dot{q}_k-\dot{q}_s\frac{\partial\xi_0}{\partial q_k}\dot{q}_k\right)+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial G_N}{\partial q_k}\dot{q}_k=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\omega}{\partial q_k}\dot{q}_k \tag{24.2.46}$$

将式(24.2.45),(24.2.46)相加,并与式(24.2.36)相减,得到

$$\sum_{s=1}^{n}\left(-\frac{\partial L}{\partial q_s}-Q_s+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_s\partial q_k}\dot{q}_k\right)(\xi_s-\dot{q}_s\xi_0)=\frac{\partial \omega}{\partial t}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial \omega}{\partial q_k}\dot{q}_k \tag{24.2.47}$$

再将式(24.2.43)代入式(24.2.47),得

$$\sum_{s=1}^{n}\left(-\frac{\partial L}{\partial q_s}-Q_s+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_s\partial q_k}\dot{q}_k\right)\sum_{r=1}^{n}W^{sr}\frac{\partial \omega}{\partial \dot{q}_r}=\frac{\partial \omega}{\partial t}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial \omega}{\partial q_k}\dot{q}_k \tag{24.2.48}$$

它给出动力学函数 L,Q_s 与给定积分 ω 之间的关系。

这样,式(24.2.43)和式(24.2.48)便是求解动力学逆问题的基本关系式。由这$(n+1)$个关系式,便有可能求得无限小生成元 ξ_0,ξ_s 以及动力学函数 L,Q_s。然后,由式(24.2.39)求得规范函数 G_N,由式(24.2.34)求得约束形式 f_β。显然,这类逆问题没有唯一解。

例 4 一单位质量质点在一平面上运动,其位形由广义坐标 q_1,q_2 确定,并且非势力为零。已知系统一个第一积分

$$\omega=-bt\dot{q}_1+\dot{q}_2+bq_1=c \tag{a}$$

其中 b 为常数。试求系统的 Lagrange 函数 L、非完整约束的形式 f,以及无限小变换的生成元 ξ_0,ξ_1,ξ_2 和规范函数 G_N。

解:式(24.2.43)给出

$$\begin{aligned}\xi_1-\dot{q}_1\xi_0&=W^{11}(-bt)+W^{12}\\ \xi_2-\dot{q}_2\xi_0&=W^{21}(-bt)+W^{22}\end{aligned} \tag{b}$$

式(24.2.48)给出

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\partial^2 L}{\partial\dot{q}_1\partial q_1}\dot{q}_1+\frac{\partial^2 L}{\partial\dot{q}_1\partial q_2}\dot{q}_2-\frac{\partial L}{\partial q_1}-Q_1\right)[W^{11}(-bt)+W^{12}]+\\ &\left(\frac{\partial^2 L}{\partial\dot{q}_2\partial q_1}\dot{q}_1+\frac{\partial^2 L}{\partial\dot{q}_2\partial q_2}\dot{q}_2-\frac{\partial L}{\partial q_2}-Q_2\right)[W^{21}(-bt)+W^{22}]=0\end{aligned} \tag{c}$$

由假设非势广义力为零,知 $Q_1=Q_2=0$。现取

$$W^{11}=W^{22}=1,W^{12}=W^{21}=0 \tag{d}$$

以及

$$L=\frac{1}{2}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2)+U(q_1,q_2) \tag{e}$$

则式(c)成为

$$-\frac{\partial U}{\partial q_1}(-bt)-\frac{\partial U}{\partial q_2}=0$$

它有解

$$U=0 \tag{f}$$

式(b)给出

$$\xi_1-\dot{q}_1\xi_0=-bt,\xi_2-\dot{q}_2\xi_0=1$$

它有解

$$\xi_0=0,\xi_1=-bt,\xi_2=1 \tag{g}$$

再将式(a),(e),(f)代入式(24.2.39),得

$$\dot{q}_1(-bt)+\dot{q}_2+G_N=-bt\dot{q}_1+\dot{q}_2+bq_1$$

由此求得规范函数

$$G_N=bq_1 \tag{h}$$

最后,将式(g)代入限制条件(24.2.34),得

$$\frac{\partial f}{\partial \dot{q}_1}(-bt)+\frac{\partial f}{\partial \dot{q}_2}=0$$

它有解

$$f=\dot{q}_1+bt\dot{q}_2+g(t,q_1,q_2) \tag{i}$$

其中 g 为任意函数。

§24.3 Birkhoff 系统

本节讨论 Birkhoff 系统各类动力学逆问题,包括运动方程的组建、Noether 对称性与动力学逆问题、根据 Pfaff-Birkhoff-d'Alembert 原理组建运动方程、广义 Poisson 方法与动力学逆问题等。

24.3.1 运动方程的组建

对 Birkhoff 系统方程的组建问题提法如下:按给定的运动性质,即积分流形

$$\Omega: I_\rho(a^\mu,t)=c_\rho \qquad (\rho=1,2,\cdots,m;m\leqslant 2n) \tag{24.3.1}$$

来组建系统的 Birkhoff 方程,使得按式(24.3.1)的运动是系统的一个可能运动。因此,Birkhoff 方程的组建问题,归结为按性质(24.3.1)来找到系统的 Birkhoff 函数 B 和 Birkhoff 函数组 $R_\mu(\mu=1,2,\cdots,2n)$的问题。

为解上述逆问题,可分两个步骤:第一步是按给定运动性质(24.3.1)求出所有$\dot{a}^\mu(\mu=1,2,\cdots,2n)$,而得到一阶微分方程组;第二步是将所得一阶微分方程组化成 Birkhoff 形式。

首先,将式(24.3.1)对时间 t 求函数,并引入 Еругин 函数 Φ_ρ,得到

$$\sum_{\mu=1}^{n} \frac{\partial I_\rho}{\partial a^\mu} \dot{a}^\mu + \frac{\partial I_\rho}{\partial t} = \Phi_\rho(\boldsymbol{I}, \boldsymbol{a}, t) \qquad (\rho = 1, 2\cdots, m; \mu = 1, 2, \cdots, 2n) \tag{24.3.2}$$

当 c_ρ 为任意常数时，$\Phi_\rho=0$；当 c_ρ 为固定常数时，Φ_ρ 为满足条件

$$\Phi_\rho(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{a}, t)=0 \qquad (\rho=1,2,\cdots,m) \tag{24.3.3}$$

的任意函数。由式(24.3.2)可解出 m 个$\dot{a}^\rho$，表示为

$$\dot{a}^\rho = \sum_{l=1}^{m} \frac{\Delta_{l\rho}}{\Delta}\left(\Phi_l - \frac{\partial I_l}{\partial t}\right) - \sum_{k=m+1}^{n} \frac{\Delta^{\rho k}}{\Delta} \dot{a}^k \qquad (\rho = 1, 2, \cdots, m) \tag{24.3.4}$$

其中

$$\Delta=\det\left(\frac{\partial I_\rho}{\partial a^l}\right) \qquad (\rho, l=1, 2\cdots, m) \tag{24.3.5}$$

$\Delta_{l\rho}$为 Δ 元素(l,ρ)的代数余子式；$\Delta^{\rho k}$ 为 Δ 中第 ρ 列用式(24.3.2)中矩阵第 k 列替代所得行列式。当 $m=2n$ 时，式(24.3.4)成为

$$\dot{a}^\mu = \sum_{\nu=1}^{2n} \frac{\Delta_{\nu\mu}}{\Delta}\left(\Phi_\nu - \frac{\partial I_\nu}{\partial t}\right) \qquad (\mu = 1, 2, \cdots, 2n) \tag{24.3.6}$$

当 $m<2n$ 时，由式(24.3.4)不能求出所有$\dot{a}^\mu(\mu=1,2,\cdots,2n)$。此时，为求得所有$\dot{a}^\mu$，需补充一些条件。当 $m=2n$ 时，可由式(24.3.4)求得所有$\dot{a}^\mu$。但是，由于 Еругин 函数 $\boldsymbol{\Phi}_\rho$ 的存在，$\dot{a}^\mu$ 仍不能表示为 $\boldsymbol{a}$，t 的显函数。此时，为确定 Еругин 函数，需补充一些条件，如有关稳定性、优化等条件。这样，当 $m=2n$，而积分(24.3.1)全部为第一积分时，才能最终找到所有$\dot{a}^\mu(\mu=1,2,\cdots,2n)$，从而组成一阶微分方程组，完成解逆问题的第一步。

其次，假设已找到全部的$\dot{a}^\mu$，并记作

$$\dot{a}^\mu=\sigma_\mu(t, \boldsymbol{a}) \qquad (\mu=1,2,\cdots,2n) \tag{24.3.7}$$

第二步要将方程组(24.3.7)Birkhoff 化。Birkhoff 方程的一般形式为

$$\sum_{\nu=1}^{2n}\left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu} - \frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu}\right)\dot{a}^\nu - \frac{\partial B}{\partial a^\mu} - \frac{\partial R_\mu}{\partial t} = 0 \qquad (\mu = 1, 2, \cdots, 2n) \tag{24.3.8}$$

将式(24.3.7)代入式(24.3.8)，得到

$$\frac{\partial R_\mu}{\partial t} = \sum_{\nu=1}^{2n}\left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu} - \frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu}\right)\sigma_\nu - \frac{\partial B}{\partial a^\mu} \qquad (\mu = 1, 2, \cdots, 2n) \tag{24.3.9}$$

对给定的函数 B，不论 R_μ 是否显含 t，方程(24.3.9)都是 Cauchy-Ковалевская 型的偏微分方程。根据 Cauchy-Ковалевская 定理知，方程(24.3.9)的解总是存在的。由方程(24.3.9)寻求动力学函数 B，R_μ 已有一些方法，如 Santilli 第一方法、Santilli 第二方法、Hojman 方法等[7]。

例 1 给定 4 阶 Birkhoff 系统的运动性质

$$I_1 = a^1 - ta^3 + \frac{1}{b}\int \arctan bt\,\mathrm{d}t = c_1$$

$$I_2 = a^2 - ta^4 + \frac{1}{2b}\int \ln(1+b^2t^2)\,\mathrm{d}t = c_2 \qquad \text{(a)}$$

$$I_3 = a^3 = c_3$$

$$I_4 = a^4 = c_4$$

其中 b 为一常数，试组成系统的 Birkhoff 方程。

解：将式(a)对 t 求导数，当 c_1,c_2,c_3,c_4 为任意常数时，Еругин 函数为零，故有

$$\dot{a}^1=a^3-\frac{1}{b}\arctan bt,\ \dot{a}^2=a^4-\frac{1}{2b}\ln(1+b^2t^2)$$

$$\dot{a}^3=0,\ \dot{a}^4=0$$

而当 c_1,c_2,c_3,c_4 为零，或为某些固定常数时，式(24.3.4)中的 Еругин 函数不恒为零，此时有

$$\dot{a}^1=a^3-\frac{1}{b}\arctan bt+\boldsymbol{\Phi}_1+t\boldsymbol{\Phi}_3$$

$$\dot{a}^2=a^4-\frac{1}{2b}\ln(1+b^2t^2)+\boldsymbol{\Phi}_2+t\boldsymbol{\Phi}_4$$

$$\dot{a}^3=\boldsymbol{\Phi}_3,\ \dot{a}^4=\boldsymbol{\Phi}_4$$

现取 Birkhoff 函数为

$$B=\frac{1}{2}\left[a^3-\frac{1}{b}\arctan bt\right]^2+\frac{1}{2}\left[a^4-\frac{1}{2b}\ln(1+b^2t^2)\right]^2 \qquad \text{(b)}$$

并设 Birkhoff 函数组 R_μ ($\mu=1,2,3,4$)不显含 t，此时式(24.3.9)给出

$$\Omega_{12}\left[a^4-\frac{1}{2b}\ln(1+b^2t^2)+\Phi_2+t\Phi_4\right]+\Omega_{13}\Phi_3+\Omega_{14}\Phi_4=0$$

$$\Omega_{21}\left(a^3-\frac{1}{b}\arctan bt+\Phi_1+t\Phi_3\right)+\Omega_{23}\Phi_3+\Omega_{24}\Phi_4=0$$

$$\Omega_{31}\left(a^3-\frac{1}{b}\arctan bt+\Phi_1+t\Phi_3\right)+ \qquad \text{(c)}$$

$$\Omega_{32}\left[a^4-\frac{1}{2b}\ln(1+b^2t^2)+\Phi_2+t\Phi_4\right]+\Omega_{34}\Phi_4=a^3-\frac{1}{b}\arctan bt$$

$$\Omega_{41}\left(a^3-\frac{1}{b}\arctan bt+\Phi_1+t\Phi_3\right)+$$

$$\Omega_{42}\left[a^4-\frac{1}{2b}\ln(1+b^2t^2)+\Phi_2+t\Phi_4\right]+\Omega_{43}\Phi_3=a^4-\frac{1}{2b}\ln(1+b^2t^2)$$

取 Birkhoff 张量为

$$(\Omega_{\mu\nu})=\begin{pmatrix}0&0&-1&0\\0&0&0&-1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix} \tag{d}$$

则式(c)给出

$$\Phi_1=\Phi_2=\Phi_3=\Phi_4=0 \tag{e}$$

因此，所取 Birkhoff 函数(b)和 Birkhoff 张量(d)是可行的。此时，按式(d)可选 Birkhoff 函数组为

$$R_1=a^3,R_2=a^4,R_3=R_4=0 \tag{f}$$

这样，不论积分常数 $c_\rho(\rho=1,2,3,4)$ 是否为任意常数，所选 Birkhoff 函数(b)和 Birkhoff 函数组(f)都是问题的解。

进而，若取

$$(\Omega_{\mu\nu})=\begin{pmatrix}0&-1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&1&0\end{pmatrix} \tag{g}$$

则由式(c)得

$$\begin{aligned}
\Phi_1&=-t\left[a^4-\frac{1}{2b}\ln(1+b^2t^2)\right]-\left(a^3-\frac{1}{b}\arctan bt\right)\\
\Phi_2&=t\left(a^3-\frac{1}{b}\arctan bt\right)-\left[a^4-\frac{1}{2b}\ln(1+b^2t^2)\right]\\
\Phi_3&=a^4-\frac{1}{2b}\ln(1+b^2t^2)\\
\Phi_4&=-\left(a^3-\frac{1}{b}\arctan bt\right)
\end{aligned} \tag{h}$$

显然，不论式(a)中的常数 c_ρ 是否为任意常数，式(h)都不能成为 Еругин 函数。

24.3.2 Noether 对称性与动力学逆问题

对 Birkhoff 系统，与 Noether 对称性相关的正问题提法如下：如果无限小生成元 ξ_0,ξ_μ 和规范函数 G_N 满足 Noether 等式

$$\left(\sum_{\mu=1}^{2n}\frac{\partial R_\mu}{\partial t}\dot{a}^\mu-\frac{\partial B}{\partial t}\right)\xi_0+\sum_{\mu=1}^{2n}\left(\sum_{\nu=1}^{2n}\frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu}\dot{a}^\nu-\frac{\partial B}{\partial a^\mu}\right)\xi_\mu+$$

$$\sum_{\mu=1}^{2n} R_\mu \dot{\xi}_\mu - B\dot{\xi}_0 + \dot{G}_N = 0 \tag{24.3.10}$$

则系统存在 Noether 守恒量

$$I_N = \sum_{\mu=1}^{2n} R_\mu \xi_\mu - B\xi_0 + G_N = \text{const.} \tag{24.3.11}$$

与 Noether 等式(24.3.10)相应的 Killing 方程为

$$\sum_{\mu=1}^{2n} R_\mu \frac{\partial \xi_\mu}{\partial a^\nu} + \sum_{\mu=1}^{2n} \frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu}\xi_\mu + \frac{\partial R_\nu}{\partial t}\xi_0 - B\frac{\partial \xi_0}{\partial a^\nu} + \frac{\partial G_N}{\partial a^\nu} = 0 \quad (\nu = 1,2,\cdots,2n) \tag{24.3.12}$$

$$\frac{\partial B}{\partial t}\xi_0 + B\frac{\partial \xi_0}{\partial t} + \sum_{\mu=1}^{2n} \frac{\partial B}{\partial a^\mu}\xi_\mu - \sum_{\mu=1}^{2n} R_\mu \frac{\partial \xi_\mu}{\partial t} - \frac{\partial G_N}{\partial t} = 0 \tag{24.3.13}$$

因此,如果无限小生成元 ξ_0,ξ_μ 和规范函数 G_N 满足 Killing 方程(24.3.12),(24.3.13),则 Birkhoff 系统存在 Noether 守恒量式(24.3.11)。

与 Birkhoff 系统 Noether 对称性相关的动力学逆问题有以下两种提法和解法。

第一种提法:已知系统的 Birkhoff 函数组 $R_\mu(\mu=1,2,\cdots,2n)$,按给定的一个积分

$$I(a^\mu,t)=c \tag{24.3.14}$$

以及 Killing 方程(24.3.12),(24.3.13)来寻求系统的 Birkhoff 函数 B 以及无限小生成元 ξ_0,ξ_μ 和规范函数 G_N。

为解上述逆问题,可令积分(24.3.14)等于 Noether 对称性的守恒量(24.3.11),即令

$$\sum_{\mu=1}^{2n} R_\mu \xi_\mu - B\xi_0 + G_N = I \tag{24.3.15}$$

将其对 a^ν 和 t 求偏导数,分别得到

$$\sum_{\mu=1}^{2n} \frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu}\xi_\mu + \sum_{\mu=1}^{2n} R_\mu \frac{\partial \xi_\mu}{\partial a^\nu} - \frac{\partial B}{\partial a^\nu}\xi_0 - B\frac{\partial \xi_0}{\partial a^\nu} + \frac{\partial G_N}{\partial a^\nu} = \frac{\partial I}{\partial a^\nu} \qquad (\nu = 1,2,\cdots,2n) \tag{24.3.16}$$

$$\sum_{\mu=1}^{2n} \frac{\partial R_\mu}{\partial t}\xi_\mu + \sum_{\mu=1}^{2n} R_\mu \frac{\partial \xi_\mu}{\partial t} - \frac{\partial B}{\partial t}\xi_0 - B\frac{\partial \xi_0}{\partial t} + \frac{\partial G_N}{\partial t} = \frac{\partial I}{\partial t} \tag{24.3.17}$$

将式(24.3.16)与式(24.3.12),式(24.3.17)与式(24.3.13)分别相减,得到

$$\sum_{\mu=1}^{2n} \left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu} - \frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu}\right)\xi_\mu + \left(\frac{\partial R_\nu}{\partial t} + \frac{\partial B}{\partial a^\nu}\right)\xi_0 = -\frac{\partial I}{\partial a^\nu} \qquad (\nu = 1,2,\cdots,2n) \tag{24.3.18}$$

$$\sum_{\mu=1}^{2n} \left(\frac{\partial R_\mu}{\partial t} + \frac{\partial B}{\partial a^\mu}\right)\xi_\mu = \frac{\partial I}{\partial t} \tag{24.3.19}$$

由式(24.3.18)解得

$$\xi_\mu = \sum_{\nu=1}^{2n} \Omega^{\mu\nu}\left[\frac{\partial I}{\partial a^\nu} + \left(\frac{\partial B}{\partial a^\nu} + \frac{\partial R_\nu}{\partial t}\right)\xi_0\right] \qquad (\mu = 1, 2, \cdots, 2n) \tag{24.3.20}$$

将其代入式(24.3.19)，得

$$\sum_{\mu=1}^{2n}\sum_{\nu=1}^{2n} \frac{\partial B}{\partial a^\mu}\Omega^{\mu\nu}\frac{\partial I}{\partial a^\nu} = \frac{\partial I}{\partial t} - \sum_{\mu=1}^{2n}\sum_{\nu=1}^{2n}\frac{\partial R_\mu}{\partial t}\Omega^{\mu\nu}\frac{\partial I}{\partial a^\nu} \tag{24.3.21}$$

方程(24.3.21)的右端是已知的，它是关于 Birkhoff 函数 B 的偏微分方程。解此方程，便可求出 B 来。然后，由式(24.3.18)给出生成元 ξ_0, ξ_μ 之间的关系。最后，由式(24.3.15)求出规范函数 G_N。

第二种提法：已知系统的 Birkhoff 函数 B，按给定的积分(24.3.14)以及 Killing 方程(24.3.12)，(24.3.13)来求系统的 Birkhoff 函数组 R_μ 以及无限小生成元 ξ_0, ξ_μ 和规范函数 G_N。

为解上述逆问题，可利用关系式(24.3.18)，(24.3.19)，或关系式(24.3.20)，(24.3.21)。在已知函数 B 和积分 I 时，这些关系给出 R_μ, ξ_0, ξ_μ 之间的方程。在求得 R_μ, ξ_0, ξ_μ 之后，再由关系式(24.3.15)求出规范函数 G_N。

例 2 已知二阶 Birkhoff 系统的 Birkhoff 函数

$$B = \frac{1}{2t^2}(a^2)^2 + \frac{1}{6}t^2(a^1)^6 \tag{a}$$

以及积分

$$I = \frac{1}{t}(a^2)^2 + a^1 a^2 + \frac{1}{3}t^2(a^1)^6 \tag{b}$$

试求系统的 Birkhoff 函数组 R_1, R_2，无限小生成元 ξ_0, ξ_1, ξ_2 和规范函数 G_N。

解：式(24.3.18)和式(24.3.19)分别给出

$$\Omega_{21}\xi_2 + \left[\frac{\partial R_1}{\partial t} + t^2(a^1)^5\right]\xi_0 = -a^2 - 2t^3(a^1)^5$$

$$\Omega_{12}\xi_1 + \left(\frac{\partial R_2}{\partial t} + \frac{1}{t^2}a^2\right)\xi_0 = -\frac{2}{t}a^2 - a^1$$

$$\left[\frac{\partial R_1}{\partial t} + t^2(a^1)^5\right]\xi_1 + \left(\frac{\partial R_2}{\partial t} + \frac{1}{t^2}a^2\right)\xi_2 = -\frac{1}{t^2}(a^2)^2 + t^2(a^1)^6$$

可找到如下解

$$R_1 = a^2, R_2 = 0, \xi_0 = -2t, \xi_1 = a^1, \xi_2 = -a^2 \tag{c}$$

将式(a)，(b)，(c)代入式(24.3.15)，得

$$G_N = 0$$

24.3.3 根据 Pfaff-Birkhoff-d'Alembert 原理组建运动方程

与 Birkhoff 系统相关的微分变分原理是 Pfaff-Birkhoff-d'Alembert 原理，有如下形式

$$\sum_{\mu=1}^{2n}\left\{\sum_{\nu=1}^{2n}\left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu}\right)\dot{a}^\nu-\frac{\partial B}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu}{\partial t}\right\}\delta a^\mu=0 \qquad (24.3.22)$$

与这个原理相关的动力学逆问题提法如下：从原理(24.3.22)出发来组建系统的运动方程，要求按给定性质

$$\Omega: I_\rho(a^\mu,t)=0 \qquad (\rho=1,2,\cdots,m;m\leqslant 2n) \qquad (24.3.23)$$

的运动是系统的一个可能运动。这里 $I_\rho(\rho=1,2,\cdots,m)$ 彼此相容，独立，对其变量连续可微。

为解上述问题，将式(24.3.23)对 t 求导数，并引入 Еругин 函数，得到

$$\sum_{\mu=1}^{2n}\frac{\partial I_\rho}{\partial a^\mu}\dot{a}^\mu+\frac{\partial I_\rho}{\partial t}=\Phi_\rho(\boldsymbol{I},\boldsymbol{a},t) \qquad (\rho=1,2,\cdots,m;m\leqslant 2n)$$

$$(24.3.24)$$

对式(24.3.23)取等时变分，得

$$\sum_{\mu=1}^{2n}\frac{\partial I_\rho}{\partial a^\mu}\delta a^\mu=0 \qquad (24.3.25)$$

这是式(24.3.23)对变分 δa^μ 的限制。假设由式(24.3.25)可解出前面 m 个 δa^ρ，记作

$$\delta a^\rho=\sum_{\sigma=m+1}^{n}c_{\rho\sigma}(t,\boldsymbol{a})\delta a^\sigma \qquad (\rho=1,2\cdots,m) \qquad (24.3.26)$$

将式(24.3.26)代入原理(24.3.22)，由 δa^ρ 的独立性，得到

$$\sum_{\nu=1}^{2n}\Omega_{\sigma\nu}\dot{a}^\nu-\frac{\partial B}{\partial a^\sigma}-\frac{\partial R_\sigma}{\partial t}+\sum_{\rho=1}^{m}c_{\rho\sigma}\left(\sum_{\nu=1}^{2n}\Omega_{\rho\nu}\dot{a}^\nu-\frac{\partial B}{\partial a^\rho}-\frac{\partial R_\rho}{\partial t}\right)=0$$

$$(\sigma=m+1,m+2,\cdots,2n) \qquad (24.3.27)$$

这样，式(24.3.24)和式(24.3.27)便是所论问题的运动方程。

所得到的方程允许系统按给定性质(24.3.23)而运动，并且仅当初始条件 $t=t_0,a^\mu=a_0^\mu$ 满足式(24.3.23)，即当满足

$$I_\rho(a_0^\mu,t_0)=0 \qquad (\rho=1,2,\cdots,m) \qquad (24.3.28)$$

时，这个运动才存在。自然可假设条件(24.3.28)实际上不满足，因此，要求当系统有对条件(24.3.28)的初始偏离时，相对给定性质(24.3.23)是稳定的或渐近稳定的。这个要求可用来选取尚未确定的 Еругин 函数。

例 3 4 阶 Birkhoff 系统的 Pfaff-Birkhoff-d'Alembert 原理为

$$(-\dot{a}^3-a^1)\delta a^1+(-\dot{a}^4-a^2)\delta a^2+(\dot{a}^1-a^3)\delta a^3+(\dot{a}^2-a^4)\delta a^4=0 \tag{a}$$

给定运动性质为

$$I_1=a^1+a^2=0,\ I_2=a^3+a^1a^4=0 \tag{b}$$

试组建运动方程，并按稳定性要求选取 Еругин 函数 Φ_1,Φ_2。

解：方程(24.3.27)和方程(24.3.24)给出

$$\begin{aligned}&-\dot{a}^3-a^1+\dot{a}^4+a^2-\dot{a}^1a^4+\dot{a}^3a^4=0\\&\dot{a}^2-a^4-a^1\dot{a}^1+a^1a^3=0\\&\dot{a}^1+\dot{a}^2=\Phi_1\\&\dot{a}^3+\dot{a}^1a^4+\dot{a}^4a^1=\Phi_2\end{aligned} \tag{c}$$

这就是所要组建的运动方程。由式(c)解出$\dot{a}^\mu$，有

$$\begin{aligned}&(1+a^1)\dot{a}^1=\Phi_1+a^1a^3-a^4\\&(1+a^1)\dot{a}^2=a^1\Phi_1+a^4-a^1a^3\\&(1+a^1)\dot{a}^3=\Phi_2-a^4\Phi_1+a^4(a^4-a^1a^3)-a^1(a^1-a^2-a^3a^4)\\&(1+a^1)\dot{a}^4=\Phi_2+a^1-a^2-a^3a^4 \qquad (a^1\neq-1)\end{aligned} \tag{d}$$

为求得 Еругин 函数 Φ_1 和 Φ_2，可提出补充要求：要求方程(d)的零解 $a^\mu=0(\mu=1,2,3,4)$是稳定的，并且满足

$$\Phi_1\Big|_{a^1+a^2=0}=0,\ \Phi_2\Big|_{a^3+a^1a^4=0}=0 \tag{e}$$

选 Ляпунов 函数为

$$V=\frac{1}{2}\{(a^1)^2+(a^2)^2+(a^3)^2+(a^4)^2\} \tag{f}$$

按方程(d)求对时间的导数，得

$$\dot{V}=\frac{1}{1+a^1}\{\Phi_1(a^1+a^1a^2-a^3a^4)+\Phi_2(a^3+a^4)\} \tag{g}$$

选 Еругин 函数为

$$\begin{aligned}&\Phi_1=(1+a^1)(a^3+a^4)(a^1+a^2)(a^3+a^1a^4)\\&\Phi_2=-(1+a^1)(a^1+a^1a^2-a^3a^4)(a^3+a^1a^4)(a^1+a^2)\end{aligned} \tag{h}$$

则有

$$\dot{V}=0 \tag{i}$$

据 Ляпунов 定理知，零解是稳定的，同时也满足式(e)。

24.3.4 Poisson 方法与动力学逆问题

如果

$$I(a^{\mu},t)=c \tag{24.3.29}$$

是 Birkhoff 方程(24.3.8)的积分，则有

$$\frac{\partial I}{\partial t}+\sum_{\mu=1}^{2n}\sum_{\nu=1}^{2n}\frac{\partial I}{\partial a^{\mu}}\Omega^{\mu\nu}\left(\frac{\partial B}{\partial a^{\nu}}+\frac{\partial R_{\nu}}{\partial t}\right)=0 \tag{24.3.30}$$

反之，如果某函数 I 满足式(24.3.30)，则 I 是系统的积分。式(24.3.30)称为 Birkhoff 系统的广义 Poisson 条件。

与广义 Poisson 条件(24.3.30)相关的动力学正问题是指，给定动力学函数 B,R_{μ}，按广义 Poisson 条件(24.3.30)来求积分 I。

与广义 Poisson 条件(24.3.30)相关的动力学逆问题的提法如下：根据已知第一积分(24.3.29)，按广义 Poisson 条件(24.3.30)来求系统的动力学函数 B,R_{μ}。

上述逆问题的解归结为解偏微分方程(24.3.30)。一般说来，因为给出的信息不足，逆问题的解不唯一。

例 4 已知二阶 Birkhoff 系统的一个积分

$$I=\frac{1}{t}(a^2)^2+a^1a^2+\frac{1}{3}t^3(a^1)^6=c \tag{a}$$

试求系统的 Birkhoff 函数 B 和 Birkhoff 函数组 R_1,R_2。

解：广义 Poisson 条件(24.3.30)给出

$$-\frac{1}{t^2}(a^2)^2+t^2(a^1)^6+[a^2+2t^3(a^1)^5]\Omega^{12}\left(\frac{\partial B}{\partial a^2}+\frac{\partial R_2}{\partial t}\right)+$$
$$(a^1+\frac{2}{t}a^2)\Omega^{21}\left(\frac{\partial B}{\partial a^1}+\frac{\partial R_1}{\partial t}\right)=0 \tag{b}$$

取

$$R_1=a^2,R_2=0 \tag{c}$$

则有

$$\Omega_{12}=-1,\Omega^{12}=-\Omega^{21}=1 \tag{d}$$

将式(c)，(d)代入式(b)，得到

$$-\frac{1}{t^2}(a^2)^2+t^2(a^1)^6+[a^2+2t^3(a^1)^5]\frac{\partial B}{\partial a^2}-\left(a^1+\frac{2}{t}a^2\right)\frac{\partial B}{\partial a^1}=0 \tag{e}$$

它有解

$$B=\frac{1}{2t^2}(a^2)^2+\frac{1}{6}t^2(a^1)^6 \tag{f}$$

式(c)，(f)就是问题的一个解。

当然，对例 4，问题还有其他解。

动力学逆问题有极为丰富的内容，涉及许多分支学科。本章主要讨论分析动力学中的一些逆问题。动力学逆问题有以下显著特点：①动力学逆问题的提法和解法总是以正问题的提法和解法为基础；②凡有正问题，必有逆问题，因此，一门动力学的建立必然伴有逆问题；③动力学逆问题一般来说是一个“灰箱”，往往因给定信息不充分而不能得到单一解答。这种不唯一性质恰恰为理论与实际提供了需要的余地，可以根据需要，如稳定性、优化等，提出补充要求。有关动力学逆问题的研究还可参见文献[8～12]。

思考题

24.1　理论力学中质点动力学第一类问题与一般动力学逆问题有什么关系？

24.2　Newton 是怎样由 Kepler 三定律导出他的万有引力定律的？

24.3　§24.1 中例 2，如给定积分为

$$\omega=\frac{1}{2}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2)+q_1q_2$$

能求出广义力 Q_3 吗？

24.4　§24.1 中例 3，为求 Lagrange 函数，还有其他方法吗？

24.5　§24.3 中例 3，如给定运动性质为

$$I=a^1+a^2=0$$

会出现什么问题？

习题

24.1　行星运动方程为

$$\ddot{x}=X(x,y),\ddot{y}=Y(x,y)$$

运动性质为

$$\Omega:\begin{cases}\omega_1=r-ex=p\\ \omega_2=x\dot{y}-y\dot{x}=c\end{cases}$$

其中 $r=(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}$，$e,c,p$ 为常数，试求 X 和 Y。

24.2　已知二自由度完整系统的一个积分

$$\omega=\dot{q}_2-bt\dot{q}_1+bq_1=\text{const.}$$

其中 b 为常数，试用 Noether 对称性确定系统的 Lagrange 函数 L、广义力 Q_1 和 Q_2，以及无限小生成元 ξ_0,ξ_1,ξ_2 和规范函数 G_N。

24.3 已知二自由度系统的两个积分

$$\omega_1 = p_1 + q_2 = c_1$$

$$\omega_2 = q_1 - p_2 - (p_1 + q_2)t = c_2$$

试用 Poisson 方法求系统的 Hamilton 函数 H 和非势广义力$\widetilde{Q}_1, \widetilde{Q}_2$。

24.4 设系统位形由 q_1, q_2 确定,所受非完整约束为

$$\omega_1 = \dot{q}_1 + bt\dot{q}_2 - bq_2 + t = 0$$

其中 b 为常数。已知有一个积分

$$\omega_2 = \dot{q}_2 - bt\dot{q}_1 + bq_1 = c \neq 0$$

试求系统的广义加速度 $\ddot{q}_1, \ddot{q}_2$。

24.5 已知系统的动能为

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2)$$

非完整约束方程为

$$\omega_1 = \dot{q}_3 - \frac{b}{a}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)^{\frac{1}{2}} = 0$$

运动积分为

$$\omega_2 = \frac{1}{2}m(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) + mgq_3 = h \neq 0$$

$$\omega_3 = \frac{\dot{q}_2}{\dot{q}_1} = c \neq 0$$

试求广义力 Q_1, Q_2, Q_3 和约束乘子 λ。

24.6 已知二阶 Birkhoff 系统有一个积分

$$I = a^1 \sin t + a^2 \cos t = c$$

试求系统的 Birkhoff 函数 B 和 Birkhoff 函数组 R_1, R_2。

参考文献

[1] Галиуллин АС. Методы Решения Обратных Задач Динамики[M]. Москва: Наука,1986.

[2]梅凤翔. 动力学逆问题[M]. 北京:国防工业出版社,2009.

[3] Еругин НП. Построение всего множества систем дифференциальных уравнений имеющих заданную интегральную кривую[J]. ПММ,1952,16(6):659-670.

[4]Whittaker ET. A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies[M]. Fourth Ed. Cambridge: Cambridge Univ. Press,1952.

[5]Галиуллин АС, Гафаров ГГ, Малайшка РП, Хван АМ. Аналитическая Динамика Систем Гельмгольца, Биркгофа, Намбу [М]. Москва: УФН,1997.

[6]梅凤翔. 约束力学系统的对称性与守恒量[M]. 北京:北京理工大学出版社,2004.

[7]梅凤翔,史荣昌,张永发,吴惠彬. Birkhoff 系统动力学[M]. 北京:北京理工大学出版社,1996.

[8]刘凤丽,梅凤翔. 非完整动力学逆问题的一种提法和解法[J]. 应用数学和力学,1993,14(4):309-314.

[9]张永发,梅凤翔. Birkhoff 系统动力学逆问题的两种提法和解法[J]. 北京理工大学学报,1996,16(4):352-356.

[10]史荣昌,梅凤翔. 关于 Bertrand 一个定理的推广[J]. 应用数学和力学,1993,14(6):507-513.

[11]Li GC, Mei FX. An inverse problem in analytical dynamics[J]. Chin Phys,2006,15(8):1669-1671.

[12]梅凤翔,刘端,罗勇. 高等分析力学[M]. 北京:北京理工大学出版社,1991.

25

力学的变分原理

原理分为不变分的和变分的，例如，d'Alembert 原理是不变分的原理。变分原理又分为微分变分原理和积分变分原理。文献中大量出现的“原理的证明”无疑是不合理的，原理无需证明[1]。微分变原理是研究力学系统在某状态邻近无限小时间间隔中实际运动和其他可能运动之间所做的局部比较。比较结果表明，对真实运动来说，某函数可取极值，例如，Gauss 原理。积分变分原理是研究力学系统在一段有限时间内真实运动与可能运动之间的比较。比较结果表明，对真实运动来说，某泛函取极值。本章研究分析力学中的变分原理，包括微分变分原理中的 d'Alembert-Lagrange 原理、Jourdain 原理和 Gauss 原理，积分变分原理中的 Hamilton 原理、Lagrange 原理和 Pfaff-Birkhoff 原理。

§25.1 d'Alembert-Lagrange 原理

本节讨论 d'Alembert 原理、虚位移原理、d'Alembert-Lagrange 原理，以及 d'Alembert-Lagrange 原理在广义坐标中的表达等。

25.1.1 d'Alembert 原理

设力学系统由 N 个质量为 $m_i(i=1,2,\cdots,N)$ 的质点组成，质点的加速度为 $\boldsymbol{a}_i=\ddot{\boldsymbol{r}}_i$，把 $\boldsymbol{F}_{Ii}=-m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i$ 称为惯性力。d'Alembert 原理指出，在每一瞬时，作用在质点上的主动力 $\boldsymbol{F}_i$、约束力 $\boldsymbol{F}_{Ni}$，以及假想的惯性力 $\boldsymbol{F}_{Ii}$ 处于平衡，即

$$\boldsymbol{F}_i+\boldsymbol{F}_{Ni}+\boldsymbol{F}_{Ii}=0 \qquad (i=1,2,\cdots,N) \tag{25.1.1}$$

d'Alembert 原理把动力学问题用静力学平衡方法求解，形成所谓“动静法”。d'Alembert 原理与虚位移原理联合而构成动力学普遍方程——d'Alembert-Lagrange 原理。

有关 d'Alembert 原理的详述见第 7 章。

25.1.2 虚位移原理

虚位移原理表述为：在双面理想约束下，质点系平衡的必要充分条件是，作用于系统上的主动力在任何虚位移上所做元功之和等于零，即

$$\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = 0 \tag{25.1.2}$$

虚位移原理，亦称虚功原理，它是分析静力学的基础。虚位移原理与 d'Alembert 原理联合构成 d'Alembert-Lagrange 原理。

25.1.3 d'Alembert-Lagrange 原理的表述

由 d'Alembert 原理和虚位移原理，有

$$\sum_{i=1}^{N} (\boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{F}_{Ni} - m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i) \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = 0 \tag{25.1.3}$$

在双面理想约束下，有

$$\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_{Ni} \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = 0 \tag{25.1.4}$$

代入式(25.1.3)，得到

$$\sum_{i=1}^{N} (\boldsymbol{F}_i - m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i) \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = 0 \tag{25.1.5}$$

这就是 d'Alembert-Lagrange 原理，表述为：在双面理想约束下，在运动的每一瞬时，作用于质点系上的主动力和惯性力在质点系该瞬时所在位置的任何虚位移上所做元功之和等于零。

d'Alembert-Lagrange 原理(25.1.5)表明，在给定瞬时的所有可能运动中，只有真实运动使主动力和惯性力的虚功之和等于零。

25.1.4 d'Alembert-Lagrange 原理在广义坐标中的表达

假设力学系统的位形由 n 个广义坐标 $q_s(s=1,2,\cdots,n)$ 来确定。引进系统的动能

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \dot{\boldsymbol{r}}_i \tag{25.1.6}$$

注意到

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = \sum_{s=1}^{n} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial T}{\partial q_s}\right)\delta q_s \tag{25.1.7}$$

则原理(25.1.5)可表示为 Euler-Lagrange 形式

$$\sum_{s=1}^{n} \left(\frac{\partial T}{\partial q_s} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} + \boldsymbol{Q}_s\right)\delta q_s = 0 \tag{25.1.8}$$

其中

$$Q_s = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_s} \tag{25.1.9}$$

为广义力。

注意到

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = \sum_{s=1}^{n} \left(\frac{\partial \dot{T}}{\partial \dot{q}_s} - 2 \frac{\partial T}{\partial q_s} \right) \delta q_s \tag{25.1.10}$$

其中$\dot{T}$为动能对时间的导数,则原理(25.1.5)可表示为 Nielsen 形式

$$\sum_{s=1}^{n} \left(2 \frac{\partial T}{\partial q_s} - \frac{\partial \dot{T}}{\partial \dot{q}_s} + Q_s \right) \delta q_s = 0 \tag{25.1.11}$$

引进系统的加速度能

$$S = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \ddot{\boldsymbol{r}}_i \tag{25.1.12}$$

则有

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_s} \delta q_s \tag{25.1.13}$$

原理(25.1.5)可表示为 Appell 形式

$$\sum_{s=1}^{n} \left(Q_s - \frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_s} \right) \delta q_s = 0 \tag{25.1.14}$$

利用原理(25.1.8),(25.1.11),(25.1.14)可推导完整力学系统的运动微分方程。考虑到非完整约束对 δq_s 的限制,还可推导非完整系统的运动微分方程。d'Alembert-Lagrange 原理是分析动力学的基础。

§25.2 Jourdain 原理

本节讨论 Jourdain 原理及其在广义坐标中的表达。

25.2.1 Jourdain 原理的表述

Jourdain 原理中的变分是速度的变分,即速度空间的虚位移[2]。Jourdain 原理表述为:在双面理想约束下,在运动的每一瞬时,作用在质点系上的主动力和惯性力在速度空间的虚位移上所做元功之和等于零。数学表达为

$$\sum_{i=1}^{N} (\boldsymbol{F}_i - m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i) \cdot \delta \dot{\boldsymbol{r}}_i = 0 \tag{25.2.1}$$

此原理对约束所加限制是 Jourdain 意义下的理想性,即

$$\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_{Ni} \cdot \delta \dot{\boldsymbol{r}}_i = 0 \tag{25.2.2}$$

Jourdain 原理(25.2.1)表明,在给定瞬时的所有可能运动中,只有真实运

动使主动力和惯性力在速度空间虚位移上所做元功之和等于零。

在一些俄文文献中，这个原理也称为 Суслов-Jourdain 原理，例如文献[3]。

文献[4]给出的基本方程第二形式为

$$\sum_{r=1}^{N}(m_r\ddot{x}_r - X_r)\Delta\dot{x}_r = 0 \tag{25.2.3}$$

其中位形和时间给定，$\Delta\dot{x}_r$ 为在给定位形、给定瞬时两个任意可能速度系统之间的有限差，而非无限小差。原理(25.2.3)对冲击运动有重要应用。最简单情形是其中的 $\Delta\dot{x}_r$ 为从真实速度到邻近可能速度的无限小变更。这就是 Jourdain P. E. B于 1908 年得到的。

25.2.2 Jourdain 原理在广义坐标中的表达

Jourdain 原理(25.2.1)可表示为 Euler-Lagrange 形式

$$\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial T}{\partial q_s} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} + Q_s\right)\delta\dot{q}_s = 0 \tag{25.2.4}$$

Nielsen 形式

$$\sum_{s=1}^{n}\left(2\frac{\partial T}{\partial q_s} - \frac{\partial \dot{T}}{\partial \dot{q}_s} + Q_s\right)\delta\dot{q}_s = 0 \tag{25.2.5}$$

以及 Appell 形式

$$\sum_{s=1}^{n}\left(Q_s - \frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_s}\right)\delta\dot{q}_s = 0 \tag{25.2.6}$$

利用原理(25.2.4)，(25.2.5)，(25.2.6)可推导完整力学系统的运动微分方程。考虑到非完整约束对 $\delta\dot{q}_s$ 的限制，还可推导非完整系统的运动微分方程。文献[2]认为，Jourdain 原理是非完整力学的基础。

§25.3 Gauss 原理

Appell 在其著作第 25 章第 7 大节“Gauss 最小拘束原理”中写道[5]：

学者们力求找到各种方法将运动方程归为单一原理，用引进积分或函数的方法，它们使系统真实运动与可能的邻近运动相比较时取极小。这个思想首先在最小作用量原理中出现；其后得到更普遍的 Hamilton 原理，由此很简单地导出完整系统的 Lagrange 方程，但在非完整系统情形下，这些论证和结论已不再正确。现在这里有 Gauss 最小拘束原理。这个原理是最普遍的，在应用它时不发生任何困难。原理的优越性在于，它有简单的解析表达，用求二阶导数极小的方法可以导出任何系统，不论是完整系统还是非完整系统的运动方程。

本节讨论 Gauss 原理及其在广义坐标中的表达。

25.3.1 Gauss 原理的表述

Gauss 原理的物理基础是最小拘束的概念。力学系统的拘束(Zwang)可表

示为

$$Z_w = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i\left(\ddot{\boldsymbol{r}}_i - \frac{\boldsymbol{F}_i}{m_i}\right)^2 \tag{25.3.1}$$

其中 $\boldsymbol{F}_i/m_i$ 表示质点在不受约束时自由运动的加速度，而 $\ddot{\boldsymbol{r}}_i$ 表示有约束时的实际运动的加速度。因此，拘束表示自由运动加速度和实际运动加速度的偏离。Gauss 原理表述为：在每一瞬时处于主动力和双面理想约束下的质点系，其真实运动不同于所有同样初位置、同样初速度的运动学可能的运动之处在于，真实运动对自由运动的偏离的量度(拘束)是极小的。Gauss 原理的数学表达为

$$\delta Z_w = 0 \tag{25.3.2}$$

对式(25.3.1)取 Gauss 变分——仅对加速度取变分，而坐标和速度不变，得到

$$\sum_{i=1}^{N}(\boldsymbol{F}_i - m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i)\cdot\delta\ddot{\boldsymbol{r}}_i = 0 \tag{25.3.3}$$

此原理对约束所加限制是 Gauss 意义下的理想，即

$$\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{F}_{Ni}\cdot\delta\ddot{\boldsymbol{r}}_i = 0 \tag{25.3.4}$$

Gauss 原理(25.3.3)表明，对具有双面理想约束的质点系，在给定瞬时的所有可能运动中，只有真实运动使主动力和惯性力在加速度空间虚位移上所做元功之和等于零。

文献[4]给出的基本方程第三形式为

$$\sum_{r=1}^{N}(m_r\ddot{x}_r - X_r)\Delta\ddot{x}_r = 0 \tag{25.3.5}$$

其中 $\Delta\ddot{x}_r$ 为加速度的有限差。如果 $\Delta\ddot{x}_r$ 为无限小，则成为 Gauss 和 Gibbs 给出的原理。

25.3.2 Gauss 原理在广义坐标中的表达

Gauss 原理(25.3.3)可表示为 Euler-Lagrange 形式

$$\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial T}{\partial q_s} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} + \boldsymbol{Q}_s\right)\delta\ddot{q}_s = 0 \tag{25.3.6}$$

Nielsen 形式

$$\sum_{s=1}^{n}\left(2\frac{\partial T}{\partial q_s} - \frac{\partial \dot{T}}{\partial \dot{q}_s} + \boldsymbol{Q}_s\right)\delta\ddot{q}_s = 0 \tag{25.3.7}$$

以及 Appell 形式

$$\sum_{s=1}^{n}\left(\boldsymbol{Q}_s - \frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_s}\right)\delta\ddot{q}_s = 0 \tag{25.3.8}$$

因 $\boldsymbol{Q}_s$ 不含广义加速度，原理(25.3.8)还可写成形式[5]

$$\delta R = 0 \tag{25.3.9}$$

其中

$$R = S - \sum_{s=1}^{n} Q_s \ddot{q}_s \tag{25.3.10}$$

而 δ 为 Gauss 变分。式(25.3.9)表明,函数 R 在真实运动中取极小值。

因 Gauss 原理可表示某函数取极值这一性质,因此 Gauss 原理在机器人动力学、非线性振动方程的近似解等中有广泛应用[6-8]。正如 Euler 指出的,解决力学问题有两种方法:一种方法是根据平衡或运动规律的直接方法;另一种方法是运用极大值或极小值公式,通过求极大值或极小值的方法求出这些公式的解。

Gauss 原理可作为分析动力学的基础。

§25.4 Hamilton 原理

本节讨论 Hamilton 原理,包括 Hamilton 原理的表述、一般完整系统的 Hamilton 原理、Hamilton 原理应用于近似计算、Hamilton 原理的极值特性、非完整系统的 Hamilton 原理等。

25.4.1 Hamilton 原理的表述

研究具有双面理想完整约束的力学系统,所受广义力是有势的。系统的位形由 n 个广义坐标 $q_s(s=1,2,\cdots,n)$ 来确定。系统的动势,即 Lagrange 函数为 $L=T-V$,其中 T 为系统的动能,V 为系统的势能。Lagrange 函数在时间 t_0 到 t_1 的积分

$$S = \int_{t_0}^{t_1} L(q_s, \dot{q}_s, t)\mathrm{d}t \tag{25.4.1}$$

称为 Hamilton 意义下的作用量。Hamilton 作用量是一个泛函,此泛函由选取的 n 个时间函数 $q_s(t)(s=1,2,\cdots,n)$ 的总合来确定。在系统的真实路径上,作用量 S 取完全确定的值,此时出现于被积函数 L 中的 $q_s(t)$,$\dot{q}_s(t)$ 就是真实运动中的广义坐标和广义速度。Hamilton 原理能够指出,系统真实运动与可能运动相比较时,真实运动所具有的性质。

在 Hamilton 原理中,所有可比较的运动有三个共同点:①约束是双面、理想、完整的,广义力是有势的。②所有可比较的运动在同一时刻 t_0 开始,并在同一时刻 t_1 结束。因此,比较运动在同一时间间隔 t_1-t_0 内完成。在所有运动中,时间的变化规律一样,即时间不变更。因此,变量的变分是等时的。③既然所有比较运动由同一点在同一时刻 t_0 开始的,并在同一点在同一时刻 t_1 结束,亦即所有广义坐标在这些时刻彼此相等。因此,广义坐标的等时变分在这些边值上恒等于零,即

$$\delta q_s \Big|_{t=t_0} = 0, \qquad \delta q_s \Big|_{t=t_1} = 0 \qquad (s=1,2,\cdots,n) \tag{25.4.2}$$

在所列举的加在比较运动的三个条件下,Hamilton 原理表述为:在相同的时间,相同的起始和终了位置和相同的双面理想完整约束下,广义力有势的系统,在所有可能的各种运动中,真实运动是使 Hamilton 作用量具有稳定值,即

$$\delta S = \delta\int_{t_0}^{t_1} L(q_s, \dot{q}_s, t)\mathrm{d}t = 0 \tag{25.4.3}$$

Hamilton 原理(25.4.3)是力学的基本原理,并且它把力学原理归结为更一般的形式。同时,它和坐标选择无关,因此更具普遍性并在多方面应用上更为方便。

25.4.2 一般完整系统的 Hamilton 原理

对于受非势力的完整系统,Hamilton 原理有如下形式

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta T + \sum_{s=1}^{n} Q_s \delta q_s)\mathrm{d}t = 0 \tag{25.4.4}$$

其中 $Q_s(s=1,2,\cdots,n)$ 为非势广义力。一般说来,原理(25.4.4)不是一个稳定作用量原理,因为它不能表示为某个泛涵的极值。但是,由这个原理可以导出 Lagrange方程。

25.4.3 Hamilton 原理应用于近似计算

Hamilton 原理特别适用于近似解法,在连续介质力学、结构力学等领域中有广泛应用。

例 1 单位质量的质点在平面 Oxy 上运动,外力的势能由 $V=xy$ 给出。在 $t=0$ 时,它在原点;在 $t=1$ 时,它在点(2,0)。试求质点的运动规律[9]。

解:先求精确解,以便与近似解作比较。问题的 Lagrange 函数为

$$L=\frac{1}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)-xy$$

微分方程为

$$\ddot{x}+y=0,\ddot{y}+x=0$$

其通解为

$$x=C_1\sin t+C_2\cos t+C_3\,\mathrm{sh}\,t+C_4\,\mathrm{ch}\,t$$

$$y=C_1\sin t+C_2\cos t-C_3\,\mathrm{sh}\,t-C_4\,\mathrm{ch}\,t$$

满足问题端点条件的特解为

$$x=\frac{\sin t}{\sin 1}+\frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{sh} 1},y=\frac{\sin t}{\sin 1}-\frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{sh} 1} \tag{a}$$

这是精确解。这个解使 Hamilton 作用量

$$S=\int_0^1\left[\frac{1}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)-xy\right]\mathrm{d}t \tag{b}$$

取极小值

$$S_{\min}=\cot 1+\operatorname{ch} 1\approx 1.955\ 128 \tag{c}$$

下面用 Ritz 法求其近似解。在 x-t 图和 y-t 图上连接两给定端点的直线为

$$x=2t,y=0$$

再加上两端均为零的函数，这种在 $t=0$ 和 $t=1$ 都等于零的最简单函数是 $t(1-t)$，因而可取

$$x=2t+\alpha t(1-t),y=\beta t(1-t) \tag{d}$$

作为可能运动的集合。这里 α,β 是参数，它们是 $x(t),y(t)$ 偏离直线的一种度量。

将式(a)代入式(b)，求得 Hamilton 作用量为

$$S=S(\alpha,\beta)=\int_0^1\left[\frac{1}{2}(2+\alpha-2\alpha t)^2+\frac{1}{2}\beta^2(1-2t)^2-\right.$$
$$\left.(2t+\alpha t-\alpha t^2)\beta t(1-t)\right]\mathrm{d}t$$

下面求使 $S(\alpha,\beta)$ 取极值的参数 α 和 β。令

$$\frac{\partial S}{\partial\alpha}=0,\frac{\partial S}{\partial\beta}=0$$

得

$$\int_0^1[(2+\alpha-2\alpha t)(1-2t)-(t-t^2)\beta t(1-t)]\mathrm{d}t=0$$

$$\int_0^1[\beta(1-2t)^2-(2t+\alpha t-\alpha t^2)t(1-t)]\mathrm{d}t=0$$

积分得

$$\frac{1}{3}\alpha-\frac{1}{30}\beta=0,-\frac{1}{30}\alpha+\frac{1}{3}\beta=\frac{1}{6}$$

解得

$$\alpha=\frac{5}{99},\beta=\frac{50}{99}$$

代回式(d)，求得近似解

$$x=2t+\frac{5}{99}t(1-t),y=\frac{50}{99}t(1-t) \qquad (e)$$

这组近似解(e)与精确解(a)在时间的大范围内性质极不一样，但在所关心的时间间隔内，两者差别很小，相应于式(e)的 S 值为

$$\frac{12\ 793}{6\ 534}\approx 1.957\ 912$$

如果将 y 改为

$$y=\beta t(1-t^2)$$

则精度就可以提高[9]。

25.4.4 Hamilton 原理的极值特性

Hamilton 原理(25.4.3)表示 Hamilton 作用量在真实运动中取极值，那么这个极值是极大还是极小呢？有如下结论：如果积分区间充分小，那么在定常约束下，Hamilton 原理的泛函在真实路径上具有极小值[10]。

例 2 研究单位质量的质点在力函数 $U(x)$ 的势力场中的一维运动。

解：问题的运动微分方程为

$$\ddot{x}=\frac{\partial U}{\partial x}$$

假设 $x(t)$ 为真实运动，并且 $x(t_0)=x_0, x(t_1)=x_1, t_1-t_0>0$。设 $x'(t)$ 是满足同样条件的、与真实运动相比较的运动，因此有

$$x'(t)=x(t)+\alpha(t)$$

其中 $\alpha(t)$ 为任意函数，但 $\alpha(t_0)=\alpha(t_1)=0$。用 S 和 S' 分别表示对真实运动和比较运动的 Hamilton 作用量，相应的动能为 T 和 T'，力函数为 U 和 U'。计算差值 $S'-S$，有

$$\begin{aligned}S'-S&=\int_{t_0}^{t_1}[(T'+U')-(T+U)]\mathrm{d}t\\&=\int_{t_0}^{t_1}\left[\frac{1}{2}(\dot{x}+\dot{\alpha})^2-\frac{1}{2}\dot{x}^2+U(x+\alpha)-U(x)\right]\mathrm{d}t\\&=\int_{t_0}^{t_1}\left[\frac{1}{2}\dot{\alpha}^2+U(x+\alpha)-U(x)-\alpha\frac{\mathrm{d}U(x)}{\mathrm{d}x}\right]\mathrm{d}t\end{aligned}$$

将 $U(x+\alpha)$ 展开为 Taylor 级数，有

$$U(x+\alpha)=U(x)+\alpha\frac{\mathrm{d}U(x)}{\mathrm{d}x}+\frac{1}{2}\alpha^2\frac{\mathrm{d}^2U(x+\theta\alpha)}{\mathrm{d}x^2} \qquad (0<\theta<1)$$

代入得

$$S^1 - S = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\left[\dot{\alpha}^2 + \alpha^2\,\frac{\mathrm{d}^2U(x+\theta\alpha)}{\mathrm{d}x^2}\right]\mathrm{d}t$$

因此,如果在整个力场中有

$$\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}x^2}\geqslant 0$$

那么,有

$$S'-S>0$$

因此,Hamilton 作用量对真实运动来说是极小的。

25.4.5 非完整系统的 Hamilton 原理

为考察非完整系统的 Hamilton 原理应该有怎样的形式,将广义力有势情形的 d'Alembert-Lagrange 原理

$$\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial q_s}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\right)\delta q_s = 0 \tag{25.4.5}$$

写成如下形式

$$\delta L-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\delta q_s\right)+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta q_s)-\delta\dot{q}_s\right\}=0 \tag{25.4.6}$$

将其对 t 由 t_0 至 t_1 积分,并注意到端点条件(25.4.2),得到

$$\int_{t_0}^{t_1}\left\{\delta L+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta q_s)-\delta\dot{q}_s\right]\right\}\mathrm{d}t=0 \tag{25.4.7}$$

由式(25.4.7)出发,根据对 $\delta\dot{q}_s$ 的两种不同定义,可以得到非完整系统两种不同形式的 Hamilton 原理。

1)Суслов 形式

假设系统的位形由 n 个广义坐标 $q_s(s=1,2,\cdots,n)$ 来确定,并受有 g 个双面理想 Четаев 型非完整约束

$$f_\beta(q_s,\dot{q}_s,t)=0 \qquad (\beta=1,2,\cdots,g;s=1,2,\cdots,n) \tag{25.4.8}$$

设由此可解出后面 g 个广义速度,记作

$$\dot{q}_{\varepsilon+\beta}=\varphi_\beta(q_s,\dot{q}_\sigma,t) \qquad \begin{pmatrix}s=1,2,\cdots,n;\sigma=1,2,\cdots,\varepsilon;\\ \varepsilon=n-g;\beta=1,2,\cdots,g\end{pmatrix} \tag{25.4.9}$$

对独立的变分取交换关系[11]

$$\delta\dot{q}_\sigma=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta q_\sigma) \qquad (\sigma=1,2,\cdots,\varepsilon) \tag{25.4.10}$$

由

$$\delta f_\beta=0$$

求得

$$\delta\,\dot{q}_{\varepsilon+\beta}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta q_{\varepsilon+\beta})-\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}T_{\sigma}^{\varepsilon+\beta}\delta q_{\sigma} \tag{25.4.11}$$

其中

$$T_{\sigma}^{\varepsilon+\beta}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\varphi_{\beta}}{\partial\dot{q}_{\sigma}}-\frac{\partial\varphi_{\beta}}{\partial q_{\sigma}}-\sum_{\gamma=1}^{g}\frac{\partial\varphi_{\beta}}{\partial q_{\varepsilon+\gamma}}\frac{\partial\varphi_{\gamma}}{\partial\dot{q}_{\sigma}} \tag{25.4.12}$$

称式(25.4.10),(25.4.11)为交换关系的 Суслов 定义。这个定义指出,对非完整系统,对与独立速度相应的坐标 q_{σ},$\mathrm{d}\delta$ 运算可以交换,而对与不独立速度相应的坐标 $q_{\varepsilon+\beta}$,$\mathrm{d}\delta$ 运算不能交换。

将式(25.4.10),(25.4.11)代入式(25.4.7),得到

$$\int_{t_0}^{t_1}\left\{(\delta L)_c+\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial L}{\partial\,\dot{q}_{\varepsilon+\beta}}\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}T_{\sigma}^{\varepsilon+\beta}\delta q_{\sigma}\right\}\mathrm{d}t=0 \tag{25.4.13}$$

其中$(\delta L)_c$ 表示 Суслов 意义下的 δL。由式(25.4.10),(25.4.11),有

$$\begin{aligned}(\delta L)_c&=\left(\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial q_s}\delta q_s+\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_{\sigma}}\delta\,\dot{q}_{\sigma}+\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_{\varepsilon+\beta}}\delta\,\dot{q}_{\sigma+\beta}\right)_c\\&=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial q_s}\delta q_s+\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_{\sigma}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta q_{\sigma})+\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_{\varepsilon+\beta}}\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta q_{\varepsilon+\beta})-\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}T_{\sigma}^{\varepsilon+\beta}\delta q_{\sigma}\right\}\end{aligned} \tag{25.4.14}$$

原理(25.4.13)称为非完整系统 **Суслов 形式**的 Hamilton 原理。

2)Hölder 形式。

对所有变分采取交换关系

$$\delta\,\dot{q}_s=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta q_s)\qquad(s=1,2,\cdots,n) \tag{25.4.15}$$

将其代入式(25.4.7),得到

$$\int_{t_0}^{t_1}(\delta L)_H\mathrm{d}t=0 \tag{25.4.16}$$

其中$(\delta L)_H$ 表示 Hölder 意义下的 δL,有

$$(\delta L)_H=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial q_s}\delta q_s+\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_{\sigma}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta q_{\sigma})+\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_{\varepsilon+\beta}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta q_{\varepsilon+\beta}) \tag{25.4.17}$$

原理(25.4.16)称为非完整系统 **Hölder 形式**的 Hamilton 原理。

非完整系统 Hamilton 原理的两种形式(25.4.13)和(25.4.16)实际上是等价的。一般说来,它们都不是稳定作用量原理。由原理(25.4.13)和(25.4.16)可以导出非完整系统的运动微分方程。

25.4.6 Суслов 例与 Pars 例

Суслов 例和 Pars 例涉及 Hamilton 原理能否应用于非完整系统的问题。

1)Суслов 例

一质量为 m 的质点在力函数 $U=U(x,y,z)$ 作用下运动,所受约束为[12]

$$\varphi=A\dot{x}+B\dot{y}+C\dot{z}=0 \tag{a}$$

其中 A,B,C 是坐标 x,y,z 的函数。取积分

$$W=\int_{t_0}^{t_1}(L+\mu\varphi)\mathrm{d}t \tag{b}$$

其中 μ 为某乘子。条件变分为零,得

$$\delta W=\delta\int_{t_0}^{t_1}\left\{\frac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)+U+\mu(A\dot{x}+B\dot{y}+C\dot{z})\right\}\mathrm{d}t \tag{c}$$

利用 $\mathrm{d}\delta$ 交换关系及端点条件,得到

$$\begin{aligned}&\int_{t_0}^{t_1}\left\{\left[\frac{\partial U}{\partial x}+\mu\left(\dot{x}\frac{\partial A}{\partial x}+\dot{y}\frac{\partial B}{\partial x}+\dot{z}\frac{\partial C}{\partial x}\right)-m\ddot{x}-A\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}t}-\mu\left(\frac{\partial A}{\partial x}\dot{x}+\frac{\partial A}{\partial y}\dot{y}+\frac{\partial A}{\partial z}\dot{z}\right)\right]\delta x+\right.\\&\left[\frac{\partial U}{\partial y}+\mu\left(\dot{x}\frac{\partial A}{\partial y}+\dot{y}\frac{\partial B}{\partial y}+\dot{z}\frac{\partial C}{\partial y}\right)-m\ddot{y}-B\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}t}-\mu\left(\frac{\partial B}{\partial x}\dot{x}+\frac{\partial B}{\partial y}\dot{y}+\frac{\partial B}{\partial z}\dot{z}\right)\right]\delta y+\\&\left.\left[\frac{\partial U}{\partial z}+\mu\left(\dot{x}\frac{\partial A}{\partial z}+\dot{y}\frac{\partial B}{\partial z}+\dot{z}\frac{\partial C}{\partial z}\right)-m\ddot{z}-C\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}t}-\mu\left(\frac{\partial C}{\partial x}\dot{x}+\frac{\partial C}{\partial y}\dot{y}+\frac{\partial C}{\partial z}\dot{z}\right)\delta z\right]\right\}\mathrm{d}t=0\end{aligned} \tag{d}$$

由此得到方程

$$\begin{aligned}&\frac{\partial U}{\partial x}-A\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}t}-m\ddot{x}-\mu\left\{\dot{y}\left(\frac{\partial A}{\partial y}-\frac{\partial B}{\partial x}\right)-\dot{z}\left(\frac{\partial C}{\partial x}-\frac{\partial A}{\partial z}\right)\right\}=0\\&\frac{\partial U}{\partial y}-B\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}t}-m\ddot{y}-\mu\left\{\dot{z}\left(\frac{\partial B}{\partial z}-\frac{\partial C}{\partial y}\right)-\dot{x}\left(\frac{\partial A}{\partial y}-\frac{\partial B}{\partial x}\right)\right\}=0\\&\frac{\partial U}{\partial z}-C\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}t}-m\ddot{z}-\mu\left\{\dot{x}\left(\frac{\partial C}{\partial x}-\frac{\partial A}{\partial z}\right)-\dot{y}\left(\frac{\partial B}{\partial z}-\frac{\partial C}{\partial y}\right)\right\}=0\end{aligned} \tag{e}$$

如果取 $\lambda=-\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}t}$,且满足

$$\frac{\dot{x}}{\frac{\partial B}{\partial z}-\frac{\partial C}{\partial y}}=\frac{\dot{y}}{\frac{\partial C}{\partial x}-\frac{\partial A}{\partial z}}=\frac{\dot{z}}{\frac{\partial A}{\partial y}-\frac{\partial B}{\partial x}} \tag{f}$$

则所得方程与质点的微分方程

$$m\ddot{x}=\frac{\partial U}{\partial x}+\lambda A,\ m\ddot{y}=\frac{\partial U}{\partial y}+\lambda B,\ m\ddot{z}=\frac{\partial U}{\partial z}+\lambda C \tag{g}$$

相重合。将式(f)代入式(a),得到

$$A\left(\frac{\partial B}{\partial z}-\frac{\partial C}{\partial y}\right)+B\left(\frac{\partial C}{\partial x}-\frac{\partial A}{\partial z}\right)+C\left(\frac{\partial A}{\partial y}-\frac{\partial B}{\partial x}\right)=0 \tag{h}$$

这表明,约束(a)是可积的。因此,Hamilton 原理不能应用于非完整系统。

实际上,方程(e)就是所谓 **Vacco 动力学**方程[13]。

2)Pars 例

单位质量质点受不可积约束[14]

$$zdx - dy = 0 \tag{i}$$

运动方程为

$$\ddot{x} = \lambda z, \ddot{y} = -\lambda, \ddot{z} = 0 \tag{j}$$

设质点在 $t=0$ 由原点以速度$(u,0,w)$开始运动,则解为

$$x = \frac{u}{w}\theta, y = \frac{u}{w}(\text{ch }\theta - 1), z = \text{sh }\theta \tag{k}$$

其中

$$\text{sh }\theta = wt \tag{l}$$

选邻近几何可能路径

$$x = k\theta + \alpha(\theta), y = k(\text{ch }\theta - 1) + \beta(\theta), z = \frac{y'}{x'} = \frac{k\text{sh }\theta + \beta'(\theta)}{k + \alpha'(\theta)} \tag{m}$$

其中 $k=u/w$,参数 θ 由式(l)确定,"$'$"表示对 θ 的导数。函数 $\alpha(\theta)$和 $\beta(\theta)$为C^3 类,$\alpha,\beta,\alpha',\beta'$在 $\theta=0$ 和 $\theta=\theta_1$($\text{sh }\theta_1=wt_1$)为零。令 δI 为由未扰路径(k)到变更路径(m),积分 $\int_{t_0}^{t_1} L\mathrm{d}t$ 的改变。现在有

$$\int_{t_0}^{t_1} L\mathrm{d}t = \frac{1}{2}mw\int_0^{\theta_1} \frac{1}{\text{ch }\theta}(x'^2 + y'^2 + z'^2)\mathrm{d}\theta \tag{n}$$

如果积分对未扰路径是稳定的,那么 δI 的线性部分应为零,而事实上这些项为

$$mu\int_0^{\theta_1}(\alpha'\text{sech }\theta + \beta'\text{th }\theta)\mathrm{d}\theta + m\frac{w^2}{u}\int_0^{\theta_1}(\alpha'\text{ch }\theta - \alpha''\text{sh }\theta + \beta')\mathrm{d}\theta =$$

$$mu\int_0^{\theta_1}(\alpha'\text{sech }\theta + \beta'\text{th }\theta)\mathrm{d}\theta \tag{o}$$

显然它不为零。这就证明,对非完整系统,式

$$\delta\int L\mathrm{d}t = 0 \tag{p}$$

不成立,但

$$\int \delta L\mathrm{d}t = 0 \tag{q}$$

是成立的。

§25.5 Lagrange 原理

本节讨论 Lagrange 原理,包括 Lagrange 原理的基本形式和其他形式。

25.5.1 Lagrange 原理的表述

将动能的两倍在时间 t_0 至 t_1 积分

$$W = \int_{t_0}^{t_1} 2T\mathrm{d}t \tag{25.5.1}$$

称为 Lagrange 意义下的作用量。

研究具有双面理想完整定常约束的力学系统、广义力有势，因此，在运动过程中系统的总机械能保持为常数 h，有

$$T+V=h \tag{25.5.2}$$

这个关系在连接真实路径上两固定位置 $q_s^{(0)}$ 和 $q_s^{(1)}$ 的所有邻近路径上成立。既然条件(25.5.2)是对系统在邻近运动中加在点的速度的某个限制，那么，就不能把与真实路径上的位形 q_s 相应的邻近路径的位形 q_s^* 当作同一瞬时了。具体地说，不可要求系统沿邻近路径由初始位置到终了位置的过渡同沿真实路径在同一时间间隔 t_1-t_0 内完成。于是，对条件(25.5.2)必须采用非等时变分，有

$$\begin{aligned}\Delta(T+V)&=\delta(T+V)+(\dot{T}+\dot{V})\Delta t=\delta(T+V)\\&=\Delta h=\delta h=0\end{aligned} \tag{25.5.3}$$

Lagrange 原理表述如下：在系统的两个固定位置之间，Lagrange 作用量在真实路径上与具有同一机械能常数的邻近路径上相比较而具有稳定值。Lagrange原理的数学表达为

$$\Delta W=\Delta\int_{t_0}^{t_1}2T\mathrm{d}t=0 \tag{25.5.4}$$

Lagrange 原理(25.5.4)的条件是：①系统所受约束是双面理想完整定常的，广义力是有势的；②可比较的运动具有同样的能量常数 h，而 $\Delta h=0$；③在端点坐标的非等时变分等于零

$$(\Delta q_s)\Big|_{t=t_0}=0,\quad (\Delta q_s)\Big|_{t=t_1}=0\qquad (s=1,2,\cdots,n) \tag{25.5.5}$$

Lagrange 原理亦称 Lagrange 最小作用量原理。

25.5.2 Lagrange 原理的其他形式

Lagrange 原理(25.5.4)可有多种表达形式[14,15]，其中有的形式在数学上极其简单，在物理上极具概括性。

因动能表示为

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}m_i v_i^2$$

故 Lagrange 作用量可写成

$$W=\int_{t_0}^{t_1}\left(\sum_{i=1}^{N}m_i v_i^2\right)\mathrm{d}t$$

注意到

$$\boldsymbol{v}_i=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{s}_i}{\mathrm{d}t}$$

其中 $\mathrm{d}\boldsymbol{s}_i$ 为第 i 个质点在直角坐标系中运动的路径弧元矢量。于是有

$$W=\sum_{i=1}^{N}\int_{s_i^0}^{s_i^1}m_i\boldsymbol{v}_i\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}_i \tag{25.5.6}$$

这就是 Lagrange 作用量的 Maupertuis 形式。它表明,Lagrange 作用量是系统各质点沿其路径所做"功"之和。Lagrange 原理表明,对真实运动这个"功"之和具有稳定值。

下面从 W 中消去时间变量。根据假设,动能应为广义速度的齐二次式

$$T=T_2=\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}A_{sk}\,\dot{q}_s\,\dot{q}_k$$

又

$$2T=2(h-V)$$

于是有

$$\mathrm{d}t=\frac{\left(\sum\limits_{s=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{n}A_{sk}\,\mathrm{d}q_s\mathrm{d}q_k\right)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2(h-V)}}$$

将其代入式(25.5.1),得到

$$W=\int_A^B\sqrt{2(h-V)}\left(\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}A_{sk}\,\mathrm{d}q_s\mathrm{d}q_k\right)^{\frac{1}{2}} \tag{25.5.7}$$

这就是 Lagrange 作用量的 Jacobi 形式。Lagrange 原理表明,这个 W 在真实运动中具有稳定值。利用 Lagrange 原理的 Jacobi 形式,可直接求得系统的运动轨道而不涉及时间变量。

引进度量

$$(\mathrm{d}s)^2=\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}A_{sk}\,\mathrm{d}q_s\mathrm{d}q_k \tag{25.5.8}$$

则动能表示为

$$T=\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2$$

Lagrange 作用量(25.5.1)表示为

$$W=\int_A^B\sqrt{2(h-V(\boldsymbol{q}))}\,\mathrm{d}s \tag{25.5.9}$$

如果改变 Riemann 度规的取法,令

$$(\mathrm{d}s)^2=\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}(h-V)A_{sk}\,\mathrm{d}q_s\mathrm{d}q_k \tag{25.5.10}$$

则 Lagrange 作用量取形式

$$W=\int_A^B\mathrm{d}s \tag{25.5.11}$$

它表示代表点的弧长。此时,Lagrange 原理表现为 Riemann 短程线。

§25.6 Pfaff-Birkhoff 原理

本节讨论 Pfaff-Birkhoff 原理、Pfaff-Birkhoff 原理与 Birkhoff 方程，以及 Pfaff-Birkhoff 原理的推广等。

25.6.1 Pfaff-Birkhoff 原理的表述

美国数学家 Birkhoff 在 1927 年出版名著《Dynamical Systems》，书中给出一类新型积分变分原理和一类新型运动方程[16]。Santilli 将结果推广到包含时间情形[17]。

积分

$$A=\int_{t_0}^{t_1}\left\{\sum_{\nu=1}^{2n}R_\nu(t,\boldsymbol{a})\,\dot{a}^\nu-B(t,\boldsymbol{a})\right\}\mathrm{d}t \tag{25.6.1}$$

称为 Pfaff 作用量，$B=B(t,\boldsymbol{a})$ 称为 Birkhoff 函数，$R_\nu=R_\nu(t,\boldsymbol{a})\,(\nu=1,2,\cdots,2n)$ 称为 Birkhoff 函数组[18]。

等时变分原理

$$\delta A=0 \tag{25.6.2}$$

带有交换关系

$$\mathrm{d}\delta a^\nu=\delta\mathrm{d}a^\nu \qquad (\nu=1,2,\cdots,2n) \tag{25.6.3}$$

及端点条件

$$\delta a^\nu\Big|_{t=t_0}=\delta a^\nu\Big|_{t=t_1}=0 \qquad (\nu=1,2,\cdots,2n) \tag{25.6.4}$$

称为 Pfaff-Birkhoff 原理[18]。文献[17]称为 Pfaff 原理。这是一个一般的一阶变分原理。

25.6.2 Hamilton 原理是 Pfaff-Birkhoff 原理的特例

取广义动量 p_s 和 Hamilton 函数 H 为

$$p_s=\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_s},\quad H=\left(\sum_{s=1}^{n}p_s\dot{q}_s-L\right)\Big|_{(q,p,t)} \tag{25.6.5}$$

则 Hamilton 原理(25.4.3)可写成形式

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}\left(\sum_{s=1}^{n}p_s\dot{q}_s-H\right)\mathrm{d}t=0 \tag{25.6.6}$$

或形式

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}\left\{\sum_{\nu=1}^{2n}R_\nu^0(\boldsymbol{a})\,\dot{a}^\nu-H(t,\boldsymbol{a})\right\}\mathrm{d}t=0 \tag{25.6.7}$$

其中

$$a^{\mu}=\begin{cases}q_{\mu} & (\mu=1,2,\cdots,n)\\ p_{\mu-n} & (\mu=n+1,n+2,\cdots 2n)\end{cases}$$
$$R_{\nu}^{0}=\begin{cases}p_{\nu} & (\nu=1,2,\cdots,n)\\ 0 & (\nu=n+1,n+2,\cdots,2n)\end{cases} \tag{25.6.8}$$

比较式(25.6.7)与式(25.6.2),可知 Hamilton 原理是 Pfaff-Birkhoff 原理的一个特殊情形,这只要在原理(25.6.2)中取

$$R_{\nu}=R_{\nu}^{0},B=H \tag{25.6.9}$$

即可。

25.6.3 Pfaff-Birkhoff 原理与 Birkhoff 方程

由 Pfaff-Birkhoff 原理(25.6.2)容易导出 Birkhoff 方程。实际上,展开原理(25.6.2),得

$$\delta A=\int_{t_0}^{t_1}\sum_{\nu=1}^{2n}\left\{\left(\sum_{\mu=1}^{2n}\frac{\partial R_{\mu}}{\partial a^{\nu}}\dot{a}^{\nu}-\frac{\partial B}{\partial a^{\nu}}\right)\delta a^{\nu}+R_{\nu}\delta\dot{a}^{\nu}\right\}\mathrm{d}t=0 \tag{25.6.10}$$

利用交换关系(25.6.3),有

$$R_{\nu}\delta\dot{a}^{\nu}=R_{\nu}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta a^{\nu})=(R_{\nu}\delta a^{\nu})^{\cdot}-\left(\sum_{\mu=1}^{2n}\frac{\partial R_{\nu}}{\partial a^{\mu}}\dot{a}^{\mu}+\frac{\partial R_{\nu}}{\partial t}\right)\delta a^{\nu}$$

将其代入式(25.6.10),并注意到端点条件(25.6.4),便得

$$\delta A=\int_{t_0}^{t_1}\sum_{\mu=1}^{2n}\left\{\sum_{\nu=1}^{2n}\left(\frac{\partial R_{\nu}}{\partial a^{\mu}}-\frac{\partial R_{\mu}}{\partial a^{\nu}}\right)\dot{a}^{\nu}-\frac{\partial B}{\partial a^{\mu}}-\frac{\partial R_{\mu}}{\partial t}\right\}\delta a^{\mu}\mathrm{d}t=0 \tag{25.6.11}$$

由此注意到 δa^{μ} 的独立性以及积分区间的任意性,便得方程

$$\sum_{\nu=1}^{2n}\left(\frac{\partial R_{\nu}}{\partial a^{\mu}}-\frac{\partial R_{\mu}}{\partial a^{\nu}}\right)\dot{a}^{\nu}-\frac{\partial B}{\partial a^{\mu}}-\frac{\partial R_{\mu}}{\partial t}=0\qquad(\mu=1,2,\cdots,2n) \tag{25.6.12}$$

这就是 Birkhoff 方程[17,18]。

由式(25.6.11)积分区间$[t_0,t_1]$的任意性,还可得到

$$\sum_{\mu=1}^{2n}\left\{\sum_{\nu=1}^{2n}\left(\frac{\partial R_{\nu}}{\partial a^{\mu}}-\frac{\partial R_{\mu}}{\partial a^{\nu}}\right)\dot{a}^{\nu}-\frac{\partial B}{\partial a^{\mu}}-\frac{\partial R_{\mu}}{\partial t}\right\}\delta a^{\mu}=0 \tag{25.6.13}$$

文献[18]将其称为 Pfaff-Birkhoff-d'Alembert 原理。利用这个原理可研究约束 Birkhoff 系统动力学以及 Birkhoff 系统动力学逆问题[18]。

25.6.4 Pfaff-Birkhoff 原理的一个推广

Pfaff-Birkhoff 原理(25.6.2)可推广到如下形式[19]

$$\int_{t_0}^{t_1}\left\{\delta\left(\sum_{\nu=1}^{2n}R_{\nu}\dot{a}^{\nu}-B\right)+\delta'W\right\}\mathrm{d}t=0 \tag{25.6.14}$$

其中

$$\delta'W=\sum_{\nu=1}^{2n}\Lambda_{\nu}\delta a^{\nu} \tag{25.6.15}$$

由原理(25.6.14)可导出广义 Birkhoff 方程

$$\sum_{\nu=1}^{2n}\left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu}\right)\dot{a}^\nu-\frac{\partial B}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu}{\partial t}=-\Lambda_\mu \qquad (\mu=1,2,\cdots,2n) \tag{25.6.16}$$

方程(25.6.16)已由 Pfaff 作用量的广义准对称变换的不变性导出[20]。

§25.7 力学变分原理发展简史

文献[1]将历史上从 Fermat 到 Dirac 关于变分原理的 58 篇论文的俄译本集成书，同时，作者 Полак 用长达 100 页的文字做了一个总结。下面由这个总结提取一些内容来简述变分原理的发展简史。

25.7.1 力学变分原理的发展

力学的变分原理以及与其相关的物理思想和数学方法的综合，在理论与应用力学以及物理中起重要作用。很难指出物理-数学科学的其他领域，把抽象的数学研究与具体的物理内容如此深刻地结合起来。力学的变分原理不仅是自然和技术的最复杂、多方面问题科学研究的精美工具，而且运动规律的独特表达形式远远超出了经典力学的限制。力学的变分原理与变换群理论、光-机相似、经典和量子物理、场论、运动、平衡、稳定性，以及物理系统结构等问题的变分法等密切相关。

文献[1]对力学的变分原理的发展作了很好的总结与概括，主要有：

力学的变分原理和光-机相似的经过史；

Maupertuis 最小作用量原理；

18 世纪关于最小作用量原理的讨论；

Laplace，Carnot，Poisson 与最小作用量原理的相关工作；

Hamilton 动力学；

Jacobi 和 Остроградский 在力学的变分原理领域中的研究；

Lie 接触变换和 Hamilton-Jacobi 动力学；

19 世纪变分原理的分析力学的数学问题的发展：

Hamilton-Jacobi 分析力学的几何化；

19-20 世纪力学的变分原理的发展与推广；

Gauss 原理和 Hertz 原理。

25.7.2 力学与物理学中变分原理的含义和意义

文献[1]有如下提法：

力学变分原理的应用和物理意义的基础是两个定理：Hilbert 独立性定理和 Noether 定理。前一个定理给出变分原理的数学论据，后一个定理揭示它的

物理意义。

物理中电磁场的行为不仅可用 Faraday 模型来描述，而且其规律可借助 Lagrange 型方程来表达。

与 d'Alembert 原理相比较，Hamilton 原理的优越性在于研究一个唯一的标量 L，因此没有必要去计算每个质点的加速度和惯性力的虚功。

文献中大量出现的"原理的证明"无疑是不合理的，原理无须证明。

Hamilton 原理包罗了力学的以及一系列非力学的现象。

Hamilton 原理与最小作用量原理的相近，并没有排除它们之间的差别。

Hamilton 原理与经典力学中 Galilei-Newton 惯性原理密切相关。

以某积分和函数的变分形式表达的原理构成动力学定律的真实极值性质。

用 Jacobi 形式的最小作用量原理确定的轨道归结为确定测地线的纯几何问题。

不同的力学公式有不同的意义。基于用微分形式表达的 Lagrange 力学中的公式在解工程力学问题时是特别有效的，基于积分原理的 Hamilton-Jacobi 力学中的其他公式是研究无论是宏观世界还是微观世界一系列天文和物理问题的基本方法。

力学定律的基础是因果关系的确定性类型——所谓动力学合理性，其在力学中的意义是，如果给定系统的初始条件和作用力，那么在任何时刻在轨道上的位置是单值确定的。力学的变分原理，从内容和数学形式上看是一种"公理"。

总起来说，力学的变分原理不仅以简单不变形式表达运动方程和场方程，而且是运动的离散和连续观点的综合，是物理中广义因果原理的表达。

本章讨论了力学的变分原理，包括三种微分变分原理和三种积分变分原理。此外，还有其他形式的变分原理[8]。每个原理都可作为分析动力学的基础。当然，在应用这些原理时，要注意它们的前提和适用范围，例如，Hamilton 原理(25.4.3)仅适合完整有势系统，原理(25.4.13)和原理(25.4.16)适合 Четаев 型非完整系统。

思考题

25.1 d'Alembert-Lagrange 原理可以作为非完整力学的基础吗?

25.2 约束 $f=\dot{y}-t\dot{x}=0$ 对位形空间、速度空间和加速度空间的虚位移限制各是什么?

25.3 用原理(25.4.16)能否推导出 Суслов 例的运动方程?

习题

25.1 试用 Gauss 原理(25.3.3)导出双面理想完整系统的 Ценов 方程

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \ddot{T}}{\partial \ddot{q}_s}-3\frac{\partial T}{\partial q_s}\right)=Q_s \qquad (s=1,2,\cdots,n)$$

25.2 试由 Hamilton 原理(25.4.4)导出 Lagrange 方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial T}{\partial q_s}=Q_s \qquad (s=1,2,\cdots,n)$$

25.3 质点的动能为 $T=\frac{1}{2}m\dot{q}^2$,势能为 $V=\frac{1}{2}cq^2$($m>0,c>0$),试写出 Hamilton 作用量 S 的表达式,并利用运动微分方程

$$\ddot{q}+\omega^2 q=0 \qquad \left(\omega^2=\frac{c}{m}\right)$$

来证明 $\delta S=0$。

25.4 试利用 Hamilton 原理证明,具有 Lagrange 函数 $L(q_s,\dot{q}_s,t)$ 的系统和具有与之相差一个任意函数 $\Phi(q_s,t)$ 的全导数的 Lagrange 函数 $L_1(q_s,\dot{q}_s,t)=L(q_s,\dot{q}_s,t)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi(q_s,t)$ 的系统,运动方程是一致的。

25.5 单位质量质点可在光滑铅垂平面 Oxz 上运动,而平面以角速度 ω 绕铅垂轴 Oz 转动。试证:在真实运动 $x(t)$,$z(t)$ 上的 Hamilton 作用量 S 和比较运动 $x(t)+\delta x(t)$,$z(t)+\delta z(t)$ 上的 Hamilton 作用量 S',当 $\delta x(0)=\delta x(T)=\delta z(0)=\delta z(T)=0$ 时,其关系可表示为

$$S' = S+\frac{1}{2}\int_0^T \{(\delta\dot{x})^2+\omega^2(\delta x)^2+(\delta\dot{z})^2\}\mathrm{d}t$$

25.6 试用 Lagrange 原理(25.5.4)推导 Lagrange 方程。

参考文献

[1]Полак ЛС. Вариационные Принципы Механики[M]. Москва: ГИФМЛ,1959.

[2]牛青萍. 经典力学基本变分原理与不完整力学组的运动方程[J]. 力学学报,1964,7(2):139-148.

[3]Поляхов НН, Зегжда СА, Юшков МП. Теоретическая Механика[M]. Москва:Высшая Школа,2000.

[4]Pars LA. A Treatise on Analytical Dynamics[M]. London: Heinemann,1965.

[5]Appell P. Traité de Mécanique Rationnelle[M]. Tome Deuxième, Sixième

Édition. Paris：Gauthier-Villars，1953.
[6] Попов ЕП，Верещагин АФ，Зенкевич СЛ. Манипуляционные Работы. Динамика и Алгоритмы[M]. Москва：Наука，1978.
[7] Юшков МП. Построение приближенных решения уравнений нелинейных колебаний на основе принципа Гаусса[J]. Вестн ЛГУ，1984 13：121-123.
[8]梅凤翔，刘端，罗勇. 高等分析力学[M]. 北京：北京理工大学出版社，1991.
[9]朱照宣，周起钊，殷金生. 理论力学[M]. 下册. 北京大学出版社，1981.
[10] Лурье АИ. Аналитическая Механика[M]. Москва：ГИФМЛ，1961.
[11] Новосёлов ВС. Вариационные Методы в Механике[M]. Ленинград：ЛГУ，1966.
[12] Суслов ГК. Теоретическая Механика[M]. Москва：Гостехиздат，1946.
[13] Козлов ВВ. Динамика систем с неинтегрируемыми связями[J]. Вестн МГУ，Мат，Мех 1982，3：92-100；4：70-76；1983，3：101-110.
[14]汪家訸. 分析动力学[M]. 北京：高等教育出版社. 1958.
[15]陈滨. 分析动力学[M]. 北京：北京大学出版社，1987.
[16] Birkhoff GD. Dynamical Systems[M]. Providence RI：AMS College Publ，1927.
[17] Santilli RM. Theoretical Mechanics II[M]. New York：Springer-Verlag，1983.
[18]梅凤翔，史荣昌，张永发，吴惠彬. Birkhoff 系统动力学[M]. 北京：北京理工大学出版社，1996.
[19]梅凤翔，张永发，何光，等. 广义 Birkhoff 系统动力学的基本框架[J]. 北京理工大学学报，2007，27(12)：1035-1038.
[20] Mei FX. The Noether's theory of Birkhoffian systems[J]. Science in China，Serie A，1993，36(12)：1456-1467.

索 引

A	章次	页码
Appell-Chetaev(Четаев)定义	3	27
Appell 方程	14	318
Appell-Hamel 例	3	27
Appell 函数	7	111
Appell 形式	7	111

B		
保守系统	5	62
Bertrand 定理	24	586
变质量系统	10	218
Birkhoff 对称性	22	554
Birkhoff 方程	15	350
Birkhoff 函数	15	349
Birkhoff 函数组	15	349
Birkhoff 力学	15	348
Bobylev-Steklov(Бобылев-Стеклов)情形	10	208
Boltzmann-Hamel 方程	14	317
Boltzmann 三标记号	9	168

C		
参数方程	11	228
参数约束	11	230
Cauchy-Kovalevskaya(Ковалевская)定理	15	356

场积分方法	16	388
Chaplygin(Чаплыгин)方程	14	315
Chaplygin(Чаплыгин)情形	10	209
Chaplygin(Чаплыгин)雪橇	14	344
Chetaev(Четаев)定理	5	63
Chetaev(Четаев)条件	14	311
初始运动	9	173
Coriolis 惯性力	10	213

D

打击运动	9	177
d'Alembert-Lagrange 原理	7	105
d'Alembert 原理	7	102
单面理想约束	4	35
单面约束	1	7
等时变分	25	623
等时变换	15	370
第二类 Lagrange 方程	8	116
第一积分	8	144
第一类 Christoffel 记号	8	124
第一类 Lagrange 方程	8	116
点变换	8	134
定常约束	1	6
动力学函数	21	500
动力学逆问题	24	582
动力学普遍方程	7	102
对称变换	19	442
多余坐标	2	18

E

Emden 方程	11	249
Euler 角	2	19
Euler-Lagrange 形式	7	110
Euler-Poinsot 情形	10	204
Euler-Poisson 方程	10	203

F

分岔	5	72
分析力学	1	8
非等时变分	25	631
非等时变换	15	371
非定常约束	1	6
非完整力学	2	21
非完整系统	14	309
非完整约束	1	6
非自由系统	1	1
复合运动	6	95

G

刚度阵	10	192
Gauss 原理	25	621
Goryachev-Chaplygin(Горячев-Чаплыгин)情形	10	210
Goryachev(Горячев)情形	10	209
惯量张量	10	212
惯性力	7	103
广义 Birkhoff 方程	15	355
广义加速度	2	15
广义 Hamilton 系统	18	427
广义力	8	122
广义能量积分	8	146
广义 Pfaff-Birkhoff 原理	15	350
广义 Poisson 条件	13	275
广义速度	2	15
广义陀螺力	8	124
广义准对称变换	19	450
广义坐标	2	12
Grioli 情形	10	210

H

Hamilton 方程	12	253
Hamilton 函数	12	255

Hamilton-Jacobi 方程	13	277
Hamilton 力学	12	269
Hamilton 原理	25	623
Hess 行列式	12	253
Hess 情形	10	208
Hojman-Urrutia 方程	13	276
Hojman 型守恒量	20	473
Hölder 形式	25	628
Hölder 原则	3	26

I

J

Jacobi 定理	13	278
Jacobi 方法	14	329
Jacobi 行列式	12	253
Jacobi 恒等式	13	273
Jacobi-Painlevé 积分	8	146
Jacobi 最终乘子	18	420
机电系统	11	237
积分不变量	13	296
几何约束	1	3
渐近稳定	10	189
交换关系	14	310
结构方程	20	474
Jourdain 原理	25	620
局部能量积分	8	155
绝对导数	6	95
绝对加速度	6	96
绝对速度	6	95
绝对运动	6	95

K

可控力学系统	11	230
Kepler-Newton 问题	12	262
Kharlamova(Харламова)情形	10	210
Kharlamov(Харламов)方程	10	208
Killing 方程	19	442
König 定理	8	119
Kovalevskaya(Ковалевская)情形	10	204
Kowalewski 情形	10	210

L

Lagrange 乘子	5	47
Lagrange-Dirichlet 定理	10	188
Lagrange 对称性	22	534
Lagrange 方程	8	116
Lagrange 关系	2	15
Lagrange 函数	8	133
Lagrange 力学	2	21
Lagrange 力学逆问题	11	244
Lagrange-Maxwell 方程	11	241
Lagrange-Poisson 情形	10	204
Lagrange 系统	19	440
Lagrange 原理	25	630
Legendre 变换	12	254
类能量积分	15	363
类循环积分	15	363
Lie 代数	15	354
力的功	4	32
力的实功	4	32
力的虚功	4	32
Lie 对称性	20	472
李华宗定理	13	302
理想约束	4	34
Lindelöf 方程	14	319
Liouville 方程	8	155

Liouville 情形	13	279
Lur'e(Лурье)耗散函数	9	171
Lyapunov(Ляпунов)定理	10	189
Lyapunov(Ляпунов)函数	10	195
Lyapunov(Ляпунов)一次近似理论	15	382
Lyapunov(Ляпунов)直接法	15	383

M

Mathieur 变换	13	292
Meshcherski(Мещерский)方程	10	218
面积积分	10	203
母函数	13	253

N

能量积分	8	146
逆变型	12	266
Nielsen 形式	7	111
凝固导数	10	219
凝固偏导数	10	219
Noether 等式	19	442
Noether 对称性	19	441
Noether 守恒量	19	443
Novoselov(Новосёлов)例	16	395

O

耦合摆	10	198

P

Pars 例	25	629
Pfaff-Birkhoff 原理	15	349
Pfaff-Birkhoff-d'Alembert 原理	15	351
Pfaff 约束	1	4
Pfaff 作用量	15	349
平衡方程	5	44
平衡条件	5	46

平衡稳定性	5	62
平衡状态流形	5	64
Poincaré-Cartan 积分不变量	13	303
Poisson 定理	13	274
Poisson 方法	13	272
Poisson 括号	13	273
Poisson 条件	13	272

Q

牵连加速度	6	96
牵连速度	6	95
牵连运动	6	95
确定方程	20	473

R

Routh 方程	8	148
Routh 函数	8	148
Routh-Hurwitz 条件	10	190
Routh 降阶法	8	147
弱 Noether 对称性	19	462
Rumyantzev(Румянцев)定理	23	565

S

势函数	5	63
势积分方法	17	405
事件空间	11	226
实位移	3	25
受迫振动	10	193
双面理想约束	4	34
双面约束	1	7
伺服约束	11	231
Steklov(Стеклов)情形	10	209
损失力	7	103
Suslov(Суслов)例	25	629
Suslov(Суслов)形式	25	628

T

梯度系统	23	564
陀螺系数	10	213

U

V

Vacco 动力学	25	629
Van der Pol 方程	15	359
Voronetz(Воронец)方程	14	315

W

微分约束	1	3
Whittaker 方程	8	150
Whittaker 函数	8	149
Whittaker 降阶法	8	148
无摩擦约束	4	34
无扰运动	10	188
完全定常系统	8	119
完全积分	13	277
完整约束	1	5

X

相对导数	6	95
相对加速度	6	96
相对平衡	10	215
相对速度	6	95
相对运动	6	95
相似变换	8	134
小振动理论	10	187
协变型	12	266
斜梯度系统	23	564
新型守恒量	21	500
形式不变性	21	500
虚速度	3	24
虚速度原理	3	24

虚位移	3	25
虚位移原理	5	39
循环积分	8	145
循环坐标	8	145

Y

Yerugin(Еругин)函数	24	583
有势力	8	132
约束	1	1
约束 Birkhoff 系统	15	379
约束方程	1	1
约束力	4	33
运动稳定性	10	187
运动学	6	80

Z

正则变换	13	287
正则变量	12	255
正则方程	12	254
质量阵	10	192
主动力	4	32
主频率	10	192
主振动	10	192
准对称变换	19	442
准速度	2	19
准坐标	2	20
自伴随条件	11	245
自伴随形式	15	357
自然轴系	6	85
自由度	3	28
自由系统	1	1
自由振动	10	192

投稿邮箱：xueshu@bitpress.com.cn
咨询电话：(010) 68911947 68911085

封面设计：七星工作室

ISBN 978-7-5640-7877-5

定价：98.00元（上、下卷）